第 2 回　一階常微分方程式の解法（積分因子）

[教科書 1.4 ∼ 1.5]
今回の内容：

- 復習：変数分離形の 1 階常微分方程式、自然現象のモデル化
- 完全微分型の微分方程式
- 積分因子の方法

2.1　変数分離形の常微分方程式

1 階常微分方程式を標準形に書き直したとき、右辺が $f(x)g(y)$ のように各々 x, y だけの関数の積で与えられるとき、x, y に依存する項を両辺に分離することで積分を実行できる。

$$\left(\frac{dy(x)}{dx} =\right) y' = f(x) \times g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \quad (C：\text{定数}) \tag{2.1}$$

2.2　自然現象のモデル化

自然現象の振る舞いを微分方程式で表現することを**自然現象のモデル化**と言い、それを解くことでその自然現象について予言を与えられる。その中から、変数分離法で解ける例を紹介する。

- **熱伝導**

  温度 T のある物体を温度 T_A の媒質に接触させる。この時、物体の温度変化の速さは、物体と媒質との間の温度差に比例することが知られている。これを式で書き表すと

  $$\frac{dT(t)}{dt} = -k\big(T(t) - T_A\big), \qquad T(0) = T_0 \tag{2.2}$$

  比例定数 k は物体の質量と比熱の積で与えられる。T_0 は時刻 $t = 0$ における初期温度。

  式 (2.2) は変数分離法で解ける。

  $$\begin{aligned} &\frac{dT(t)}{dt} = -k\big(T(t) - T_A\big) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dT}{T - T_A} = -kdt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dT}{T - T_A} = -k\int dt + C \\ \Leftrightarrow \quad &\log(T - T_A) = -kt + C \Leftrightarrow \quad T - T_A = e^{kt+C} = \tilde{C}e^{-kt} \quad (\tilde{C} \equiv e^{C}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

  ここで、初期条件 $T(t) = T_0$ を使うと、$\tilde{C} = T_0 - T_A$ と定まって

  $$T(t) = T_A + (T_0 - T_A)e^{-kt} \tag{2.4}$$

  となる。物体の温度は $T(0) = T_0$ からスタートして指数関数的に媒質の温度に緩和していく ($T(t) \xrightarrow{t\to\infty} T_A$)。

2.3 完全微分型の微分方程式

微分方程式の具体的な解法のもう一つの例として、**完全微分型**の微分方程式の解法を紹介する。

ある関数 $u(x,y)$ が連続な偏微分 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ を持つとき、$u(x,y)$ の**完全微分** (もしくは**全微分**) du は

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{2.5}$$

で与えられる。

$u(x,y)$ を地点 (x,y) における「高さ」だと思うことにすると、$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ はそれぞれ x, y 方向の勾配であり、du は距離 (dx, dy) だけ移動した地点における「高さ」の変化分である。

例）$u(x,y) = x + x^2y^3$ の場合

$$u(x,y) = x + x^2y^3 \quad \Rightarrow \quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \left(1 + 2xy^3\right)dx + 3x^2y^2dy\ . \tag{2.6}$$

微分方程式の中には、完全微分型に書き直すことで簡単に解けるものがある。上記の例については

$$\left(1 + 2xy^3\right)dx + 3x^2y^2dy = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \quad 1 + 2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0\right) \tag{2.7}$$

$$\Leftrightarrow \quad du = d\left(x + x^2y^3\right) = 0 \tag{2.8}$$

式 (2.8) は、関数 $u = x + x^2y^3$ の微分がゼロ、すなわち $u = x + x^2y^3$ が一定値を取ることを意味している。その一定値を C ととると

$$x + x^2y^3 = C \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{C - x}{x^2}\right)^{1/3} \quad (C: \text{定数})\ . \tag{2.9}$$

微分方程式が完全微分型となる条件

ある微分方程式

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\right) \tag{2.10}$$

が完全微分型 ($\exists u, du = Mdx + Ndy = 0$) となるための必要十分条件 (可積分条件) は

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}\ . \tag{2.11}$$

仮に、式 (2.10) が式 (2.5) のような完全微分の形で書けるとする。このとき、関数 $u(x,y)$ が存在して

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad \Leftrightarrow \quad M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.12}$$

を満たす。すると、連続な偏微分の性質 $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$ より

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}\ . \tag{2.13}$$

すなわち、式 (2.10) が完全微分 (2.5) の形で書き表せるためには、関数 $N(x,y), M(x,y)$ が式 (2.13) を満たすことが必要となる。実は、条件 (2.13) は式 (2.10) が完全微分の形で書けるための十分条件にもなっており、この式が満たされているかだけをチェックすればよいことになる。
例）次の微分方程式

$$x^3 + 3xy^2 + \left(3x^2y + y^3\right) y' = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(x^3 + 3xy^2\right) dx + \left(3x^2y + y^3\right) dy = 0 \tag{2.14}$$

が完全微分方程式として書けるかを確認し、解を具体的に求めるまでの手順を説明する。

1. **完全微分型であるか確認**

   もし式 (2.14) が完全微分型となるなら、関数 $u(x,y)$ が存在して

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &= \left(x^3 + 3xy^2\right) dx + \left(3x^2y + y^3\right) dy = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

   と書き表せる。このとき、偏微分の性質 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ が満たされなければならないが、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y + y^3\right) = 6xy \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + 3xy^2\right) = 6xy \tag{2.17}$$

   となり、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ が満たされていることを確認できる。したがって、式 (2.14) は完全微分方程式 $du = 0$ として書ける。

2. **関数 $u(x,y)$ を求める**

   関数 $u(x,y)$ を求めるには、式 (2.15) で定められる $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ の式を使えばよい。一方を積分することで $u(x,y)$ を積分定数込みの形で求め、もう一方の式を使って積分定数を定める。

   まず、$\frac{\partial u}{\partial x}$ を x について積分すると

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int \left(x^3 + 3xy^2\right) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + C(y)\ . \tag{2.18}$$

   この積分は y **が定数であるとみなして実行する**。そのため、**積分定数** $C(y)$ **も** y **の関数となる**ので注意が必要。

   次に、この式から得られる $\partial u/\partial y$ が、式 (2.14) で与えられる $\frac{\partial u}{\partial y}$ と等しくなることから

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + C(y)\right) = 3x^2y + \frac{dC(y)}{dy} = 3x^2y + y^3\ . \tag{2.19}$$

$$\therefore \quad \frac{dC(y)}{dy} = y^3 \quad \Leftrightarrow \quad C(y) = \frac{1}{4}y^4 + \tilde{C} \quad (\tilde{C}: \text{定数})\ . \tag{2.20}$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \tilde{C}\ . \tag{2.21}$$

3. **微分方程式 (2.14) の解を書き下す**

   式 (2.21) で与えられる $u(x,y)$ を用いれば、微分方程式 (2.14) を

$$\left(x^3 + 3xy^2\right) dx + \left(3x^2y + y^3\right) dy = du = 0 \tag{2.22}$$

   の形に書き換えられる。この式の解は $u = (\text{一定})$ で与えられるので、

$$u = (\text{一定}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = C \quad (C: \text{定数})\ . \tag{2.23}$$

   この式は、解 $y(x)$ を陰関数表示で与える式になっている。これが微分方程式 (2.14) の解になっていることは、この式の微分が方程式 (2.14) そのものになっていることで確認できる。

2.4 積分因子

微分方程式の中には、そのままでは完全微分型ではないものの、ある関数を書けることで完全微分型に直せるものが存在する。

例)

$$-y\,dx + x\,dy = 0 \tag{2.24}$$

この方程式が完全微分方程式 $du = 0$ で表せると仮定すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -1\ , \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = +1 \tag{2.26}$$

となり、可積分条件 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ が満たされない。したがって、方程式 (2.24) は完全微分型ではない。

ここで、方程式 (2.24) に**積分因子** $F(x,y) = 1/x^2$ をかけてから同じ操作を行ってみる。

$$-F(x,y)\,y\,dx + F(x,y)\,x\,dy = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{x}{x^2}dy = 0 \tag{2.27}$$

この方程式が完全微分方程式 $du = 0$ で表せると仮定すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{x^2}\ , \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} \tag{2.29}$$

となり、$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ が満たされるため、方程式 (2.27) は完全微分方程式として書き表せる。実際、以下のように解くことができる。

$$-\frac{y}{x^2}dx + \frac{x}{x^2}dy = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = C \quad (C: \text{定数})\ . \tag{2.30}$$

積分因子の求め方

積分因子 $F(x,y)$ は常に存在するとは限らず、存在する場合でも具体的に求めることが難しいことも多い。しかし、F が x または y だけに依存する場合は比較的簡単に求められる。

- **積分因子が x だけに依存する場合 ($F = F(x)$)**

  ある微分方程式

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\right) \tag{2.31}$$

  の全体に積分因子 $F(x)$ をかけた式

$$F(x)M(x,y)dx + F(x)N(x,y)dy = 0 \tag{2.32}$$

  が完全微分型 $du = 0$ になると仮定する。すると、$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ が満たされなければならないことから

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\big(F(x)M(x,y)\big) = F(x)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\big(F(x)N(x,y)\big) = F'(x)N(x,y) + F(x)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \tag{2.34}$$

$$\therefore \quad F(x)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = F'(x)N(x,y) + F(x)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\ . \tag{2.35}$$

  もし、**式 (2.35) の右辺が x だけの関数となるなら**、この式を x について積分することで積分因子 $F(x)$ を求めることができる。一般の微分方程式についてこうなる保証はないので、問題ごとにこの条件が満たされるか確認する必要がある。

- 積分因子が y だけに依存する場合 ($F = F(y)$)

$$F(y)M(x,y)dx + F(y)N(x,y)dy = 0 \tag{2.36}$$

が完全微分型 $du = 0$ になると仮定すると、先程と同様にして

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\big(F(y)M(x,y)\big) = F'(y)M(x,y) + F(y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\big(F(y)N(x,y)\big) = F(y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \tag{2.38}$$

$$\therefore \quad F'(y)M(x,y) + F(y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = F(y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F'(y)}{F(y)} = \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) . \tag{2.39}$$

もし、式 (2.39) の右辺が y だけの関数になるなら、この式を y について積分することで積分因子 $F(y)$ を求められる。

以下では、先程の例 (2.24) について積分因子 F を求める計算をやってみる。以上の式を公式として覚えるよりは、可積分条件 (2.11) を直接確認するほうが効率的である。

仮に、積分因子が $F(x)$ となると仮定すると

$$-F(x)ydx + F(x)xdy = 0 \tag{2.40}$$

について可積分条件をチェックすることで

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\big(-F(x)y\big) = -F(x) \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\big(F(x)x\big) = F'(x)x + F(x) \tag{2.42}$$

$$\therefore \quad -F(x) = F'(x)x + F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{2}{x} \tag{2.43}$$

この両辺を x について積分することで

$$\log F(x) = -2\log x + C = \log\left(\frac{1}{x^2}\right) + C \qquad \therefore \quad F(x) = \frac{\tilde{C}}{x^2} \quad (C, \tilde{C} : \text{定数}) . \tag{2.44}$$

$\tilde{C} = 1$ とすれば、式 (2.27) で用いた積分因子 $1/x^2$ が得られる。定数 $\tilde{C}$ を (非零の) 他の定数にセットしても問題ない。

なお、積分因子が $F(y)$ となると仮定してみると、式 (2.39) と同様の計算を行うことで

$$\frac{F'(y)}{F(y)} = \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{-y}\left(\frac{\partial\,(x)}{\partial x} - \frac{\partial\,(-y)}{\partial y}\right) = -\frac{2}{y} . \tag{2.45}$$

この右辺は y だけの関数になっているので、積分因子を $F(y) = 1/y^2$ などと求めることができる。こちらの積分因子を使っても、式 (2.30) と等価な解 ($\frac{y}{x} = (\text{定数})$) が得られる。