

第12回 相対論的電磁気学

12.1 これまでの経緯と今回の目標

これまでの講義で、粒子や波動の相対論における運動方程式やそれに基づいて予言される諸現象について説明してきた。電磁場のふるまいを記述する（真空中の）マクスウェル方程式⁵⁸

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (12.1)$$

（ただし、 ϵ_0, μ_0 は真空の誘電率・透磁率で、 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ を満たす）についても、相対論と整合的になっているかを検証し、もしなっていないのであれば何らかの修正を施す必要が生じる。

ここで、相対論で使われるローレンツ変換は、マクスウェル方程式から得られる光速度が一定のままとなることを要請して作られたという経緯があった。そのため、（少なくとも光速に關与する部分について）マクスウェル方程式はローレンツ変換に対して不変なのは、という期待が持てる⁵⁹。一方、図45のような思考実験を考えると、静止系における静磁場を運動系から見たときには、時間変化する磁場と誘導電場が生じるように見える。すなわち、運動によって電場・磁場は相互に変換することが示唆される。

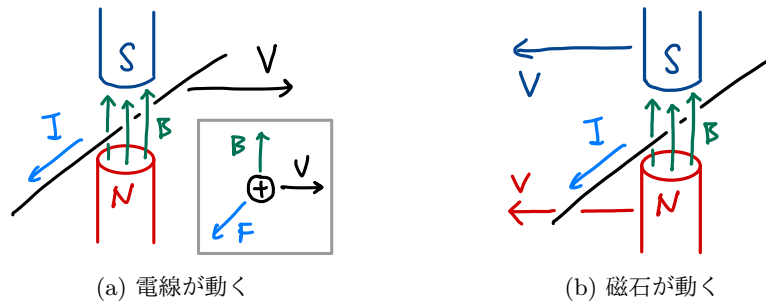


図 45: 第3回の講義でも紹介した、アインシュタインの特殊相対性理論の論文冒頭で紹介されている思考実験。(a) 静磁場中を電線が動く場合と (b) 電線が静止している代わりに磁石が逆向きに動く場合とで、電線にかかる起電力は同一である。

結論としては、マクスウェル方程式(12.1)にローレンツ変換を施した際に電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{B} が

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E}\right), \end{aligned} \quad (12.3)$$

と変換すると仮定すれば、マクスウェル方程式の形は変化しない。すなわち、電場・磁場の変換則さえ適切に設定すれば、マクスウェル方程式はそのままの形で相対論的な（特殊相対性原理を満たす）方程式となっている。なお、この際に電荷密度 ρ 、電流 \mathbf{j} も適切に変換（後述）する必要がある。今回の講義では、この結論に至るまでの導出について解説する。

⁵⁸ $\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ 等の表記法を用いる。また、これまでと同様に $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ 。

⁵⁹ 第2回の講義ノートでも見た通り、マクスウェル方程式を組み合わせることで電場・磁場の満たす波動方程式

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right) \mathbf{E} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{E} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{B} = 0 \quad (12.2)$$

が導出され、その解は光速で伝搬する波動 ($\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{V}t)$, $|\mathbf{V}| = c$ など) となる。ただし、 $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ は3次元空間におけるラプラシアンである。この波動方程式に現れる微分演算子 $\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ はローレンツ変換で変化しないスカラーとして振る舞うことが示せるが、この性質により光速がローレンツ変換で不変となっている。なお、 \mathbf{E}, \mathbf{B} はローレンツ変換で互いに混合するのだが、変換後の方程式の線型結合を適切にとることで再び式(12.2)の形に戻すことができるため、結局ローレンツ変換前後で全く同じ形の方程式が成立する。

12.2 マクスウェル方程式の4次元表記

マクスウェル方程式 (12.1) は3次元ベクトル \mathbf{E}, \mathbf{B} を用いて記述されているため、相対論における4次元的な取り扱いが難しい。そこで、マクスウェル方程式を整理して4次元的な量 (4次元ベクトルとその微分) で書き直すことを試みる。このためには、スカラー・ベクトルポテンシャル ϕ, \mathbf{A} を用いて式を書きなおすことが有用となる。電磁気学の復習も兼ねて以下で議論する。

12.2.1 マクスウェル方程式の第1, 2式

まず、マクスウェル方程式 (12.1) の第1, 2式に注目する。第1式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は、磁場 \mathbf{B} がある3次元ベクトル \mathbf{A} の回転 (rot) で表せることを示唆する⁶⁰:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (12.4)$$

これをマクスウェル方程式の第2式に代入して整理すると

$$0 = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\nabla \phi . \quad (12.5)$$

ここで、rot を取って消えるベクトルはスカラー関数 ϕ の勾配 $\nabla \phi$ で表せるという性質を用いた。最右辺にマイナス符号をつけたのは単に慣習のため。以上の式から、電場・磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} をスカラー・ベクトルポテンシャル ϕ, \mathbf{A} によって

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A} , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (12.6)$$

と表せることが分かった。逆に、これらの表式を代入すればマクスウェル方程式 (12.1) の第1, 2式は自明に満たされる。

12.2.2 マクスウェル方程式の第3, 4式

マクスウェル方程式 (12.1) に含まれる残りの方程式についても順次見ていく。まず、第3式は

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}) = c \nabla \cdot \left[\nabla \left(-\frac{\phi}{c} \right) - \frac{\partial}{c \partial t} \mathbf{A} \right] \quad (12.7)$$

と書ける。式変形の仕方がやや恣意的だが、その意図は以下ですぐに説明する。同様に、第4式は

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{j} &= \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2} \partial_t (-\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}) \\ &= \frac{\partial}{c \partial t} \left[-\nabla \left(-\frac{\phi}{c} \right) + \frac{\partial}{c \partial t} \mathbf{A} \right] + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} . \end{aligned} \quad (12.8)$$

ただし、ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}$ を使った。このままだと若干見通しがよくないので、空間成分の添字 $i, j = 1, 2, 3$ を用いてテンソル表記で書き直すと

$$\begin{aligned} \mu_0 j_i &= \partial_0 \left[-\partial_i \left(-\frac{\phi}{c} \right) + \partial_0 A_i \right] + \partial_i \partial^j A_j - \partial^j \partial_j A_i \\ &= \partial_0 \left[\partial_0 A_i - \partial_i \left(-\frac{\phi}{c} \right) \right] + \partial^j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) . \end{aligned} \quad (12.9)$$

ただし $\partial^j = \partial_j = \partial / \partial x^j$ で、また $\frac{\partial}{c \partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0} = \partial_0$ と書き換えた。

⁶⁰第2式についての $\nabla \times \mathcal{E} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \nabla^3 \Phi$ も含めて、ポアンカレの補題から従う性質である。

- 4元ベクトルポテンシャル A_μ : マクスウェル方程式の第3式 (12.7) と第4式 (12.9) は、以下のように書き換えると互いに似た構造を持つことに気づく。まず、天り下り的ではあるが、4元ベクトルポテンシャル A_μ を

$$-\frac{\phi}{c} \equiv A_0, \quad A_\mu \equiv \left(-\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right) \Leftrightarrow A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right) \quad (12.10)$$

と定義する。これを用いて、テンソル表記で式 (12.7), (12.9) を改めて書き直す

$$\text{式 (12.7)} \Rightarrow \frac{\rho}{c\epsilon_0} = \partial^i (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i), \quad (12.11)$$

$$\begin{aligned} \text{式 (12.9)} \Rightarrow \mu_0 j_i &= \partial_0 (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) + \partial^j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\ &= -\partial^0 (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) - \partial^j (\partial_j A_i - \partial_i A_j). \end{aligned} \quad (12.12)$$

ただし、 $\partial^0 = \eta^{0\mu} \partial_\mu = \eta^{00} \partial_0 = -\partial_0$ となることを使った。

- 電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$: 式 (12.11), (12.12) には $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ のような量が繰り返し現れるのが見て取れるが、この特徴に基づいて電磁場テンソルと呼ばれる2階テンソルを

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (12.13)$$

と定義する。この定義からして $F_{\mu\nu}$ は反対称テンソルとなる。すなわち、

$$F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}, \quad F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0. \quad (12.14)$$

すると、まず式 (12.11) は

$$\frac{\rho}{c\epsilon_0} = \partial^i F_{i0} = \partial^\mu F_{\mu 0}. \quad (12.15)$$

ただし、 $F_{00} = 0$ となることを使った。同様に、式 (12.12) は

$$-\mu_0 j_i = \partial^\mu F_{\mu i}. \quad (12.16)$$

- マクスウェル方程式の4次元表記: 式 (12.15), (12.16) は、 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ より $\frac{1}{c\epsilon_0} = \frac{\mu_0}{c\epsilon_0 \mu_0} = c\mu_0$ となることを使うと、以下のように一本のテンソル式にまとめることができる:

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 j_\mu. \quad (12.17)$$

ただし、この式の右辺に出てくる j^μ は以下のように定義される4元電流ベクトルである:

$$j_\mu = (-\rho c, \mathbf{j}) \Leftrightarrow j^\mu = \eta^{\mu\nu} j_\nu = (\rho c, \mathbf{j}). \quad (12.18)$$

式 (12.17) の $\mu = 0$ 成分が式 (12.15), $\mu = i$ 成分が式 (12.16) である。

以上より、マクスウェル方程式をスカラー・ベクトルポテンシャル ϕ, \mathbf{A} で表したものはただ一本の方程式 (12.17) として与えられることが分かった。また、式 (12.17) は4次元的なテンソル量で書かれているため、特殊相対論におけるマクスウェル方程式と呼んでも差し支えないものとなっている。ただし、現段階においては式 (12.17) は単に通常のマクスウェル方程式を $A_\mu, F_{\mu\nu}$ を使って書き換えたものに過ぎない。

12.2.3 マクスウェル方程式の共変性

$A_\mu, F_{\mu\nu}$ を使って書き換えたマクスウェル方程式 (12.17) が共变的となり特殊相対性原理を満たすためには、 $\mathbf{A}_\mu, \mathbf{j}_\mu$ が4元ベクトルとして振る舞うことを要請する必要がある。すなわち、

$$A'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu, \quad j'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu j_\nu \quad (12.19)$$

を仮定しなければならない。この仮定をおくと、共変ベクトル ∂_μ, A_μ で作られている電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ は2階共変テンソルとなる。また、式 (12.17) はテンソル量だけで作られた方程式となるため、自動的に共变的な方程式となる:

$$\partial^\nu F'_{\nu\mu} = -\mu_0 j'_\mu = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \partial^\nu F_{\nu\rho} = -(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \mu_0 j_\rho \Leftrightarrow \partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 j_\mu. \quad (12.20)$$

12.3 電磁場のローレンツ変換

以上ではマクスウェル方程式の具体的な表式だけを見て議論し、その結果として $A_\mu, F_{\mu\nu}$ がテンソルとして振る舞えばマクスウェル方程式が共変的となることを見た。本節では、この仮定の物理的な意味について解説する。特に、電場・磁場がローレンツ変換でどのように変化するかについて調べる。

12.3.1 $F_{\mu\nu}$ の成分

電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の定義は式 (12.13) の通りなのだが、このままでは物理的な意味が見て取りづらい。そこで、 $F_{\mu\nu}$ の成分を具体的に書き下してみる。 $F_{\mu\nu}$ が反対称テンソルであることから、 $(\mu, \nu) = (0, i), (i, j)$ (ただし、 $i, j = 1, 2, 3$ は空間成分の添字) の2通りについて考えれば十分である。以下で個別に見ていく。

- $(\mu, \nu) = (0, i)$: 以下の通り、 F_{0i} は電場 E_i を与える。

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \frac{\partial}{c \partial t} A_i - \partial_i \left(-\frac{\phi}{c} \right) = -\frac{1}{c} \left(-\frac{\partial}{\partial t} A_i - \partial_i \phi \right) = -\frac{E_i}{c}. \quad (12.21)$$

- $(\mu, \nu) = (i, j)$: F_{ij} は磁場 B_k を与える。ただし、 k は ij 面に直行する方向 ($(i$ 軸) \times (j 軸) という外積で作られるベクトルが向いている方向) の添字。

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = (\nabla \times \mathbf{A})_k = B_k. \quad (12.22)$$

添字 i, j, k に具体的な値を入れた場合の表式は以下の通り。

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = (\nabla \times \mathbf{A})_3 = B_3, \quad F_{23} = B_1, \quad F_{31} = B_2. \quad (12.23)$$

$F_{\mu\nu}$ の反対称性から、以上の表式で添字を入れ替えたものは符号を反転した表式で与えられる (例: $F_{i0} = +E_i/c$) ほか、対角成分 (F_{00} など) はゼロとなる。したがって、 $F_{\mu\nu}$ の成分を行列表示すると

$$F_{\mu\nu} = \begin{matrix} & \overset{\nu=0}{\underbrace{\quad}} & \overset{1}{\underbrace{\quad}} & \overset{2}{\underbrace{\quad}} & \overset{3}{\underbrace{\quad}} \\ \begin{matrix} \mu=0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (12.24)$$

この通り、電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の成分は電場・磁場そのものである。3次元ベクトルである電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{B} を1つのテンソル $F_{\mu\nu}$ として表しなおしたもの、と思ってもよい。実際、4次元時空における2階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ の独立な成分の個数は6で、これは電場・磁場の成分数である6と一致している。

12.3.2 $F_{\mu\nu}$ のローレンツ変換

$F_{\mu\nu}$ は共変テンソルとして振る舞うので、別の慣性系における成分 $F'_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}$ をローレンツ変換すれば得られる。ここで、式 (12.24) のとおり $F_{\mu\nu}$ の成分は電場・磁場なので、 $F_{\mu\nu}$ をローレンツ変換したものの表式を書き下せば電場・磁場のローレンツ変換則を明らかにできる。これを以下で見てみる。

静止系における $F_{\mu\nu}$ を x 軸方向に速度 V で運動する運動系から見た際の成分 $F'_{\mu\nu}$ は

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu F_{\alpha\beta} = (\Lambda^{-1,T})_\mu{}^\alpha F_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \quad (12.25)$$

と表せる。ただし、 $(\Lambda^{-1,T})_{\mu}^{\alpha}$ は $(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\mu}$ の転置行列である。ただし、 $(\Lambda^{-1,T})_{\mu}^{\alpha}$ は対称行列なので、転置しても成分の値自体は変わらない。以上を踏まえて式 (12.25) を行列表示すると

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1,T})_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\nu} \quad (12.26)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & \vdots & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & \vdots & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad (12.27)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma\beta E_1/c & -\gamma E_1/c & \gamma(-\frac{E_2}{c} + \beta B_3) & \gamma(-\frac{E_3}{c} - \beta B_2) \\ \gamma E_1/c & -\gamma\beta E_1/c & \gamma(-\beta\frac{E_2}{c} + B_3) & \gamma(-\beta\frac{E_3}{c} - B_2) \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & \vdots & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad (12.28)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & F_{01}=-F_{10} & F_{02}=-F_{20} & F_{03}=-F_{30} \\ \gamma^2(1-\beta^2)E_1/c & 0 & F_{12}=-F_{21} & F_{13}=-F_{31} \\ \gamma(\frac{E_2}{c} - \beta B_3) & \gamma(\beta\frac{E_2}{c} - B_3) & 0 & F_{23}=-F_{32} \\ \gamma(\frac{E_3}{c} + \beta B_2) & \gamma(\beta\frac{E_3}{c} + B_2) & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E'_1}{c} & -\frac{E'_2}{c} & -\frac{E'_3}{c} \\ \frac{E'_1}{c} & 0 & B'_3 & -B'_2 \\ \frac{E'_1}{c} & -B'_3 & 0 & B'_1 \\ \frac{E'_1}{c} & B'_2 & -B'_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.29)$$

式 (12.29) で、行列の右上部分は左下部分の各成分の符号を反転したもので与えられるので省略した。この式から、電磁場の変換則は以下で与えられることが分かる⁶¹：

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta c B_3), & E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta c B_2), \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \gamma\left(B_2 + \frac{\beta}{c} E_3\right), & B'_3 &= \gamma\left(B_3 - \frac{\beta}{c} E_2\right). \end{aligned} \quad (12.30)$$

以上を少しだけまとめて書いたのが

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E}\right). \quad (12.31)$$

ただし、 $\mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{B}_{\parallel}, \mathbf{E}_{\perp}, \mathbf{B}_{\perp}$ はそれぞれ \mathbf{E}, \mathbf{B} の速度 \mathbf{V} に平行・垂直な成分。以上より、式 (12.30) ないし (12.31) に従ってローレンツ変換により電場・磁場は混合することが示された⁶²。

例えば、図 45a のように静磁場 \mathbf{B} がある場合、これを運動系から眺めれば式 (12.31) の \mathbf{E}_{\perp} の式に従って電場 $\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{V} \times \mathbf{B}$ が生じる (図 45b)。静止系においては静磁場による電線中の電子についてのローレンツ力が、運動系においては電場 \mathbf{E}'_{\perp} による起電力が、電線中に流れる電流の起源となっている。

12.4 4元電流ベクトル j^{μ} のローレンツ変換

4元電流ベクトルの定義は式 (12.18) で与えた通り $j^{\mu} = (\rho c, \mathbf{j})$ なのだが、この式の意味について少し解説を加えておく。電流がゼロではない ($\mathbf{j} \neq 0$) とき、電荷の流速と同じ速度で運動する慣性系 (これを運動系 O' とする) からその電流を見れば電荷が静止しているように見える。この運動系 O' における4元電流ベクトル j'^{μ} の成分は

$$j'^{\mu} = (\rho_0 c, \mathbf{0}). \quad (12.32)$$

⁶¹今回は式 (12.30) の変換則を $F_{\mu\nu}$ にローレンツ変換をかけることで求めたが、同じ変換則を4元ベクトルポテンシャルの変換則 (12.19) と \mathbf{E}, \mathbf{B} の定義式 (12.19) から導出することももちろん可能である。前者のやり方の方が計算が少しだけ楽なので今回はそちらの方法を使って説明した。

⁶²電場・磁場が式 (12.31) のように変換すると仮定すれば、 \mathbf{E}, \mathbf{B} で書かれた元の形のマクスウェル方程式 (12.1) がローレンツ変換前後で同じ形をとる (共変性を持つ) ことを示せる。ただ、 ∂_t, ∇ がローレンツ変換でどのように変化するかについての計算などが複雑になるので、マクスウェル方程式の共変性を示すには $F_{\mu\nu}$ を用いて書かれた方程式について式 (12.20) のような解析をやる方がシンプルで済む。

ただし、 ρ_0 は電荷が静止している状態で測った電荷密度（静止電荷密度）である。一方、電荷が x 軸方向に速度 V で運動している場合の j^μ は、 j'^μ にローレンツ変換をかけることで得られる：

$$j^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu j'^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & | & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \\ \hline & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\rho_0 c \\ \gamma\rho_0 c\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12.33)$$

$\beta = V/c$ であることに注意すると、結局

$$\underbrace{j^\mu}_{=(\rho c, \mathbf{j})} = \rho_0 \gamma (c, \mathbf{V}) = \rho_0 u^\mu \quad (12.34)$$

と書けることがわかる。ただし、 u^μ は電荷の 4 元速度 $u^\mu = \gamma (c, \mathbf{V})$ である⁶³。

式 (12.34) は、電荷 ρ 、電流 \mathbf{j} が一般に

$$\rho = \gamma\rho_0, \quad \mathbf{j} = \gamma\rho_0 \mathbf{V} \quad (12.35)$$

と与えられることを示している。電荷が運動している場合にはローレンツ収縮により電荷密度が静止時の値 ρ_0 と比べて γ 倍に増大し、電流 \mathbf{j} は増大した電荷密度 $\gamma\rho_0$ が速度 \mathbf{V} で運動しているという式 ($\mathbf{j} = \gamma\rho_0 \mathbf{V}$) で与えられる、というのがこの式の物理的な解釈である。

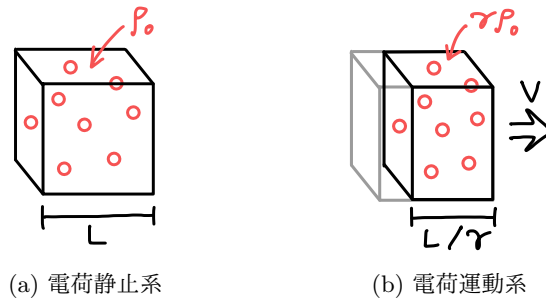


図 46: (a) 電荷静止系で密度 ρ_0 の電荷分布を見たもの。(b) 同じ電荷分布を電荷が速度 \mathbf{V} で運動して見える慣性系で見たもの。電荷の分布領域の進行方向の長さが $1/\gamma$ 倍にローレンツ収縮する分、電荷密度は $\gamma\rho_0$ に増大する。この電荷密度が速度 \mathbf{V} で運動するので電流は $\mathbf{j} = \gamma\rho_0 \mathbf{V}$ となる。

12.5 $F_{\mu\nu}$ で表したマクスウェル方程式

式 (12.24) で与えた電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の具体的表式を踏まえて、改めてマクスウェル方程式 (12.1) が $F_{\mu\nu}$ を用いてどのように表されるかを見ておく。

- マクスウェル方程式の第 3, 4 式: 式 (12.17) は $F_{\mu\nu}$ の発散として表されている。実際、式 (12.24) について発散 $\partial^\mu F_{\mu\nu}$ を取ると、マクスウェル方程式 (12.1) の第 3, 4 式の左辺に比例する式が得られる。例として、 $\partial^\mu F_{\mu\nu}$ の $\nu = 0, 1$ の成分をそれぞれ計算すると

$$\partial^\mu F_{\mu 0} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu 0} = -\partial_0 \underbrace{F_{00}}_{=0} + \partial_i \underbrace{F_{i0}}_{=-E_i/c} = -\frac{1}{c} \partial_i E_i = -\frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (12.36)$$

⁶³ j^μ の表式 (12.34) は、電流を構成する成分が全て同じ速度 \mathbf{V} を持つ場合だけ有効である。式 (12.35) についても同様。複数の異なる速度を持った成分がある場合の j^μ は、各成分ごとの j^μ (12.34) の線型結合で与えられる。

$$\begin{aligned}
\partial^\mu F_{\mu 1} &= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu 1} = -\partial_0 \underbrace{F_{01}}_{=-E_1/c} + \partial_1 \underbrace{F_{11}}_{=0} + \partial_2 \underbrace{F_{21}}_{=-B_3} + \partial_3 \underbrace{F_{31}}_{=B_2} \\
&= \frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_1}{c} + \underbrace{-\partial_2 B_3 + \partial_3 B_2}_{=-(\nabla \times \mathbf{B})_1} = - \left[(\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} \right]_1 . \quad (12.37)
\end{aligned}$$

式 (12.37) の右辺は、 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ を使うとマクスウェル方程式 (12.1) の第 4 式 $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}]$ に比例することが分かる。 $\nu = 2, 3$ についての方程式も同様に計算できる。

- マクスウェル方程式の第 1, 2 式: マクスウェル方程式 (12.1) の第 1, 2 式に相当するものは式 (12.17) からは出てこない。12.2.1 節でも説明した通り、第 1, 2 式は電場・磁場をポテンシャル ϕ, \mathbf{A} で表す式を代入すると自動的に満たされてしまうので特に考えなくても良いのだが、一応 $F_{\mu\nu}$ を使ってこれらを表す式を書くこともできるので紹介しておく。

天下りのだが、以下の式を考えてみる⁶⁴ :

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 . \quad (12.38)$$

左辺の各項は $\partial_\mu F_{\nu\rho}$ の添字を巡回置換したものである。 $(\mu\nu\rho) = (012), (123)$ の場合にこの式がどのような式になるかを見てみよう。まず、 $(\mu\nu\rho) = (012)$ の場合は

$$0 = \partial_0 \underbrace{F_{12}}_{=B_3} + \partial_1 \underbrace{F_{20}}_{=E_2/c} + \partial_2 \underbrace{F_{01}}_{=-E_1/c} = \frac{\partial}{c \partial t} B_3 + \frac{1}{c} (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) = \frac{1}{c} [\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E}]_3 . \quad (12.39)$$

同様に、 $(\mu\nu\rho) = (123)$ の場合は

$$0 = \partial_1 \underbrace{F_{23}}_{=B_1} + \partial_2 \underbrace{F_{31}}_{=B_2} + \partial_3 \underbrace{F_{12}}_{=B_3} = \partial_i B_i = \nabla \cdot \mathbf{B} . \quad (12.40)$$

添え字 $(\mu\nu\rho)$ をほかの値に取った場合は、マクスウェル方程式 (12.1) の第 1, 2 式の成分のどれかが出てくるか、もしくは自明な式 ($0 = 0$) が出てくる。それらをまとめると、式 (12.38) は

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (12.41)$$

すなわちマクスウェル方程式 (12.1) の第 1, 2 式と等価であることがわかる。

以上をまとめると、マクスウェル方程式 (12.1) を電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ で表したものは

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 j_\mu , \quad \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (12.42)$$

と表されることが分かる。

⁶⁴ 式 (12.38) は $F_{\mu\nu}$ の定義式 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を代入すると自動的に満たされる恒等式である。実際、 $F_{\mu\nu}$ を代入して式 (12.38) の左辺を評価すると

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} &= \partial_\mu (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) + \partial_\nu (\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) + \partial_\rho (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= (\partial_\mu \partial_\nu A_\rho - \partial_\nu \partial_\mu A_\rho) + (\partial_\nu \partial_\rho A_\mu - \partial_\rho \partial_\nu A_\mu) + (\partial_\rho \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu \partial_\rho A_\nu) = 0 .
\end{aligned}$$

最後の等号は、偏微分が可換 ($\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$) であるために括弧でくくった各項がそれぞれゼロとなることから従う。というわけで、マクスウェル方程式 (12.1) に \mathbf{E}, \mathbf{B} を ϕ, \mathbf{A} で書いた式 (12.6) を代入すると恒等的に満たされたように、 $F_{\mu\nu}$ で書き表した式 (12.38) も自動的に満たされる恒等式に過ぎない。式 (12.38) はビアンキの恒等式と呼ばれている。