第 11 回　ラプラス変換の基礎（続き）

[教科書 (フーリエ解析と偏微分方程式) 1.1, 1.3]

今回の内容：

- ラプラス変換の諸性質（存在条件、一意性）
- 階段関数
- ラプラス変換の第 1・第 2 移動定理

11.1　ラプラス変換の諸性質

前回導入したラプラス変換の定義式

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{11.1}$$

に基づき、その諸性質を説明していく。$\mathcal{L}[f] = F(s)$ とも書く。

11.1.1　存在条件（ラプラス変換が存在する s の範囲）

定義式 (11.1) の積分が発散してしまうと、ラプラス変換 $\mathcal{L}[f]$ も発散してしまって意味をなさない。特に、**被積分関数 $f(t)$ が t について激しく増大する場合には、ラプラス変換も発散する**可能性がある。これを防ぐための条件が必要になる。

ラプラス変換の存在条件

次の式が**全ての $t \geq 0$ について成立**しているとする。

$$|f(t)| \leq Me^{kt} \qquad \left(M > 0, k : 定数\right) \tag{11.2}$$

このとき、**ラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ は $s > k$ を満たす全ての s について存在する。**
すなわち、$s > k$ ならば $F(s)$ は有限値をとる。

$$\because \qquad |F(s)| = \left|\int_0^\infty f(s)e^{-st}dt\right| \leq \int_0^\infty |f(s)|\, e^{-st}dt \leq \int_0^\infty Me^{kt}e^{-st}dt = M\int_0^\infty e^{(k-s)t}dt$$

右辺の積分は $s > k$ ($\Leftrightarrow k - s < 0$) なら有限値 $\frac{M}{k-s}$ をとる。逆に $k - s \geq 0$ のときには発散する。

例）　$f(t) = -1 - e^{\alpha t}$ (α : 実定数) のラプラス変換が存在するような s の範囲は何か？

まず、$|f(t)|$ の振る舞いを調べてみると、次の式が**全ての** $t > 0$ について成り立つことがわかる。

$$|f(t)| = \left|-1 - e^{\alpha t}\right| = 1 + e^{\alpha t} \leq 2e^{\alpha t}\ .$$

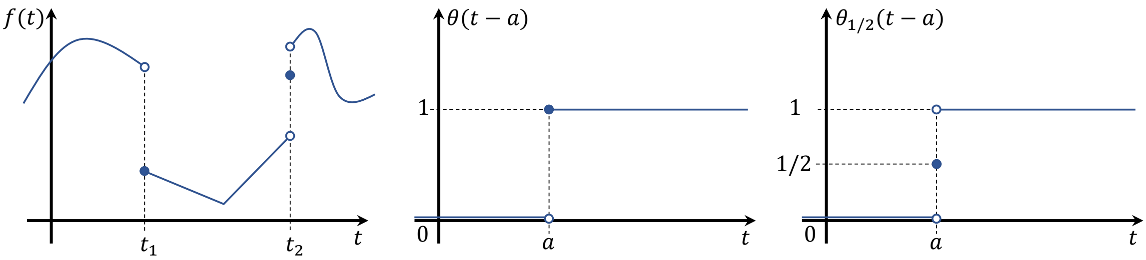
よって、上記の存在条件によれば**ラプラス変換 $F(s)$ は $s > \alpha$ の範囲で存在する**ことがわかる。[2]

11.2　区分的に連続な関数のラプラス変換

ラプラス変換 (10.2) は、$f(t)$ が連続な場合だけでなく、孤立した点で不連続になるような**区分的に連続な関数** (図 5(a) 参照) についても問題なく求められる。[3]

[2] 存在条件 (11.2) の式で $k = \alpha, M = 2$ とした場合に相当する。$F(s)$ の存在範囲を求めるだけであれば M はより大きな値に取ってもよく、結果にも影響しない。

[3] より正確には、条件 (11.2) に加えて、関数 $f(t)$ が区間 $(0, \infty)$ で区分的に連続であることがラプラス変換 $\mathcal{L}[f]$ の存在のために必要となる。



(a) 区分的に連続な関数　(b) 階段関数 $\theta(t-a)$　(c) 階段関数 $\theta_{1/2}(t-a)$

図 5: 区分的に連続な関数の例。

区分的に連続な関数の例としては、次で定義される**階段関数** $\theta(t-a)$ が挙げられる (図 5(b) 参照)。

$$\theta(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ 1 & (t \geq a) \end{cases} \qquad (a : \text{定数}) \tag{11.3}$$

階段関数 $\theta(t-a)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\theta(t-a)]$ を求めてみよう。定義に従って計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\theta(t-a)] &= \int_0^\infty \theta(t-a)e^{-st}dt = \int_0^a \theta(t-a)e^{-st}dt + \int_a^\infty \theta(t-a)e^{-st}dt \\ &= 0 + \int_a^\infty 1 \times e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_a^\infty = -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-st}\right) - \left(-\frac{1}{s}e^{-s\times a}\right) = \frac{1}{s}e^{-as} \ . \end{aligned} \tag{11.4}$$

11.3　ラプラス変換の一意性 / 逆変換の非一意性

ある関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は、存在さえすれば**一意に定まる**。すなわち、2 つの関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ が任意の $t \geq 0$ で一致するならば、それらのラプラス変換 $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1], F_2(s) = \mathcal{L}[f_2]$ も互いに等しくなる:

$$f_1(t) = f_2(t) \quad (\forall t \geq 0) \qquad \Rightarrow \qquad F_1(s) = F_2(s) \ .$$

逆に、**ラプラス逆変換は一意には定まらない**。すなわち、ラプラス変換後の関数 $F_1(s), F_2(s)$ が一致していても、そのラプラス逆変換 $f_1(t), f_2(t)$ は一致しない場合がある。ただし、**$f_1(t), f_2(t)$ の差は不連続点での値の差だけに限られる**ので、工学などでの実用上は問題にならない場合が多い。

例) 式 (11.3) とは異なる階段関数 $\theta_{1/2}(t-a)$ を次で定義する (図 5(c) 参照)。

$$\theta_{1/2}(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ 1/2 & (t = a) \\ 1 & (t > a) \end{cases} \tag{11.5}$$

このラプラス変換を計算すると、式 (11.4) とほぼ同じ操作をすることになり、結果も一致する:

$$\mathcal{L}\left[\theta_{1/2}(t-a)\right] = \frac{1}{s}e^{-st} \ . \tag{11.6}$$

それでは、関数 $\frac{1}{s}e^{-st}$ の逆ラプラス変換 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{-st}\right]$ はどのような関数になるだろうか？

逆変換の定義は「ラプラス変換すると $\frac{1}{s}e^{-st}$ になる t の関数」だったから、式 (11.3) の $\theta(t-a)$ も式 (11.6) の $\theta_{1/2}(t-a)$ もその条件を満たす。このように、**不連続点での値だけが異なるような関数はどれもラプラス逆変換の候補となり、一つに定めることはできない**。実用上は、それらの候補の中から性質の良いもの（不連続点が少ないものなど）を適当に選ぶことが多い。この講義でもそうする。

11.4　$f(t)$ の平行移動、ラプラス変換の第 2 移動定理

階段関数のラプラス変換 (11.4) に話を戻そう。式 (11.4) の右辺をよく観察すると、実は 1 のラプラス変換に e^{-as} をかけたものになっている。

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)] = \frac{1}{s}e^{-as}\ , \quad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \qquad \therefore \quad \mathcal{L}[\theta(t-s)] = e^{-as}\mathcal{L}[1]\ . \tag{11.7}$$

この関係式の起源はなんだろうか？それを見切るために図 5(b) を改めて観察してみると、階段関数 $\theta(t-a)$ のグラフは、定数関数 $f(t)=1$ のグラフの $t \geq 0$ の部分を a だけ右に**平行移動**した形になっていることが見てとれる。

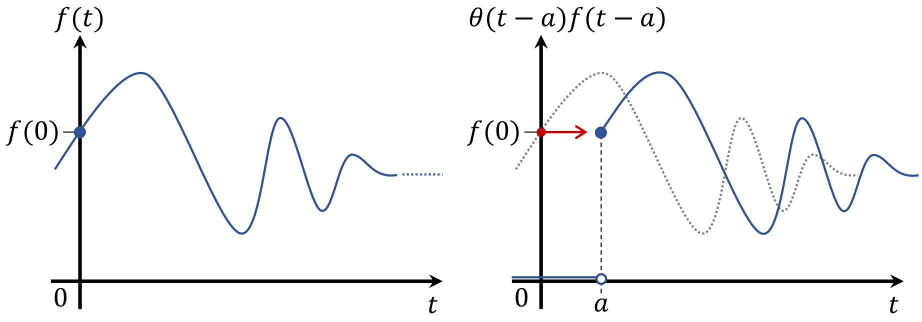
実は、このグラフの平行移動と、式 (11.7) に出てきた係数 e^{-as} には密接な関係がある。

準備：グラフの平行移動

- 関数 $y=f(t-a)$ のグラフは、関数 $y=f(t)$ のグラフを t 軸方向に a だけ平行移動したもので与えられる。
- 関数 $y=f(t-a)$ のグラフのうち、$t \geq 0$ の部分だけを t 軸方向に a だけ平行移動したいとする。このためには、階段関数 $\theta(t-a)$ を用いて

$$y = \theta(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0 & (t<a) \\ f(t-a) & (t \geq a) \end{cases} \tag{11.8}$$

と定義すると、ちょうどそのような性質を持つ関数になっている (図 6 参照)。



(a) $y=f(t)$　　(b) $y=\theta(t-a)f(t-a)$

図 6: $y=\theta(t-a)f(t-a)$ のグラフは、グラフ $y=f(t)$ の $t \geq 0$ の部分だけを t 方向に a だけ平行移動したもので与えられる。

ラプラス変換の第 2 移動定理

関数 $f(t)$ の $t \geq 0$ 部分を t 方向に $a \geq 0$ だけ平行移動した関数 $\theta(t-a)f(t-a)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)]$ は、元の関数のラプラス変換 $\mathcal{L}[f]$ の e^{-as} 倍になる:

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f] \qquad (a \geq 0)\ . \tag{11.9}$$

$(\because)$ $\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)]$ の式に出てくる項を $e^{-st} = e^{-s(t-a)-sa} = e^{-as}e^{-s(t-a)}$ と書き換えると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] &= \int_0^\infty \theta(t-a)f(t-a)e^{-st}dt = \int_0^\infty \theta(t-a)f(t-a)e^{-as}e^{-s(t-a)}dt \\ &= e^{-as}\int_0^\infty \theta(t-a)f(t-a)e^{-s(t-a)}dt\ . \end{aligned} \tag{11.10}$$

この式の右辺の積分は $\mathcal{L}[f]$ そのものであることが以下のように示せる。$a \geq 0$ が定数なので $dt = d(t-a)$ となることを使っていることと、二行目に移るところの等号で $t-a \to t$ と書き換えていることに注意。

$$\int_0^\infty \theta(t-a)f(t-a)e^{-s(t-a)}dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-s(t-a)}dt = \int_{t-a=0}^{t-a=\infty} f(t-a)e^{-s(t-a)}d(t-a)$$
$$= \int_{t=0}^{t=\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[f] \ . \quad (11.11)$$

式 (11.10), (11.11) を合わせれば第 2 移動定理 (11.9) が得られる。

式 (11.9) のように、ある関数 $f(t)$ に階段関数をかけたものは応用上しばしば必要となる (例: スイッチを入れた直後の電圧など)。第 2 移動定理の式はそのような場合に用いられる。

11.5　ラプラス変換の第 1 移動定理

第 2 移動定理 (11.9) と対になるような変換もある。こちらは、**ラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ を平行移動した際に起こる変化**を書き下したものである。

ラプラス変換の第 1 移動定理

関数 $f(t)$ に e^{at} をかけてからラプラス変換すると、s 方向に a だけ平行移動したラプラス変換 $F(s-a)$ が得られる。

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \qquad \Big(\ \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t) \ \Big) \qquad (11.12)$$

式 (11.12) のかっこの中の表式の方が、第 2 移動定理 (11.9) との対応を見て取りやすいかもしれない。

($\because$) 定義通り $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]$ を計算すれば直ちに示せる。どちらかと言うと、以下のように元のラプラス変換の式 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ について $s \to s-a$ と置き換える式からスタートしたほうが覚えやすいかもしれない。

$$F(s-a) = F(s)\Big|_{s\to s-a} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\Big|_{s\to s-a} = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)e^{at} \times e^{-st}dt = \mathcal{L}[f(t)e^{at}] \ . \quad (11.13)$$

第 1 移動定理を用いると、少し複雑な関数のラプラス変換を求められるようになる。

例）　前回も少し紹介したが、$\mathcal{L}[t^n]$ は以下のように求められる。[4]

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-st}dt\right) = \cdots$$
$$= \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \int_0^\infty e^{-st}dt = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \frac{1}{s} = \left(-\frac{d}{ds}\right)^{n-1} \frac{1}{s^2} = \left(-\frac{d}{ds}\right)^{n-2} \frac{2}{s^3} = \cdots = \frac{n!}{s^{n+1}} \ . \quad (11.14)$$

この結果に第 1 移動定理を適用すると、$f(t) = e^{at}t^n$ のラプラス変換を求めることができる。

$$\mathcal{L}[e^{at}t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}\bigg|_{s\to s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \ . \quad (11.15)$$

[4] n が整数でない場合は次のようになる。$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ はガンマ関数。途中計算にて $st = x$ と置き換えていることに注意する。

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^n e^{-x}\frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \ .$$