学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第13回 (1/14(火))

問題を解くにあたり、次の結果は用いてよい。

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s},\quad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2},\quad \mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a},\quad \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

(1) ラプラス変換を用いて初期値問題 $y'' - 2y' = 3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ を解け。

$$\mathcal{L}[y''-2y'] = s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=1} - \underbrace{y'(0)}_{=-1} - 2(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=1}) = s^2Y(s) - s + 1 - 2sY(s) + 2 = (s^2-2s)Y(s) - s + 3.$$

$$\mathcal{L}[3] = \frac{3}{s}$$

$$\therefore\ (s^2-2s)Y(s) - s + 3 = \frac{3}{s} \iff Y(s) = \frac{1}{s(s-2)}\left(\frac{3}{s} + s - 3\right) = \frac{s^2-3s+3}{s^2(s-2)} \quad -(*)$$

(*)を部分分数分解すると

$$(*) = \frac{s^2-3s+3}{s^2(s-2)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_3}{s-2} = \frac{(c_1+c_3)s^2 + (-2c_1+c_2)s - 2c_2}{s^2(s-2)}$$

$$\therefore\ c_1 + c_3 = 1,\ -2c_1 + c_2 = -3,\ -2c_2 = 3 \iff c_1 = \frac{3}{4},\ c_2 = -\frac{3}{2},\ c_3 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{3}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-2}$$

$$\therefore\ y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = \underline{\frac{3}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}e^{2x}}$$

(2) ラプラス変換の定義に従って $\delta(t-a)$ (ただし $a > 0$ とする) のラプラス変換を求めよ。
その結果について $a \to 0$ とする極限を取ることで、$\delta(t)$ のラプラス変換を求めよ。

$$\mathcal{L}[\delta(x-a)] = \int_0^\infty \delta(x-a)e^{-sx}dx = e^{-sx}\Big|_{x=a} = \underline{e^{-as}}.$$

$$\mathcal{L}[\delta(x)] = \lim_{a\to 0} e^{-as} = e^0 = \underline{1}.$$

(3) ラプラス変換を用いて初期値問題 $y'' + 4y' + 8y = \delta(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ を $t \geq 0$ の範囲で解け。

$$\mathcal{L}[y''+4y'+8y] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 8Y(s) = (s^2+4s+8)Y(s)$$

$$\mathcal{L}[\delta(x)] = 1.$$

$$\therefore\ (s^2+4s+8)Y(s) = 1 \iff Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+8} = \frac{1}{(s+2)^2+4} = \frac{1}{(s+2)^2+2^2}.$$

ラプラス変換の第1移動定理 ($\mathcal{L}[e^{ax}f(x)] = F(s-a)$) より、

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2+2^2} = \underbrace{\frac{1}{s^2+2^2}}_{=\frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin(2x)]}\Bigg|_{s\to s-(-2)} = \mathcal{L}\left[e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\right].$$

$$\therefore\ y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \underline{\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x)}.$$