学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第10回 (12/16(月))

(1) 関数 $f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ の定義式を書け。

$$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

(2) 以下のラプラス変換を定義に従って求めよ。(d) を求める際には (b), (c) の結果を用いてよい。

(a) $\mathcal{L}[-1+3e^{2t}]$　(b) $\mathcal{L}[t]$　(c) $\mathcal{L}[t^3]$　(d) $\mathcal{L}[t-t^3]$

(a) $\mathcal{L}[-1+3e^{2t}] = \int_0^\infty (-1+3e^{2t})e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \left(-e^{-st}+3e^{(2-s)t}\right)dt$

$= \left[+\frac{1}{s}e^{-st} - \frac{3}{2-s}e^{(2-s)t}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s} - \frac{3}{2-s}$　（ただし $s>2$ が必要）

(b) $\mathcal{L}[t] = \int_0^\infty t\, e^{-st}\,dt = \left[t \times \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt$

$= 0 + \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = +\frac{1}{s^2}$

(c) $\mathcal{L}[t^3] = \int_0^\infty t^3 e^{-st}\,dt$

$= \left[t^3 \cdot \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty 3t^2 e^{-st}\,dt = 0 + \frac{3}{s}\int_0^\infty t^2 e^{-st}\,dt$

$= \frac{3}{s}\left(\left[t^2 \cdot \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty 2t\, e^{-st}\,dt\right) = 0 + \frac{3\cdot 2}{s^2}\int_0^\infty t\, e^{-st}\,dt$

$= \frac{3\cdot 2}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{6}{s^4}.$

もしくは

$\mathcal{L}[t^3] = \int_0^\infty t^3 e^{-st}\,dt$

$= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty t^2 e^{-st}\,dt = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\int_0^\infty t\, e^{-st}\,dt\right) = -\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\,dt\right)\right]$

$= -\frac{d^3}{ds^3}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\,dt}_{=\left(-\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = +\frac{1}{s}\right)} = -\frac{d^3}{ds^3}\frac{1}{s} = -\frac{d^2}{ds^2}\left(-\frac{1}{s^2}\right) = -\frac{d}{ds}\left(+\frac{2}{s^3}\right) = -\left(-\frac{2\cdot 3}{s^4}\right)$

$= +\frac{6}{s^4}.$

(d) $\mathcal{L}[-t+t^3] = -\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[t^3]$

$= -\frac{1}{s^2} + \frac{6}{s^4}$