相対性理論　講義ノート

棚橋典大

2022 年度後期 月曜 2 限

第 1 回　導入

本講義では、主として特殊相対性理論について解説する。具体的な内容の説明に入る前の導入として、相対論の特徴や、相対論が提案される以前の物理学の状況などについて今回は解説する。なお、今回説明する各内容についてのより詳しい解説や導出は今後の講義でより詳細に行う。

1.1　相対性理論とは

アインシュタインが構築した相対性理論[1]としては、以下の 2 種類がある。

- **特殊相対性理論**：光と時間・空間についての理論。

  「任意の慣性系において物理法則は同じ」とする**特殊相対性原理**と、それから従う**光速度一定の原理**に基づいて構築される。

- **一般相対性理論**：重力の理論。

  「任意の座標系において物理法則は同じ」とする**一般相対性原理**に基づいて構築される。

1.2　特殊相対論の特徴と応用

1.2.1　特殊相対論における諸現象

- **光速度一定**：光の速さはどの慣性系で測定しても伝搬方向に依らず常に一定となる。
  - **1 m の定義**：光速が厳密に $c = 299,792,458$ m/s となるように 1 m の長さは定義される。すなわち、光が 1 秒間に伝搬する距離を 299,792,458 で割ったものが 1 m である。なお、1 秒の長さはセシウム原子時計を用いて別途定義されている。

- **運動する物体の時間の遅れ**：運動する系における時間は、静止系から見ると遅く進んで見える。
  - **「ウラシマ効果」**：ある静止系から出発した宇宙船が高速で飛行したのち出発点に帰ってきたとき、宇宙船内に乗っていた人の方が出発地にいた人よりも歳を取らないで済む。同じ効果により **GPS** に搭載された時計も遅く進むようになるため、正確な位置測定のためには補正が必要となる[2]。

[1] 短縮して**相対論**とも呼称される。

[2] ただし、地表よりも GPS 衛星の地点で重力場が弱いことによる時間の進み（一般相対論的効果）についても考慮する必要がある。

- **地表に飛来する宇宙線**：宇宙から飛来する宇宙線（陽子など）は、大気と衝突して二次宇宙線を生成し、最終的に上空約 10 km で**ミュー粒子**に変化して地表に飛来する。だいたい手のひらの大きさに 1 秒あたり 1 個程度飛んできている。

  静止しているミュー粒子は 2×10^{-6} s 程度で崩壊してしまうため、相対論的効果を考慮に入れなければ光速で飛んでも約 600 m/s 程度しか飛ばず、地表には届かないことになってしまう。相対論的効果を考慮に入れると、速度 v で飛ぶミュー粒子の寿命は $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍に伸びて見えるため、ミュー粒子が生成してから崩壊するまでに飛翔する距離も同じ倍率で伸び、地表にも到達することが可能となっている[3]。

- **ローレンツ収縮**：運動する系における長さは、静止系から見ると短く見える。
  - 先ほどのミュー粒子の飛翔距離の話をミュー粒子の静止系から見ると、大気の層が高速でミュー粒子に突っ込んでくることになる。その際、大気層の厚さはローレンツ収縮により $\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍に縮み、そのためにミュー粒子の寿命以内に大気層を貫通することが可能となっている。

- **エネルギーと質量の等価性：$\boldsymbol{E = mc^2}$**
  - **核反応における質量欠損**：核分裂、核融合などの核反応において放出されるエネルギー E は、反応後の質量欠損 m が源となっている。

- **物性における影響 / 相対論的質量**：（不正確な面もあり、注意が必要だが）速度 v で運動する粒子の質量は $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍に重くなったかのように解釈できる（相対論的質量）。原子番号の大きい原子における電子は光速に近い速度で運動するため、その質量は静止質量よりも重くなったかのように振る舞う。その結果として電子軌道が収縮するなどといった変化が生じ[4]、物質としての性質にも影響が生じる。多くの金属が銀色（可視光をすべて反射する）である一方で**金が黄色に発色すること**、また**水銀が常温で液体となること**などは相対論的効果が起源となっている。

- **特殊相対論の可視化**：特殊相対論は光と時間・空間の理論であり、その効果が顕著になるのは物体が光速に近い速度で運動していたり自身がそのような高速で運動している場合である。ここで、もし光速が日常的な運動の速さに近くなれば特殊相対性理論の効果を直接見ることができる。もちろん我々の世界ではなかなか実現しがたい状況だが、シミュレーションによって相対論的効果を再現することは可能であり、以下のような自分で実体験できるものもある。
  - **Captain Einstein**: ゲント大学を中心とするグループによって製作された、特殊相対論の効果を再現した VR ムービー。光の速度が自転車の速度くらい (時速約 20 km) だったら世界はどう見えるかを再現したもの。
    - ウェブサイト： http://captaineinstein.org/
    - 動画： https://www.youtube.com/watch?v=i6AouFHLb2g
    - 論文： https://arxiv.org/abs/1806.11085
  - **A Slower Speed of Light**: MIT Game Lab によって 2012 年に製作された、光速が遅くなると世界はどう見えるのかを体験できるゲーム。こちらは自分で自由に動き回れる。

---

[3] 例えば、ミュー粒子が速度 $v = 0.9999 \times c$ で飛んでいたとすると、寿命は $1/\sqrt{1-(v/c)^2} \sim 22$ 倍となり、崩壊するまでに飛行する距離もその倍率分長くなる。

[4] 例えば、水素のような原子の電子軌道の半径（ボーア半径）は $r = \frac{n^2\hbar^2\pi\epsilon_0}{m_e Z e^2}$ で与えられ、電子質量 m_e が増大すれば電子軌道 r は小さくなる。電子の速度は $\frac{v_e}{c} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c n}$ となり、原子番号 Z が大きい元素ほど v_e は大きくなる。参考：https://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_quantum_chemistry

* ウェブサイト[5]： http://gamelab.mit.edu/games/a-slower-speed-of-light/
* 動画： https://www.youtube.com/watch?v=uu7jA8EHi_0

注意点としては、これらのシミュレーションで見える現象すべてが相対論的効果によるものではない、という点が挙げられる。そのため、これらのシミュレーションから相対論についての正しい知見を得るためには若干の勉強が必要となる。

1.2.2 他分野との関係

相対論的効果を取り入れることで、物理学の各分野には以下のような影響が生じる。

- **電磁気学**：マクスウェル理論からは光速が定数として自然に導出される。この光速が、どの慣性系で測っても一定値となるためには相対論の導入が不可欠である。実際、そうしないと任意の慣性系で光速度一定という実験事実と合わなくなってしまう。
- **力学**：特殊相対論に基づいて作られる**相対論的力学**は、特に光速に近い速度で運動する物体の振る舞いを記述するのに必須となる。また、相対論的力学について粒子の速度が光速よりも十分に遅い極限 (**非相対論極限**) を取ることで**ニュートン力学**が再現される。
- **量子力学、素粒子論**：(非相対論的) 量子力学の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式 $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+V(\mathbf{x})\right)\psi$ では、時間 t と空間 x が同等に扱われておらず、特殊相対論と整合的でない。特殊相対論と整合的になる量子力学の基礎方程式として、スピン 0 のボソン粒子を記述するクライン・ゴルドン方程式 $\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\boldsymbol{\nabla}^2-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0$ や、電子をはじめとするスピン 1/2 のディラック粒子を記述するディラック方程式 $(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\,\psi=0$ が考案された。場の量子論をはじめとする素粒子理論も、多くの場合は特殊相対論と合致するように作られている。
- **天文学、宇宙論**：高エネルギーを持ち光速に近い速度で運動する粒子や流体は、宇宙空間における種々の天体現象においてしばしば見られる。それらの物理的振る舞いの理解には特殊相対論が不可欠となる。また、重力の理論である一般相対論を用いるとブラックホールや重力波、また宇宙の加速膨張現象などといった宇宙そのものの時間発展についても調べられるようになる。

1.3 相対性理論以前の物理学

相対性理論の特徴を理解するためには、相対性理論が作られる以前の物理学がどのようなものだったかを理解する必要がある。以下ではそれらのうち相対性理論と関係するものについて簡単に解説する。

- ニュートン力学

  $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ の位置にあり、力 $\mathbf{F}$ を受けて運動する質量 m の点粒子についてのニュートンの運動方程式は

  $$m\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2}=\mathbf{F} \tag{1.1}$$

  で与えられる。ただし、太字は 3 次元ベクトル ($\mathbf{x}=(x,y,z)$ など)。

[5] 2022 年現在のウェブサイトで配布されている windows 版プログラムは、少なくとも筆者のパソコンでは正しく画面表示されない。正しく動作する過去のバージョンを Internet Archive からダウンロードすることは一応可能。過去のウェブサイトへのリンクはこちら。

この方程式は、元の系 O から一定速度 $\mathbf{V}$ で移動する系 O' へのガリレイ変換 $(t, \mathbf{x}) \to (t', \mathbf{x}')$:

$$t' = t, \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t \tag{1.2}$$

に対して不変である。どの慣性系から見てもニュートン力学の法則は同じ、ということに対応している。なお、粒子（や波動）の速度 $\mathbf{v}$ は、O' 系で見ると $\mathbf{V}$ だけずれて見える：

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \tag{1.3}$$

ガリレイ変換 (1.2) において、時刻 t は変換前後で変化しないと仮定されている。**絶対時間 t** と呼ばれる基準となる時刻が存在して、どの速度の慣性系に移ったとしても時刻は共通の t で与えられて変化しない、という仮定である。私たちの日常の感覚に合った「自然」な仮定ではあるが、相対性理論ではこの仮定が修正される。

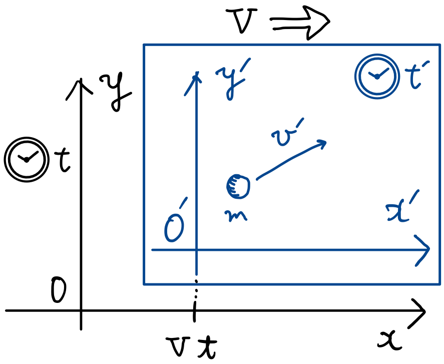

図 1: ある慣性系 O に対して速度 $\mathbf{V}$ で運動する慣性系 O'.

- **電磁気学**

  マクスウェルにより、光は電磁波であることが示された。また、電場 $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$, 磁場 $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ が従う**マクスウェル方程式**

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \qquad \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.4}$$

  も相対論以前に導出されていた。ただし、$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\rho(t, \mathbf{x}), \mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ は電荷・電流密度、ϵ_0, μ_0 は真空の誘電率・透磁率である。

  光が電磁波そのものであること、また**マクスウェル方程式から光速 c が導出される**ことも知られていた（後述）。また、音波が媒質である空気の振動であるように、電磁波は**エーテルと呼ばれる媒質**の振動であると考えられていた。

  ガリレイ変換 (1.2) に従うと、ある系 O における光速が $\mathbf{c}$（どの方向にも一定速度 c）だった時、速度 $\mathbf{V}$ で運動する系 O' から見た光速は

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{V} \tag{1.5}$$

  と変化する。光速がどの方向にも一定速度 $\mathbf{c}$ となるような特別な慣性系 (= 光の媒質であるエーテルの静止系) が存在し、それ以外の慣性系では光速は $\mathbf{c}$ からずれる、と考えられた。

  その光速のずれを検出するための実験[6]も行われた。しかし、実際にずれが検出されることはなく、そのためのつじつま合わせの理論[7]が考案された。

[6]マイケルソン・モーリーの実験等。
[7]エーテルに対して相対的に運動しているとローレンツ収縮が起こる、等。

1.4　マクスウェル方程式と光速

1.4.1　光速の導出

真空中 ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) のマクスウェル方程式 (1.4) から光速（電磁波の伝搬速度）を導出してみよう。式 (1.4) の第 2 式について $\mathrm{rot} = \boldsymbol{\nabla}\times$ を作用させると

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}\underbrace{(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})}_{=0} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E} \quad = \quad \boldsymbol{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

$$\therefore \qquad \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2\right)\mathbf{E} = 0 \qquad \left(c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\right) \tag{1.7}$$

磁場 $\mathbf{B}$ についても (1.7) と同様の式を導出できるし、$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ のどちらかが決まればもう一方はマクスウェル方程式に従って定められる。式 (1.7) 中に現れる c は、電磁場の性質を定めている**真空の誘電率 ϵ_0 と透磁率 μ_0** が決まれば自動的に定まる定数である。

式 (1.7) は**電場 $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ についての波動方程式**である。簡単のため、x 方向に伝搬する平面波を考えることにして、電場の独立な成分を $E = E(t, x)$ と表す。この場合、式 (1.7) の一般解は

$$0 = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2\right)E(t,x) = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E(t,x) = -\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)E(t,x) \tag{1.8}$$

$$\Rightarrow \qquad E(t,x) = E_1(ct + x) + E_2(ct - x)\ . \tag{1.9}$$

ただし、$E_1(ct + x), E_2(ct - x)$ はそれぞれ $ct + x, ct - x$ の任意関数。

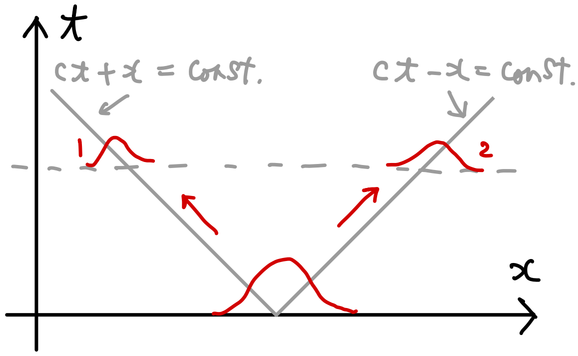

図 2: 波動方程式 (1.8) の一般解 (1.9)。初期位置から左右方向に速度 c で伝搬する波動（電磁波）を表す。式 (1.9) の $E_1(ct + x)$ が左方向、$E_2(ct - x)$ が右方向に伝搬する波に対応する。

一般解 (1.9) のうち、$E_1(ct + x)$, $E_2(ct - x)$ はそれぞれ平面 $ct + x = (\text{一定})$, $ct - x = (\text{一定})$ で決まる平面上で一定値を取る。従って、E_1, E_2 はそれぞれ左右 (x 軸の負/正の方向) に速度 c で伝搬する波動を表すことが分かる。光は電磁波そのものであるので、光速は $c = \left(\epsilon_0\mu_0\right)^{-1/2}$ となることが示されたことになる。

1.4.2　導出された c の解釈

さてここで、前節で導出された光速 c は**どの観測者にとっての光速か**ということが問題になる。

ある慣性系 O で光速 c を実験的に測定したとしよう。1.3 節で説明した通り、速度 $\mathbf{V}$ で運動する別の慣性系 O' で同じ光について光速 c' を測定すれば、ガリレイ変換 (1.2) に基づいて計算した式 (1.5) の通り $\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{V}$ となる。元の系で測定した光速 $\mathbf{c}$ からずれるほか、慣性系の運動の方向に対して

どの向きに光が伝搬するかに応じて伝搬速度が変化する事も予言される。逆に言うと、光速 c がどの伝搬方向についても一定となるような特別な慣性系が存在することになる。

1.3 節でも説明したが、相対性理論が提案されるまではおおよそ以下のような描像が考えられていた。空気中の音波と同様である。

- **エーテル**という媒質が宇宙を満たしている。
- 電磁波はエーテルの弾性波である。
- エーテルに対して静止している慣性系（エーテルの静止系）では、電磁波の伝搬速度 (=光速) はどの向きについてもマクスウェル方程式から導出される $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ となる。すなわち、**マクスウェル方程式 (1.4) はエーテルの静止系で成立する。**
- エーテルに対して相対的に運動している慣性系では、光速は c からずれる。逆に、光速の変化を精密に測定することで、エーテルの流速を測定できる。

実際の実験結果は**観測者の運動状態に依らず光速は常に一定**というもので、上記の描像とは合わない。素のつじつまを合わせるために、エーテルに対して相対速度を持っている物体は収縮するという**ローレンツ収縮**の仮説が提案された。一方、アインシュタイン自身は全く別の仮定から特殊相対性理論を構築し、その帰結の一つとして同じ結果、すなわちローレンツ収縮が起こることを示した。次回以降の講義で、これらの点について解説を進めていく。