学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第9回 (12/9(月))

(1) $y(x)$ の微分方程式 $y''' + 4y'' + y' - 6y = 0$ —(∗) の一般解を以下の手順で求めよ。

(a) 式 (∗) に対応する特性方程式 $(\lambda^3 + \cdots = 0)$ を立てる。

(b) 特性方程式を解いて λ の値を求める。

(c) 一般解 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}$　(C_1, C_2, C_3 : 定数) を書き下す。

$y''' + 4y'' + y' - 6y = 0 \rightarrow \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\lambda = 1$ は解なので、$(\lambda - 1)$ を因子に持つ。

$\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 5\lambda + 6)$

$= (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$

$\therefore \lambda = 1, -2, -3.$

よって、(∗) の一般解は　$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$.

(2) 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。手順は下記の通り。

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 5y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \left(\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right)$$

(a) 行列 $\mathbf{A}$ の固有値・固有ベクトルの組 $(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$, $(\lambda_2, \mathbf{v}_2)$ を求める。

(b) 一般解 $\mathbf{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} \mathbf{v}_2$　(C_1, C_2 : 定数) を書き下す。

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 1 \times (-2)$

$= \lambda^2 - 7\lambda + 12$

$= (\lambda - 4)(\lambda - 3) = 0 \quad \therefore \lambda = 3, 4$

$\lambda = 3 \Rightarrow (A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + v_2 \\ -2v_1 + 2v_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \therefore v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 4 \Rightarrow (A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_1 + v_2 \\ 〃 \end{pmatrix} = 0 \quad \therefore v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore y' = Ay$ の一般解は

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.