第12回　微分と積分のラプラス変換、微分方程式

[教科書 (フーリエ解析と偏微分方程式) 1.2, 1.4]

今回の内容：

- これまでの内容の復習
- 微分・積分のラプラス変換、ラプラス変換の微分・積分
- ラプラス変換と微分方程式

12.1　これまでの内容の復習

関数 $f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ とその性質について学んでいた。

$$\mathcal{L}[f] = F(s) \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \ . \tag{12.1}$$

12.1.1　ラプラス変換の例

- 定数

$$\mathcal{L}[C] = \int_0^\infty Ce^{-st}dt = \frac{C}{s} \tag{12.2}$$

- 指数関数

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}dt = \frac{1}{s-\alpha} \tag{12.3}$$

- べき関数

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \int_0^\infty e^{-st}dt = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{12.4}$$

- 三角関数
  指数関数のラプラス変換 (12.3) に $\alpha = i\omega$ を代入すると

$$\mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \ . \tag{12.5}$$

  一方、オイラーの公式を使って $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ とすると

$$\mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \mathcal{L}[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)] = \mathcal{L}[\cos(\omega t)] + i\mathcal{L}[\sin(\omega t)] \ . \tag{12.6}$$

  ただし、ラプラス変換の線型性を使って式を実部と虚部に分けた。
  式 (12.5), (12.6) の実部・虚部を比較すれば、$\sin\omega t, \cos\omega t$ のラプラス変換が得られる。

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \ , \qquad \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \ . \tag{12.7}$$

12.1.2　ラプラス変換の性質・定理

- 線形性

$$\mathcal{L}[C_1 f(t) + C_2 g(t)] = C_1\mathcal{L}[f(t)] + C_2\mathcal{L}[g(t)] \tag{12.8}$$

- ラプラス変換の存在条件
  全ての $t \geq 0$ について

$$|f(t)| \leq Me^{kt} \qquad (M > 0, k : \text{定数}) \tag{12.9}$$

  が満たされるとき、$s > k$ を満たす全ての s についてラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ が存在する。

- **第 1 移動定理**：関数 $f(t)$ に e^{at} をかけて変換 $\Rightarrow$ ラプラス変換 $F(s)$ が s 方向に a 平行移動

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \tag{12.10}$$

- **第 2 移動定理**：関数 $f(t)$ の $t \geq 0$ 部分を $a \geq 0$ だけ平行移動 $\Rightarrow$ ラプラス変換が e^{-as} 倍に

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s) \tag{12.11}$$

ただし、$\theta(t-a)$ は階段関数 ($t-a \geq 0$ のとき $\theta(t-a)=1$, $t-a<0$ のとき 0)。

12.2　微分・積分のラプラス変換

関数 $f(t)$ を微分してからラプラス変換すると、微分を取る前のラプラス変換に s をかけた式が得られる。ただし、初期時刻 $t=0$ における関数 $f(t)$ やその微分の値、すなわち $f(t)$ の初期条件で決まる項も式に出てくることに注意。

$f(t)$ の微分のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \tag{12.12}$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0) \tag{12.13}$$

($\because$) ラプラス変換の定義式からスタートして、部分積分を繰り返すことで示せる。

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\,(-s)\,e^{-st}dt = -f(0) + s\mathcal{L}[f]\ , \tag{12.14}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)] &= \int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = \left[f'(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f'(t)(-s)e^{-st}dt \\ &= \left[f'(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - s\int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}dt \\ &= -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}[f]\ .\end{aligned} \tag{12.15}$$

注）$f(t)$ の n 階微分のラプラス変換の式も同様に導出でき、以下のようになる。

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{n-1}(0) - f^n(0)\ . \tag{12.16}$$

例）式 (12.13) を使って $f(t)=\cos(\omega t)$ のラプラス変換を求めてみる。
$\cos\omega t$ の 2 階微分は自分自身に比例するので、それらのラプラス変換同士も比例する。

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t = -\omega^2\cos\omega t \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t\right] = -\omega^2\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right]\ . \tag{12.17}$$

一方、2 階微分のラプラス変換は微分する前のラプラス変換と式 (12.13) で結ばれている。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t\right] = s^2\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right] - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right] - s\ . \tag{12.18}$$

ただし、$f(0)=\cos 0 = 1$, $f'(0) = -\omega\sin 0 = 0$ を使った。式 (12.17), (12.18) を組み合わせることで

$$-\omega^2\mathcal{L}[\cos\omega t] = s^2\mathcal{L}[\cos\omega t] - s \qquad \therefore\ \ \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}\ . \tag{12.19}$$

一方で、関数 $f(t)$ を積分してからラプラス変換すると、$f(t)$ のラプラス変換に $1/s$ をかけた式が得られる。

$f(t)$ の積分のラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \tag{12.20}$$

(∵) 部分積分で、積分 $\int_0^t f(\tau)d\tau$ を微分するように計算する。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) e^{-st}dt \\ &= \left[\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt \\ &= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \ . \end{aligned} \tag{12.21}$$

なお、途中計算では $\left(\int_0^\infty f(\tau)d\tau\right)e^{-st} \xrightarrow{t\to\infty} 0$ となることを使った。これは $f(t)$ のラプラス変換の存在条件 $|f(t)| \leq Me^{kt}$ が満たされていれば成立するが、計算の詳細については省略する。教科書を参照のこと。

例) $F(s) = \dfrac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)}$ のラプラス逆変換 $f(t)$ を求める。

$\sin\omega t$ のラプラス変換が $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ となることを使う。この結果と比較すると、先ほど与えられた $F(s)$ は

$$F(s) = \frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right] \ . \tag{12.22}$$

積分のラプラス変換の公式 (12.21) と比較すると、右辺は $\int_0^t \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau d\tau$ をラプラス変換したものだとわかる。

$$F(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau d\tau\right] \ . \tag{12.23}$$

したがって、$F(s)$ のラプラス逆変換は

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \int_0^t \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau d\tau = \left[-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega\tau\right]_0^t = \frac{1-\cos\omega t}{\omega^2} \ . \tag{12.24}$$

12.3 ラプラス変換の微分・積分

$f(t)$ の微分・積分のラプラス変換の式と対応関係にある、**ラプラス変換の微分・積分**を与える式を紹介しておく。それぞれ**関数に t, $1/t$ をかけてからラプラス変換**したものになっているが、マイナス符号がついたり積分区間が特殊だったりと注意が必要である。

ラプラス変換の微分・積分

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s) \ , \qquad \mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma \tag{12.25}$$

(∵) ラプラス変換の定義式を s について微分・積分する式を書き、微分・積分の順序を交換すれば式 (12.25) が得られる。

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right] = \int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-st}dt = -\mathcal{L}[tf(t)] \tag{12.26}$$

$$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma = \int_s^\infty\left[\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}dt\right]d\sigma = \int_0^\infty\left[\int_s^\infty e^{-\sigma t}d\sigma\right]f(t)dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-st}dt = \mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] \tag{12.27}$$

例) $\mathcal{L}\left[t\sin(\omega t)\right]$ を求めてみよう。ラプラス変換の微分の式 (12.25) によれば、$\sin\omega t$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ について s 微分を取り -1 倍したものがそれに相当するので

$$\mathcal{L}\left[t\sin(\omega t)\right] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin\omega t] = -\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\ . \tag{12.28}$$

12.4 ラプラス変換と微分方程式

微分のラプラス変換の式を応用することで、微分方程式を機械的に解けるようになる。

例）初期値問題 $y' + 2y = 1,\ y(0) = 1$ を解く。

微分のラプラス変換 (12.12) に従うと、この微分方程式の両辺のラプラス変換は、それぞれ

$$\mathcal{L}[y' + 2y] = sY(s) - Y(0) + 2Y = (s+2)\,Y(s) - 1\ , \qquad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}\ . \tag{12.29}$$

ただし、定数のラプラス変換が $\mathcal{L}[C] = C/s$ となることを使った。この方程式を $y(t)$ のラプラス変換 $Y(s)$ について解くと

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}\ . \tag{12.30}$$

あとはこの式の逆ラプラス変換 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ を求めればよい。式 (12.30) のままだと扱いに困るので、この式を部分分数分解してみる。この式が $1/s$ と $1/(s+2)$ の線型結合で与えられるとすると

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+2} = \frac{(C_1+C_2)\,s + 2C_1}{s(s+2)} \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{12.31}$$

この式の両辺を比較すると $C_1 = 1/2, C_2 = 1/2$ でなければならないことが分かる。すなわち

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}\right) \tag{12.32}$$

したがって、$Y(s)$ の逆ラプラス変換は

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]\right) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2t}\right)\ . \tag{12.33}$$

ただし、指数関数のラプラス変換が $\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = 1/(s-\alpha)$ となることを用いた。

注）最終的に得られた解 (12.33) は、初期条件 $y(0) = 1$ を自動的に満たす。
以前の方法では、得られた一般解に初期条件を課すことで特定の解を得ていた。
その代わりに今回のラプラス変換を使った解法では、計算途中で出てきた $\mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0)$ の右辺の値を書き下すときに初期条件 $y(0) = 1$ を使っている。その結果として得られる解は、その初期条件を満たすようなものになっている。