

第13回 相対論的電磁気学 (続き)

前回の講義で、電磁場の時間発展を記述するマクスウェル方程式が特殊相対論ではどのように記述されるかを説明した。これに、荷電粒子が電磁場とどのように相互作用するかを記述する方程式を付け加えれば電磁気学の諸現象を一通り記述できるようになる。今回はこの荷電粒子の運動方程式を中心に解説する。

13.1 復習：マクスウェル方程式

- (電場 \mathbf{E} , 磁場 \mathbf{B} についての) マクスウェル方程式:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (13.1)$$

- 4元ベクトルポテンシャル A^μ :

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}) \quad (13.2)$$

A^μ はローレンツ変換に対して反変ベクトルとして振る舞うと仮定する。なお、共変成分 A_μ は

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = \left(-\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right). \quad (13.3)$$

- 4元電流ベクトル j^μ : ρ_0 は静止電荷密度 (スカラー), u^μ は電荷密度の4元速度。

$$\underbrace{j^\mu}_{=(\rho c, \mathbf{j})} = \rho_0 \gamma(c, \mathbf{V}) = \rho_0 u^\mu \quad (\rho = \gamma \rho_0, \quad \mathbf{j} = \gamma \rho_0 \mathbf{V}) \quad (13.4)$$

j^μ は4元共変ベクトルとして振る舞う。電流を担う物質が複数種類存在するときは、 j^μ は各成分の j^μ の和になる。

- 電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{matrix} & \overset{\nu=0}{\underbrace{\quad}} & \overset{1}{\underbrace{\quad}} & \overset{2}{\underbrace{\quad}} & \overset{3}{\underbrace{\quad}} \\ \underset{\mu=0}{\underbrace{\quad}} & 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ 1) & E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ 2) & E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ 3) & E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{matrix} \quad (13.5)$$

今回は、この式にローレンツ変換をかけることで \mathbf{E}, \mathbf{B} のローレンツ変換則を導出した:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E}\right). \quad (13.6)$$

$\mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{E}_{\perp}$ は \mathbf{E} の \mathbf{V} に対して平行・垂直な成分である。 \mathbf{B} についても同様。

- ($A^\mu, F_{\mu\nu}$ で表した) マクスウェル方程式:

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 j_\mu. \quad (13.7)$$

この式で表されるのは元のマクスウェル方程式(13.1)の第3, 4式である。第1, 2式は \mathbf{E}, \mathbf{B} を ϕ, \mathbf{A} で表すと自動的に満たされる。第1, 2式も $F_{\mu\nu}$ で表すことも可能で $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$ となる。

13.2 荷電粒子の運動方程式

マクスウェル方程式(13.7)は電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} の時間発展を記述するが、電荷密度 ρ , 電流 \mathbf{j} が従う方程式は別途与える必要がある。以下では簡単のため、荷電粒子の場合について説明する。

13.2.1 ローレンツ力

まずニュートン力学の場合について考えると、電荷 q の荷電粒子が電磁場の作用で感じる力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (13.8)$$

で与えられるのであった。右辺はローレンツ力と呼ばれており、第1項は電場による力、第2項は磁場中を荷電粒子が運動している場合に発生する力である。

特殊相対論においても、粒子の速度が十分に遅い ($V \ll c$) 場合にはローレンツ力の式 (13.8) の式がそのまま成立する。また、この式をテンソル量で書き下せれば、ローレンツ変換することにより任意の慣性系における表式が得られる。そこで、式 (13.8) をこれまでに出てきたテンソル量で書き表すことを試みる。

- **構成要素の候補は $F_{\mu\nu}$ と u^μ :** 式 (13.8) をよく見ると、右辺に出てくるのは電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} および粒子の速度 \mathbf{V} だけである。したがって、テンソル量を組み合わせてこの式を書くときも、電磁場および粒子の速度に関するテンソル量を使えばよいと期待される。そのようなテンソル量で我々が知っているのは電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ と荷電粒子の4元速度 u^μ なので、それらが構成要素の候補となる。
- **4元力は F^μ は反変ベクトル:** 式 (13.8) は力を表す3次元ベクトル \mathbf{F} を書き下したもののだが、これに対応するものは4元力 f^μ で⁶⁵、これは4元反変ベクトルである。そのため、上で見つけた構成要素 $F_{\mu\nu}, u^\mu$ を組み合わせる際も、その結果が4元反変ベクトルになるようにする必要がある。

上記の要請を満たす $F_{\mu\nu}, u^\mu$ の組み合わせを考えるにあたり、もっとも単純な組み合わせ方である

$$f_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu \quad (13.9)$$

がどのような成分を持つベクトルになるかをまず調べてみる。式 (13.5) と $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{V})$ を使って f_μ の成分を具体的に書き下してみると

$$f_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_1}{c} & -\frac{E_2}{c} & -\frac{E_3}{c} \\ \frac{E_1}{c} & 0 & B_3 & -B_2 \\ \frac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & B_1 \\ \frac{E_3}{c} & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma V^1 \\ \gamma V^2 \\ \gamma V^3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \\ E_1 + V^2 B_3 - V^3 B_2 \\ E_2 + V^3 B_1 - V^1 B_3 \\ E_3 + V^1 B_2 - V^2 B_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (13.10)$$

さらに、このベクトルは下付き添字を持つ共変ベクトルなので、上付き添字を持つ反変ベクトルに直すと

$$f^\mu = \eta^{\mu\nu} f_\nu = \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (13.11)$$

この f^μ はテンソル量だけから作られているので、ローレンツ変換に対して4元反変ベクトルとして振る舞う。また、 f^μ の空間成分 $f^i = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$ は、係数 γ がかかっている以外はニュートン力学におけるローレンツ力 (13.8) と一致している。

⁶⁵以前は4元力ベクトルを大文字の F^μ と書いていたが、電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ と紛らわしいので、今回は4元力ベクトルの方を小文字の f^μ と表記することにする。13.2.2節で粒子のエネルギーの文字を $E \rightarrow \mathcal{E}$ と変更しているのも、電場 \mathbf{E} と紛らわしいため。

13.2.2 荷電粒子の運動方程式

ここで、第9回、第10回で解説した相対論的力学の運動方程式を思い出してみると

$$\underbrace{\frac{dp^\mu}{d\tau}}_{=\gamma dp^\mu/dt} = f^\mu, \quad p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right), \quad f^\mu = \gamma \left(\frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{f} \right). \quad (13.12)$$

ただし、 $\mathcal{E} = m_0 \gamma c^2$ は荷電粒子のエネルギー、 $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{V}$ は運動量である。ここで、式(13.11)に荷電粒子の電荷 q をかけたものを改めて f^μ と定義しなおすと、この式は

$$\gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathcal{E}/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = f^\mu = \gamma q \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (13.13)$$

$$\therefore \frac{d\mathcal{E}}{dt} = q \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (13.14)$$

式(13.14)の2つの式の物理的な意味は下記の通り。

- $d\mathbf{p}/dt$ の式は、ローレンツ力(13.8)による粒子の運動量の時間変化を決める式である。
- $d\mathcal{E}/dt$ の式は、ローレンツ力(13.8)による粒子のエネルギー変化を表している。ローレンツ力のうち $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ は速度 \mathbf{V} と直交しているため粒子に対する仕事量はゼロとなり、電場による力からくる仕事 $\mathbf{V} \cdot (q\mathbf{E})$ だけが寄与している。

式(13.14)は、4次元的な式(13.12)の時間・空間成分をそれぞれ個別に書いたものである。逆に、式(13.12)のように4次元的な表式でこれを表すと

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu = q F^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (13.15)$$

これとマクスウェル方程式 $\partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 j_\mu$ (式13.7) を組み合わせると、電磁場と荷電粒子の時間発展を記述する運動方程式となる。ただし、点粒子を考える場合は、 j^μ に出てくる電荷密度 ρ 、電流 \mathbf{j} は⁶⁶

$$\rho = q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{j} = q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \quad (13.17)$$

と与えられる。ただし、粒子の軌道は $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ で、 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))$ は粒子の位置で非ゼロの値をとる3次元的なデルタ関数である。

13.3 具体例：平行電流間の引力

2本の平行な電線に同じ向きに電流を流すと引力が生じる。一方の電線の電流が磁場を作り、その磁場中をもう一方の電線の電流が流れることで発生するローレンツ力 $F = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ がこの引力の起源である、と考えるのが普通の解釈の仕方である。一方、この系を電線に沿って一定の速度で動きながら見ると、ローレンツ力とは異なる事情により電線間の引力が発生したように見える。電磁場・電流についてのローレンツ変換の具体例として、この平行電流間の引力について解析してみる⁶⁷。

⁶⁶マクスウェル方程式(13.7)の発散を取ると、4元電流ベクトル j^μ が満たすべき方程式を以下の通り導出できる：

$$0 = \partial^\mu \partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 \partial^\mu j_\mu \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \partial_\mu j^\mu = -\frac{\partial j^0}{c dt} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = -\frac{\partial \rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (13.16)$$

これは4元電流ベクトル j^μ の保存則を表す式である。例えば、式(13.17)の電荷密度 ρ 、電流 \mathbf{j} はこの保存則を満たすことを計算で示せる。

⁶⁷参考: <https://www2.hamajima.co.jp/~tenjin/labo/parallelcurrent.pdf> 等。

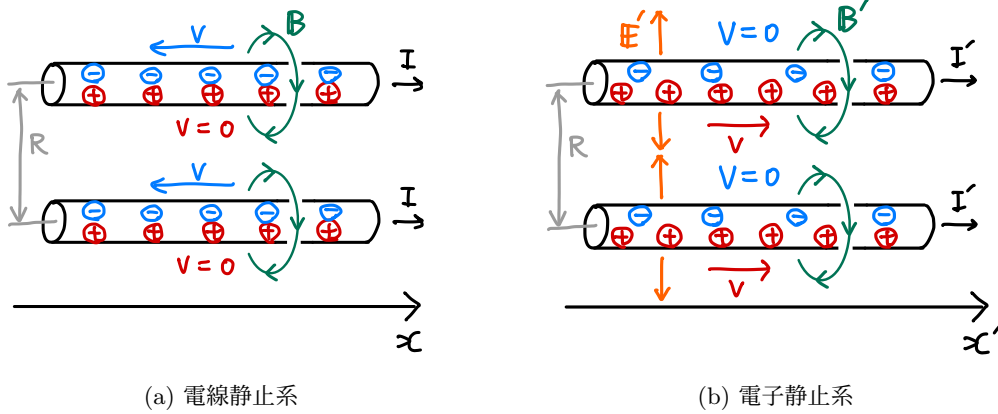


図 47: 平行な電線を流れる電流。電流が流れることにより 2 本の電線間には引力が働く。(a) 電線静止系における電荷の分布と運動の様子。(b) 電子の静止系における様子。

13.3.1 電線静止系

電線は正の電荷をもつ金属イオンとその周辺を運動する自由電子からなる。電流が流れる様子を電線（を構成している金属イオン）の静止系で見ると、金属イオンが静止しており、電子が電流と逆方向に一定の速度で運動して見える。簡単のためこの電線は電氣的に中性だとして、この電流が作る電磁場を解析してみる。

- **4元電流:** x 軸方向に電線が伸びており、 x 軸の正の方向に電流が流れているものとする。この場合、金属イオンは静止しており、自由電子が x 軸負の方向に流れる。自由電子と金属イオンの 4元電流ベクトルをそれぞれ $j_{(e)}^\mu, j_{(i)}^\mu$ とすると、それぞれ

$$j_{(e)}^\mu = \gamma(V)\rho_e(c, -V)\delta(y)\delta(z), \quad j_{(i)}^\mu = \rho_i(c, 0)\delta(y)\delta(z). \quad (13.18)$$

ただし、 $V > 0$ は電子の（平均的な）速さ、 $\rho_e < 0, \rho_i > 0$ は自由電子、金属イオンの静止状態における線密度である。電線の静止系で電線は電氣的に中性であると仮定したので、電荷の合計はゼロでなくてはならない。そのためには

$$\gamma\rho_e + \rho_i = 0 \quad \therefore \quad \rho_i = -\gamma\rho_e \quad (13.19)$$

であればよい。この時、4元電流ベクトルの合計 j^μ は

$$j^\mu = j_{(e)}^\mu + j_{(i)}^\mu = (0, -\gamma\rho_e V)\delta(y)\delta(z). \quad (13.20)$$

- **電流が作る磁場:** 式 (13.20) の j^μ について、合計の電荷はゼロであるために電線周辺には電場が生じない。磁場については、マクスウェル方程式の $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ から計算できる。電線から R だけ離れた地点における磁場の大きさ $B(R)$ は

$$\int_{r < R} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{r=R} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi R B(R) = \int_{r < R} \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\mu_0 \gamma \rho_e V \quad (13.21)$$

$$\therefore \quad B(R) = \frac{-\mu_0 \gamma \rho_e V}{2\pi R}. \quad (13.22)$$

磁場の向きは電流に右ネジの法則を適用して決まる向き（ x 軸の正の向きについて右巻き）である。

- **もう一方の電線にかかる力:** もう一方の電線についても式 (13.20) と同じ (y, z 座標だけ異なる) 電流が流れているものとする。この電流の単位長さ当たりにかかる力は、電場がゼロであることからローレンツ力の式 $\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ から計算できる。その大きさは

$$F = -\gamma\rho_e V B(R) = \frac{\mu_0 \gamma^2 \rho_e^2 V^2}{2\pi R}. \quad (13.23)$$

$q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ の向きからして、力 \mathbf{F} の向きは電線同士を近づける向きとなる。

この系において電線間の引力は自由電子にかかるローレンツ力だけから生じていることに注意したい。金属イオンの速度はゼロなのでローレンツ力は発生せず、まだ電場がゼロなので電氣的な力もかからない。

13.3.2 電子静止系

次に、同じ系を電線中を流れる自由電子と同じ速さで動きながら見てみよう。自由電子は x 軸の負の方向に速さ V で運動していたが、それと同じ速さの慣性系（電子静止系）をとり、その系に乗っている観測者から見たときにどのような電流や力が見えるかを考えることになる。

- **4元電流:** 電子静止系における電子と金属イオンの4元電流をローレンツ変換で求めてみる。

$$\begin{aligned} j'_{(e)}{}^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu(-V)j^\mu = \gamma(-V) \begin{pmatrix} 1 & -(-V)/c \\ -(-V)/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(V)\rho_e c \\ -\gamma(V)\rho_e V \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) \\ &= \gamma^2 \rho_e c \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2)\rho_e c \\ 0 \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) \end{aligned} \quad (13.24)$$

$$j'_{(i)}{}^\mu = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_i c \\ 0 \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) = \gamma \rho_i c \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) = -\gamma^2 \rho_e c \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) \quad (13.25)$$

速度 V で運動していた電子がこの慣性系では止まっているので、ローレンツ収縮がかからなくなる分電荷密度は下がる($\rho = \gamma\rho_e \rightarrow \rho_e$)。一方、静止していた金属イオンが x 軸の正の向きに速度 V で運動するので、ローレンツ収縮のために電荷密度が大きくなる($\rho = \rho_i \rightarrow \gamma\rho_i$)。以上より、電子静止系における電線の4元電流ベクトルを求めると

$$j'^\mu = j'_{(e)}{}^\mu + j'_{(i)}{}^\mu = \gamma^2 \rho_e c \begin{pmatrix} -\beta^2 \\ -\beta \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z). \quad (13.26)$$

この式の $\mu = 0$ 成分から

$$\rho' = -\gamma^2 \beta^2 \rho_e \delta(y)\delta(z) \quad (13.27)$$

となり、**電子静止系では電線が帯電する**ことがわかる。上でも説明した通り、電子静止系に移る際に自由電子間の間隔は大きくなり、金属イオン間の間隔は小さくなるために、電子の負電荷よりも金属イオンの正電荷の方が多くなったのが原因である。

- **電流が作る電場・磁場:** 4元電流 j'^μ が分かっているので、それをマクスウェル方程式に代入することで j'^μ が作る電場・磁場を求められる。一方、13.3.1の解析から電線周りの磁場が既に得られているので、これにローレンツ変換をかけることで電子静止系における電場・磁場を求めすることもできる。今回はこの手法を使ってみよう。

元の電線静止系では、電線の周りを回転する向きに磁場がかかっており、磁場のその他の成分や電場は全てゼロであった。この電場・磁場を式(13.6)に従って変換する。まず、速度（および電線）に平行な成分は変換前後ともにゼロなので、 $\mathbf{E}'_{\perp}, \mathbf{B}'_{\perp}$ についてだけ考える。ローレンツ変換に使う \mathbf{V} が x 軸の負の向きに向いていることに留意すると、変換後の電磁場の値は

$$|\mathbf{E}'_{\perp}| = \gamma|\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}| = \gamma|\mathbf{V} \times \mathbf{B}| = \gamma V \frac{\mu_0 \gamma |\rho_e| V}{2\pi R} = \frac{\mu_0 |\rho_e| \gamma^2 V^2}{2\pi R}, \quad (13.28)$$

$$|\mathbf{B}'_{\perp}| = \gamma \left| \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E} \right| = \gamma |\mathbf{B}_{\perp}| = \frac{\mu_0 \gamma^2 |\rho_e| V}{2\pi R}. \quad (13.29)$$

\mathbf{E}' の向きは電線から外向き、 \mathbf{B}' の向きは x 軸について右巻きの方向である。

- **もう一方の電線にかかる力:** もう一方の電線にも静止する自由電子 $j_{(e)}^{\mu}$ と金属イオン流 $j_{(i)}^{\mu}$ が乗っていて、これらが上で求めた \mathbf{E}' , \mathbf{B}' を感じることで力がかかる。以下では、**電子と金属イオンにかかる力を個別に求める**。結論としては、**電子は静電気力によりもう一方の電線に引かれ、金属イオンには力はかからない**ことが示される。

[電子にかかる力] 式 (13.24) からわかる通り、電子の線密度は ρ_e で速度はゼロである。そのため、ローレンツ力はかからず電場によるクーロン力だけが発生する。電子静止系における単位長さ中に含まれる電子にかかる力は

$$F' = |\rho_e \mathbf{E}'| = \frac{\mu_0 \rho_e^2 \gamma^2 V^2}{2\pi R} . \quad (13.30)$$

[金属イオンにかかる力] 金属イオンは速度 V で x 軸の正の方向に運動しているため、 \mathbf{E}' によるクーロン力と \mathbf{B}' によるローレンツ力の両方がかかる。 $j_{(i)}^{\mu}$ の表式 (13.25) も使ってそれぞれを求めると

$$F_{\mathbf{E}'} = |-\gamma^2 \rho_e \mathbf{E}'| = \gamma^2 \rho_e \cdot \frac{\mu_0 |\rho_e| \gamma^2 V^2}{2\pi R} = \frac{\mu_0 \rho_e^2 \gamma^4 V^2}{2\pi R} , \quad (13.31)$$

$$F_{\mathbf{B}'} = |\mathbf{j}' \times \mathbf{B}'| = \left| \gamma^2 \rho_e V \cdot \frac{\mu_0 \gamma^2 \rho_e V}{2\pi R} \right| = \frac{\mu_0 \rho_e^2 \gamma^4 V^2}{2\pi R} . \quad (13.32)$$

すなわち、クーロン力とローレンツ力は大きさが等しい。今回の場合クーロン力は斥力、ローレンツ力は引力となるので、合計すると互いにちょうど打ち消し合い、**金属イオンには力がかからない**ことになる。電線静止系で金属イオンには力がかかっていなかったが、それをローレンツ変換して得られる電子静止系でもやはり力がかからない、というだけの結果ではある。

13.3.3 考察

以上の結果をまとめると、平行電流間にかかる引力の起源は

- **電線静止系** (電線が電氣的に中性となる系): 運動する電子にかかるローレンツ力
- **電子静止系:** 静止している電子にかかるクーロン力

となり、どちらの慣性系で見るとかによって全く異なる。特に、後者は**ローレンツ収縮の効果**で電子・金属イオンの電荷密度に差が生じたことで生まれたものである。

ここで、電線の中を流れる電子の平均的な速さは意外と遅く、例えば太さ数 mm の導線に数 A の電流を流す場合には 1 mm/sec 程度である。したがって、上記の実験を電子とその程度の速さで移動しながら見ると、電線間の引力はローレンツ収縮で現れた電荷によるクーロン力から生じていることになり、その意味で**ローレンツ収縮の効果を観測できる**ことになる。通常は光に近い速さで動かなければ観測しがたい相対論的效果を、日常的なスケールで比較的容易に見ることができる実験と言える。

[力の比較について] 電線静止系で電線の単位長さあたりにかかる力 (13.23) と電子静止系での単位長さ当たりの力 (13.30) は、一見すると同じ表式をしている。これらの式が一致していることをもって、どちらの系で見ても電線にかかる力は同じと結論したくなるかもしれない。しかし、ローレンツ収縮のためにそれぞれの系の単位長さあたりに含まれる電子の個数は異なるため、それにかかる力についても若干気をつけて解析する必要がある。

混乱を避けるために、同じ個数の電子 (同じ量の電荷) にかかる力に注目する。まず、電線静止系で単位長さあたりに含まれる電荷は $\gamma \rho_e$ で、これに (13.23) だけの力がかかっていることになる。一方、電子静止系における電荷密度は ρ_e なので、 $\gamma \rho_e$ だけの電荷を確保するのは電線の長さ γ の部分を切り取ってくる必要がある。単位長さあたりにかかる力は先ほどと同じ値 (式 (13.30)) なので、長

さ γ の部分にかかる力はその γ 倍となる。すなわち、電線静止系と比べて、電子静止系の電子には γ 倍の力がかかっていることになる。

詳細は割愛するが、粒子にかかる力 \mathbf{F} もローレンツ変換に従って変換し (4元力 $F^\mu = \gamma(\frac{1}{c}\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{F})$ がベクトルとして振る舞う)、速度に垂直な方向の力 \mathbf{F} の成分は静止系から運動系に移ると $\frac{1}{\gamma}$ 倍される。これはちょうど上で示した静止系の電子にかかる力が γ 倍になっているという結果と同じ性質で、したがって電線静止系・電子静止系のどちらで見ても電子にかかる力は同じ (ローレンツ変換に基づいて正しく変換されている) ということが分かる。