

第2回 特殊相対性理論の発見

特殊相対性理論以前は、物理理論はガリレイ変換に対して不変であり、マクスウェル方程式やそれから導出される光速についてもガリレイ変換が適用されると考えられていた。今回の講義では、特殊相対性理論以前の物理学に基づいた光の性質についての理論と実験を紹介し、特殊相対性理論の導入へとつながってゆく流れについて解説する。

2.1 ガリレイ変換

2.1.1 ガリレイ変換と粒子の速度

前回は導入した、ある慣性系 $O : (t, \mathbf{x})$ から速度 \mathbf{V} の慣性系 $O' : (t', \mathbf{x}')$ へのガリレイ変換：

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t \quad (2.1)$$

を復習しておく。この座標変換を行うことが、慣性系 O から慣性系 O' に移って物理現象を解析することに対応するのであった。例えば、 O 系で粒子の軌道が $x = x(t)$ で与えられたとすると、 O' 系での軌道は式 (2.1) に従って先ほどの式を変換した $x' = x'(t')$ で与えられる。

特に、ガリレイ変換 (2.1) により、 O' 系における粒子や波動の速度 \mathbf{v}' は元の O 系における値から \mathbf{V} だけシフトする：

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{V}t) = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \quad (2.2)$$

2.1.2 マクスウェル方程式のガリレイ変換性

前回紹介したマクスウェル方程式から導出される光速についても、上記の速度の変換則が適用される。このことをマクスウェル方程式（書き換えて得られた波動方程式）に基づいて見てみよう。

マクスウェル方程式を書き換えると、 x 方向に伝搬する電磁波の従う方程式は⁸

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{d^2}{dx^2}\right) E(t, x) = 0 \quad (2.3)$$

となることを前回示した。ただし、 $E(t, x)$ は電場の成分。この式の一般解は

$$E(t, x) = E_1(ct + x) + E_2(ct - x) \quad (2.4)$$

で与えられ、 $E_{1,2}$ がそれぞれ速さ c で x の正・負方向に伝搬する波を表すのであった。

この方程式にガリレイ変換 (2.1) を適用してみる。そのための準備として、微分 $\partial/\partial t, \partial/\partial x$ がどのように変換されるかを示しておく必要がある。変換 (2.1) について微分の連鎖律を適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial t'(t, x)}{\partial t} \frac{\partial E'(t', x')}{\partial t'} + \frac{\partial x'(t, x)}{\partial t} \frac{\partial E'(t', x')}{\partial x'} = \frac{\partial E'}{\partial t'} - V \frac{\partial E'}{\partial x'}, \\ \frac{\partial E(t, x)}{\partial x} &= \frac{\partial t'(t, x)}{\partial x} \frac{\partial E'(t', x')}{\partial t'} + \frac{\partial x'(t, x)}{\partial x} \frac{\partial E'(t', x')}{\partial x'} = \frac{\partial E'}{\partial x'}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ただし、 \mathbf{V} の x 成分を単に V と書いたほか、簡単のために $E(t, x)$ はガリレイ変換 (2.1) で不変であり $E(t, x) = E'(t', x')$ となると仮定した⁹。この微分の変換式 (2.5) を使ってマクスウェル方程式 (2.3)

⁸正確には式 (2.3) はマクスウェル方程式を組み合わせて得られた波動方程式であるが、今回分の講義ノートでは簡単のためこの式自体を「マクスウェル方程式」と呼ぶことにする。

⁹実際には (2.1) のような変換をかけると電場・磁場の成分も修正を受けるため、もう少し詳細な解析が必要になる。ただし、結論自体は本ノートに書いたものとおおむね変わらない。

を書き換えると

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E(t, x) = \left[-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right] E'(t', x') \\
 &= -\frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t'} - (c+V) \frac{\partial}{\partial x'} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t'} + (c-V) \frac{\partial}{\partial x'} \right] E'(t', x'). \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

この微分方程式の一般解は

$$E'(t', x') = E'_1((c+V)t' + x') + E'_2((c-V)t' - x'). \tag{2.7}$$

$V = 0$ の場合の解である式 (2.4) とほぼ同様に、 E_1 が x の負方向に速度 $c + V$ で伝搬する波、 E_2 が x の正方向に速度 $c - V$ で伝搬する波にそれぞれ対応する。

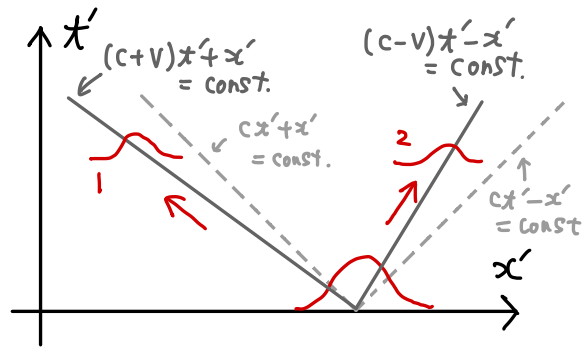


図 3: 波動方程式 (2.3) の一般解 (2.7)。式 (2.7) の E_1 が左方向、 E_2 が右方向に伝搬する波に対応する。 x 正の方向に速度 V で運動する慣性系に移ってから波動を見ている都合上、伝搬速度は x 負の方向に V だけずれて観測される。

ここまでの計算について、注目すべき点は以下の 2 点である。

- 2つの慣性系の時間・空間座標が式 (2.1) のガリレイ変換で与えられるとすると、光速はマクスウェル方程式から自然に得られる速度 c から慣性系の速度 V の分だけ変化する。光速が向きに依らずちょうど c になるような特別な慣性系が存在する ($V = 0$ の系に相当)、ということもできる。

相対論が導入される以前は、エーテルと呼ばれる媒質が宇宙を満たしており、光はエーテルの弾性波であると考えられた。この描像では、上述の $V = 0$ の慣性系はエーテルの静止系であると解釈される。空気の弾性波である音波について、速度 V の風がある場合を考える、という状況と対応している。

- マクスウェル方程式 (2.3) はガリレイ変換に対して不変でない。すなわち、変換後の式 (2.6) は、元の式 (2.3) について座標を $(t, x) \rightarrow (t', x')$ と単に置き換えた式とは一致しない。ガリレイ変換を適用することで光速が c から変化したのはこれが原因である。

後に詳しく説明するが、今後導入するローレンツ変換はマクスウェル方程式 (2.1) の形を不変に保つ座標変換で、そのために変換前後で光速が一定の値 c のまま保たれる、という特徴がある。

2.2 マイケルソン・モーリーの実験

2つの慣性系が互いにガリレイ変換で関係づけられるとした場合には、光速が慣性系の速度 V に応じて変化するということを前節で見た。このような観測者の速度 V に応じた光速の変化を検出する実験の一つが、以下で解説するマイケルソン・モーリーの実験である。

2.2.1 実験系の構成と期待される結果

マイケルソン・モーリーの実験のセットアップを図4に示す。レーザー光をハーフミラーで縦・横方向に分解し、 L だけ離れた鏡で反射させて再び重ね合わせ、2つの光線の干渉状態を観測する。

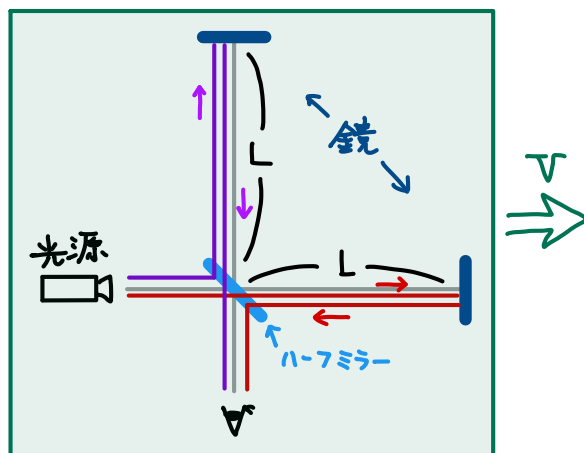


図4: マイケルソン・モーリーの実験のセットアップ。レーザー光をハーフミラーで縦・横方向に分解し、 L だけ離れた鏡で反射させて再び重ね合わせ、2つの光線の干渉状態を観測する。

この実験を光速が一定値 c となる慣性系（以下、この系のことを「静止系」と呼ぶことにする）で行ったとすると、縦方向・横方向の光路長は全く同じとなり、観測者は同位相で強め合った光を観測することになる。一方、実験系全体を速度 V で横方向に運動させた場合、もし運動系では光速が変化したように見えるのであれば、光の干渉状態も変化するはずである。この点について以下で解析してみよう。

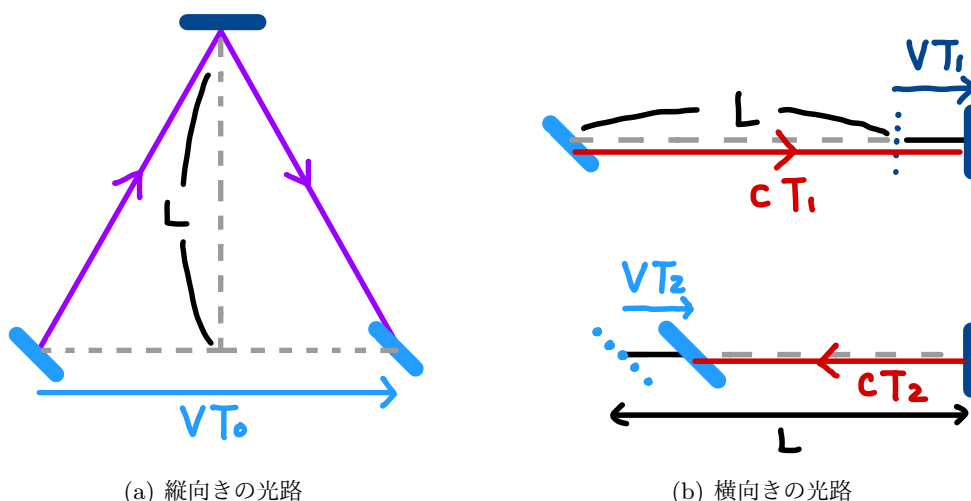


図5: マイケルソン・モーリーの実験で、実験系を速度 V で横方向に動かした場合の光路を、静止した観測者の視点から描いた図。縦・横方向で異なる光路となる。

図4の実験系を右方向に速度 V で運動させた場合を考える。この時、縦方向・横方向の光路（ハーフミラーと鏡との間で往復する部分）を静止系から眺めると¹⁰、それぞれ図5(a)、図5(b)のようになる。このそれぞれについて、光が往復するために必要となる時間は以下ようになる。

¹⁰ 運動系に乗った観測者から見た光の経路と向きごとに異なる光速を用いて解析を行うことも可能で同じ結果が得られる。静止系から見て解析を行った方が若干簡単化する。

● 縦方向

ハーフミラーと鏡との間で光が縦方向に往復するのに要する時間を T_0 とする。実験系全体が速度 V で右向きに動いているため、光が往復する間にハーフミラーは VT_0 だけ右に移動する。そのため、光路長 l は

$$l = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{1}{2}VT_0\right)^2} \quad (2.8)$$

となる。静止系では光速がどの向きでも c となるので、この光路長は cT_0 に等しいはずである。この条件を使って T_0 を求めると

$$cT_0 = l = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{1}{2}VT_0\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (c^2 - V^2)T_0^2 - 4L^2 = 0 \quad (2.9)$$

$$\therefore T_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \cdot \frac{2L}{c} \quad (2.10)$$

● 横方向

光が横方向の往路（ハーフミラー→鏡）を渡りきるのに要する時間を T_1 、復路（鏡→ハーフミラー）に要する時間を T_2 とする。光が移動している間に実験系に固定されている鏡も右向きに速度 V で移動するので、光路長もその分変化する。図 5(b) より、往路と復路それぞれについて

$$cT_1 = L + VT_1, \quad cT_2 = L - VT_2 \quad (2.11)$$

が成立する。従って、往復全体の所要時間 $T_1 + T_2$ は

$$T_1 = \frac{L}{c - V}, \quad T_2 = \frac{L}{c + V} \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_2 = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = \frac{1}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L}{c} \quad (2.12)$$

速度 V で運動する系の観測者から見ると光速は右方向に $c - V$ 、左方向に $c + V$ となったように見えるが、往路・復路の所要時間 T_1, T_2 はそれらの速度で往路・復路の長さ L を割った値そのものになっている。

以上の結果を踏まえて、縦・横方向の所要時間の差 ΔT を求めると

$$\Delta T = T_1 + T_2 - T_0 = \frac{1}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L}{c} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \cdot \frac{2L}{c} = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L}{c} \quad (2.13)$$

この時間差 ΔT の間に光が飛ぶ距離が実験に用いた光の波長 λ 程度になれば、図 4 の装置で重ねあわされた光の干渉状態に変化が現れる。今回の場合、速度 $V = 0$ の場合には縦・横方向に伝搬した光は互いに強め合うが、 V を増加させて $c\Delta T \sim \frac{1}{2}\lambda$ となれば逆に打ち消しあうようになる¹¹。そのような干渉光の強度変化が観測できれば、観測者の速度に応じた光速の変化が検出できたことになる。

¹¹実験系の速度 V が光速 c と比べて十分に小さい場合には、 $\sqrt{1 - \epsilon} \simeq 1 - \frac{1}{2}\epsilon$ を用いて

$$c\Delta T \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{V}{c}\right)^2 \cdot 2L = L \left(\frac{V}{c}\right)^2$$

これが λ 程度の大きさになれば干渉光の強度変化を検出できる。通常の実験では $\frac{V}{c} \ll 1$ となるが、装置のサイズ L を大きくし光の波長 λ を十分小さく設定して $\left(\frac{V}{c}\right)^2 \sim \frac{\lambda}{L}$ とできれば検出が可能となる。

2.2.2 実際の実験結果

マイケルソン・モーリーの実験は、観測者の速度を変えれば観測される光速も変化することを期待して行われた。しかし、予想に反してどのような設定でこの実験を行っても光速の変化が検出されることはなかった。

例えば、速度 V を変化させても、実験系の向きを速度 V の向きに対してずらしてから実験しても、実験結果に影響はなかった。また、異なる季節に同じ実験を行うことで、地球の公転速度を V として用いたうえでその向きを変えることが可能となる¹²。そのような寄与を考慮に入れた実験を行っても、干渉光の状態に変化は現れず光速の変化は検出できなかった。

2.2.3 実験結果の解釈

運動する観測者から見える光速についての実験事実は観測者の運動状態に依らず光速は常に一定というものだった。一方、異なる慣性系がガリレイ変換 (2.1) で関係づけられており、マクスウェル方程式 (2.3) もこの変換に従うと仮定すると、光速は慣性系の速度に応じて変化するという予言が得られる。この理論的予言は実験事実と合わないため、実験事実を説明するためには理論のいずれかの構成要素を修正する必要に迫られる。そのような理論の修正案としては、大まかには以下のようなものが当時考えられた。

● エーテルの引きずり効果

光速がどの方向についても一定値となる慣性系（今回の講義で単に「静止系」と呼んでいた系）は、宇宙を満たしている媒質であるエーテルの静止系である、と考えられていた。実験を行う慣性系がエーテルの静止系に対して運動している場合には光速もその分変化することになる。そのエーテルが実験系とほぼ同じ速さで運動していたと考えれば、前節の実験を行っても光速の変化は観測されないことになり、実験事実と整合的な理論が一応得られる。

例えば、エーテルが地球によって引きずられることによって、地表付近ではエーテルがほぼ静止している、とする仮説などが提案された。しかし、このような仮説を検証するための実験などがさらに行われたもののエーテルの存在は検出されなかったり、光行差と呼ばれる別の実験事実と合わないなどといった問題があり、この仮説は否定されるに至った。

● ローレンツ収縮

2.2.1 節の解析で光速のずれが検出されたのは、実験系の速度に対して縦・横方向の光の伝搬時間にずれが生じたためであった。ここで、運動状態によって装置全体のサイズが変化することがもしあれば、光の伝搬時間も変化して別の結論が得られると考えられる。

例えば、実験系を構成する物体の長さが、運動の方向に速度に応じて収縮すると仮定してみよう。実験系の速度が V の時にその方向の長さ L が $\gamma(V)$ 分の 1 に短くなる ($L \rightarrow L/\gamma(V)$) とすると、式 (2.12) で行った横方向の光路についての所要時間 $T_1 + T_2$ は以下のように変化する：

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L/\gamma(V)}{c} . \quad (2.14)$$

これに対応して、縦・横方向の所要時間の差 (2.13) は

$$\Delta T = \frac{1}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L/\gamma(V)}{c} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \cdot \frac{2L}{c} = \frac{\frac{1}{\gamma(V)} - \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L}{c} . \quad (2.15)$$

¹²地球の公転速度は秒速約 28 km である。光速との比は $\frac{V}{c} \sim 10^{-4}$ と小さい値になるが、それでも地上の様々な装置を用いて実現できる V/c や地球の自転速度に対応するそれよりは大きい。

従って、進行方向の長さが

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \geq 1 \quad (2.16)$$

の割合で短くなるとすれば、ちょうど $\Delta T = 0$ となり、光速のずれも速度 V に依らず検出されないことになる。

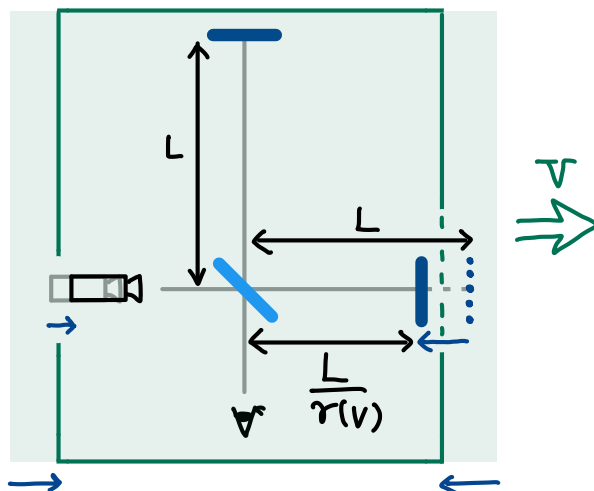


図 6: ローレンツ収縮したマイケルソン・モーリーの実験のセットアップ。実験系の運動方向の長さが $1/\gamma(V)$ 倍になっている。

この速度方向についての物体の長さの収縮はローレンツ収縮と呼ばれている。ローレンツによるもともとの提案では、エーテルの静止系に対して物体が運動している際に、その方向に物体の長さが収縮するとされた。そのような仮定を導入することで確かに実験事実は説明できるようになるものの、どのような物理的メカニズムによってそのような収縮が起こるのかを説明する必要が新たに生じてしまう、という問題があった。

● ガリレイ変換の修正

そもそも、今回導出した結果は、速度の異なる慣性系同士の間で時間・空間座標がガリレイ変換 (2.1) によって関係づけられる、と仮定したところから生じている。しかし、この仮定はあくまで我々が導入したものであり、それが本当に正しいかどうかは実験によって検証しなければならない¹³。

例えば、ガリレイ変換 (2.1) ではどの慣性系でも時間座標は共通 ($t = t'$) であるとされた。物理的には、静止していても運動していても時間の進み方は変化しない、という状況に対応する。日常的な感覚とはよく合うものの、例えば光速に非常に近い速度で運動している場合にもそうであるかどうかは、実際に実験的な検証をしてみなければわからない。従って、異なる慣性系同士がガリレイ変換とは異なる変換で関係づけられている、という可能性も残っており、理論的に再考する余地があることになる。

動機は異なるものの、アインシュタインが特殊相対性理論を構築する際にとった立場は最後に挙げたもの、すなわち異なる慣性系に移った際に時間・空間座標は、ガリレイ変換とは異なる変換に従っているのではないか、というものであった。次回の講義ではその詳細について解説する。

¹³もちろん、日常的な経験には合致するし、光速と比べて十分に遅い物体の運動については良い精度でガリレイ変換が成立するので、一定の妥当性がある仮定ではある。