学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第7回 (11/25(月))

(1) $y(x)$ についての微分方程式 $y'' - y' - 2y = e^{-2x}$ の特解を求めよ。

特解の形を $y = ce^{-2x}$ (c:定数) と仮定する

元の微分方程式に代入すると

$$y'' - y' - 2y' = (ce^{-2x})'' - (ce^{-2x})' - 2ce^{-2x}$$
$$= 4ce^{-2x} + 2ce^{-2x} - 2ce^{-2x}$$
$$= 4ce^{-2x} = e^{-2x}$$

$\therefore c = \frac{1}{4} \Rightarrow$ 特解は $y(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}$.

(2) $y(x)$ についての微分方程式 $y'' - y' - 2y = 5\cos(x)$ の特解を求めよ。

特解の形を $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$ (c_1, c_2:定数) とおいて代入すると

$y' = (c_1\cos x + c_2\sin x)' = -c_1\sin x + c_2\cos x$, $y'' = -c_1\cos x - c_2\sin x$

$\Rightarrow y'' - y' - 2y = -c_1\cos x - c_2\sin x - (-c_1\sin x + c_2\cos x) - 2(c_1\cos x + c_2\sin x)$

$= (-c_1 - c_2 - 2c_1)\cos x + (-c_2 + c_1 - 2c_2)\sin x$

$= (-3c_1 - c_2)\cos x + (c_1 - 3c_2)\sin x = 5\cos x \Rightarrow \begin{cases} -3c_1 - c_2 = 5 \\ c_1 - 3c_2 = 0 \to c_1 = 3c_2 \end{cases}$

$\Rightarrow -3c_1 - c_2 = 5,\ c_1 - 3c_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -\frac{3}{2},\ c_2 = -\frac{1}{2} \longrightarrow \therefore y(x) = -\frac{1}{2}(3\cos x + \sin x)$

(3) $y(x)$ についての微分方程式 $y'' - y' - 2y = -4x^2$ の特解を求めよ。

特解を $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ ($c_{0,1,2}$:定数) として代入

$\Rightarrow -4x^2 = y'' - y' - 2y$

$= 2c_2 - (c_1 + 2c_2x) - 2(c_0 + c_1x + c_2x^2)$

$= -2c_2x^2 - 2(c_1 + c_2)x - 2c_0 - c_1 + 2c_2$

$\therefore -4 = -2c_2,\ c_1 + c_2 = 0,\ -2c_0 - c_1 + 2c_2 = 0$

$\therefore c_2 = 2,\ c_1 = -2,\ c_0 = \frac{1}{2}(-c_1 + 2c_2) = \frac{2+4}{2} = 3 \Rightarrow y(x) = 3 - 2x + 2x^2$.

(4) $y(x)$ についての斉次方程式 $y'' - y' - 2y = 0$ の一般解を求めよ。
その解を用いて非斉次方程式 $y'' - y' - 2y = e^{-2x}$ の一般解を求めよ。(1) の結果を用いてよい。

$y'' - y' - 2y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 - \lambda - 2\lambda = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \quad \therefore \lambda = -1, 2$

$\therefore$ 〃 の一般解は $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ (c_1, c_2:定数) —— (*)

$y'' - y' - 2y = e^{-2x}$ の一般解は、この方程式の特解 $y = \frac{1}{4}e^{-2x}$ と、斉次解 (*) を足し合わせることで得られる。

← (1) の結果より

$\therefore y(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} + c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ (c_1, c_2:定数)