第3回　特殊相対性理論の構築

前回の講義では以下の2点について紹介した。

- **マクスウェル方程式がガリレイ変換に従うと仮定すると**、光速は観測を行う系の速度 V に依存して変化する ($c \to c - V$)。
- 一方、**光速は任意の速度の慣性系で常に一定**であるという実験事実が得られた。

物体が進行方向に速度 V に応じて**ローレンツ収縮**すると仮定すればこの矛盾は一応解消できるが、ではなぜそのような現象が起こるのかと問われると答えに窮してしまう。一方、上の議論でマクスウェル方程式が**ガリレイ変換に従うと仮定**した点、特に静止系と運動系で時刻 t は共通であると仮定した点については、必ずしも実験事実に基づいて導入された仮定ではなく再考の余地がある。

上記の点について慎重に考えることで特殊相対性理論を構築することができる。今回と次回の講義で、この理論の中核をなす**ローレンツ変換**の導出を行う。

3.1　特殊相対性原理 / 光速度不変の原理

やや天下り的ではあるが、まず特殊相対性理論を構築する元となる仮定（原理）を導入する。以下の2点である。

- **特殊相対性原理：どの慣性系においても、物理法則は同一である。**物理理論を記述する方程式はどの慣性系でも同じ形で与えられ、同じ実験を異なる慣性系で行うと同一の結果が得られる[14]。
- **光速度一定の原理**：どの慣性系においても、光速度はどの方向にも一定値 c で与えられる。

前者の**特殊相対性原理**にマクスウェル理論も従うと仮定すれば、どの慣性系で光速度を導出しても常に一定値 $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ となり、後者の**光速度一定の原理**は自動的に満たされる。従って、後者は前者から導かれる帰結である。

上記のような仮定を導入すれば、少なくとも光速度一定という実験事実は説明できる。また、どの慣性系も物理的に完全に等価となるため、ガリレイ変換を考えていた時に出てきた特別な慣性系（光速がどの方向にも c となるような「静止系」）などというものはそもそも考えなくてよくなる。

3.1.1　アインシュタインの発想

上述の原理さえ導入すれば特殊相対性理論は構築できる。その前に、やや余談にはなるがアインシュタイン自身がどのようにして特殊相対性原理を考えついたのかについて簡単に紹介する。

- 16歳の時に「電磁波をその速さで追いかけて観測すると何が起こるのか？」という疑問を思いついたらしい[15]。図7参照。マクスウェル方程式によれば、電磁波は $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ で伝搬すると導出される。ガリレイ変換が正しいと信じると、電磁波と同じ速度で飛びながら電磁波を観測すれば、速度ゼロで動かない電磁波が観測できるはずである。しかし、そのような「動かない電磁波」はマクスウェル方程式からは出てこないし[16]、実験的にも知られておらず、何かがおかしい。

---

[14]もちろん、速度の異なる慣性系に移ったことによる物理量の値の変化などは生じる。それでも物理法則、すなわち物理量が従っている方程式には変化がないという意味である。

[15]アインシュタインが1946年に書いた自伝でそのようなエピソードが紹介されているとのこと。
参考：https://sites.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters/origins_pathway/index.html
https://sites.pitt.edu/~jdnorton/papers/Einstein_Discover.pdf
ちなみに、一般書などではこの話を単純化して「『光の速さで飛んだ時に自分の顔を鏡で見たら何が映るか？』という問題をアインシュタインが考えた」と紹介されている場合もある。

[16]マクスウェル方程式にガリレイ変換をかけると出てくる、元々のマクスウェル方程式とは異なる方程式から出てくるもの。ただし、そのような方程式は実験結果からは得られない。

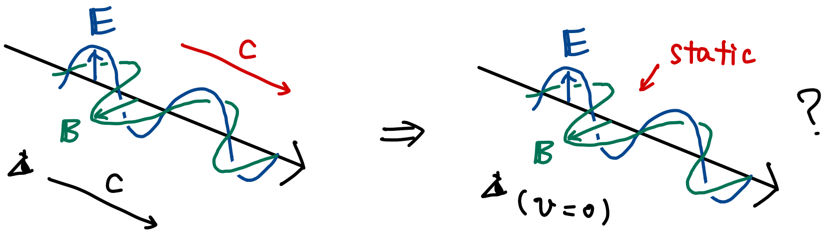


図 7: アインシュタインが 16 歳の時に考えたという思考実験。電磁波をその速度（光速）で追いかけながら観測すると何が見えるのか？もし、マクスウェル方程式がガリレイ変換に従うならば、電磁波を光速で追いかけながら見れば速度ゼロで静止した電磁波が見えるはずである。しかし、そのような電磁場の配位は理論的にも実験的にも知られていない。

- **電磁気学の双対性：**

  アインシュタインが特殊相対性理論を発表したのは 1905 年、26 歳の時だった。その発表を行った論文の冒頭には、おおよそ以下のような考察が書いてある。

  まず、図 8(a) のように磁石を静置しておいて、磁力線を横切るように電線をある速度 V で動かしてみる。この時、電線内の電荷 q にかかるローレンツ力 $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ によって電線には $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ 方向の電流 I が流れる。

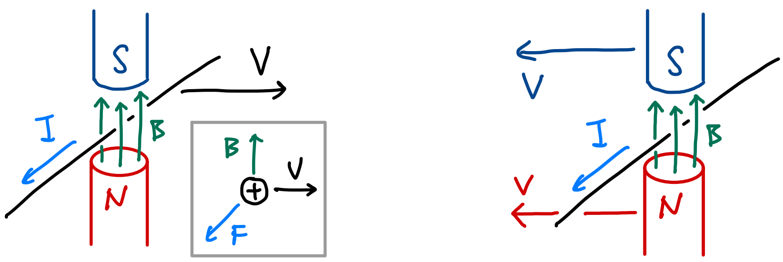
  次に、図 8(b) のように電線を静置しておいて、磁石の方を先ほどとは逆向きに速度 V で動かしてみる。すると、電磁誘導の法則 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ に従って電線には電流が流れる。この電流の大きさは、先ほどの図 8(a) の実験をやった時に得られた電流 I と全く同じとなる。

  この両者を比較すると、物理現象の見かけの姿（電流がローレンツ力によって生じるか、または電磁誘導によって生じるか）は異なる一方、最終的に得られる**物理的な結果（電流 I の向きと大きさ）は同じである**。また、図 8(a) と図 8(b) の**セットアップのそれぞれでまったく同じ形のマクスウェル方程式とローレンツ力の式**[17]：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \qquad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\ , \tag{3.1}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \tag{3.2}$$

  を用いることにより、電流 I の値を正しく計算することもできた。これらの事実より、どの速度一定の系も物理的に完全に対等であり[18]、特別な「静止系」などもとより存在しないのではないか、と推論できる。



(a) 電線が動く　　(b) 磁石が動く

図 8: アインシュタインの特殊相対性理論の論文冒頭で紹介されている思考実験。

[17] まったく同じ形の式で、ただし座標だけ静止系の座標 $(t, \mathbf{x})$ を運動系の座標 $(t', \mathbf{x}')$ に置き換えたもの、の意。
[18] どの速度一定の系でも同じ物理法則が成り立ち、物理実験によって系自体の速度を検出することはできない、の意。

3.2　光速度一定の原理の帰結

光速度一定の原理は**どの速度の慣性系から見ても光の速度は一定である**というものだが、これは日常的に見られる物体の運動やその速度の振る舞いの性質と根本的に異なる。そのため、この原理が正しいと認めると日常的な直感に反する様々な現象が起こることが予言される。そのような現象の例として、今回は**動く時計の遅れ**、および**時刻の同時性**の変化について紹介する。

以下の議論で用いるのは、**長さを測る物差しと時間を測る時計、および光と鏡**である。また、ある慣性系 O とその座標 (t, x, y, z)、O 系から見て x 正の方向に速度 V で運動している慣性系 O' とその座標 (t', x', y', z') を取って考える。簡単のため、以下では O 系を「**静止系**」、O' 系を「**運動系**」と呼ぶ場合もある。

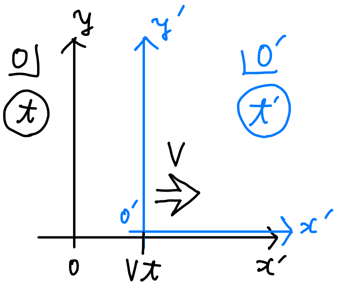
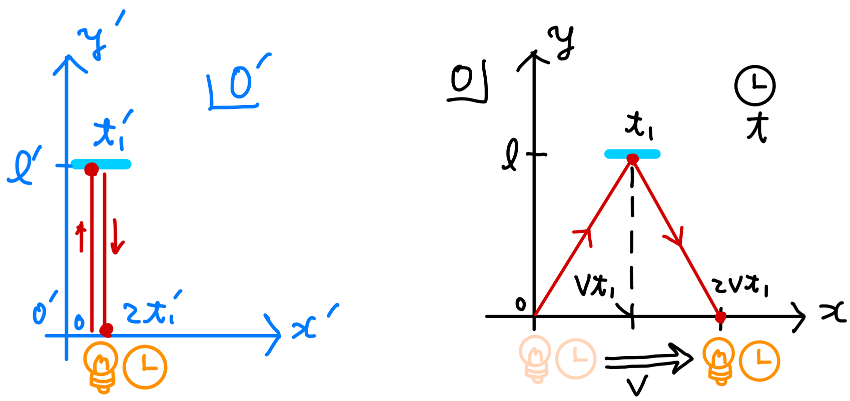


図 9: 慣性系 O と、それに対して x 正の方向に速度 V で運動する慣性系 O'。

3.2.1　動く時計の遅れ

運動系 O' の時計を静止系 O から見ると何が起こるかについて調べるために、O' 系の y' 軸方向に設置された光源と鏡の系を考える（図 10 参照）。また、この光源と鏡の系を時計と連動させておき、光が 1 往復するごとに時計が一刻み分進むようにしておく。以下ではこの系のことを**光時計**と呼ぶことにする。



(a) O' 系における光時計

(b) O 系から見た光時計

図 10: O' 系で y' 軸向きに設置された光時計と、それを O 系から見たもの。O 系からは光時計が速度 V で x 軸の向きに運動しているように見える。

この光時計を、O' 系に乗った観測者から見た場合と、静止系 O から見た場合にどうなるかを比較してみよう。

- **運動系** O': 光源から光が $t'=0$ に発射され、$y'=\ell'$ に置かれた鏡で時刻 $t'=t'_1$ に反射し、時刻 t'_2 に帰ってくるとする（図 10(a) 参照)。光速は向きに依らず一定 $(=c)$ なので

$$t'_1 = \frac{1}{2}t'_2 = \frac{\ell'}{c} \qquad \Leftrightarrow \qquad ct'_1 = \frac{1}{2}t'_2 = \ell' \ . \tag{3.3}$$

- **静止系** O: 運動系 O' の光時計を静止系 O から見ると、x 正の方向に速度 V で運動しているように見える。そのため、光時計内部を飛ぶ光は、図 10(b) のように斜め方向に飛んで鏡で反射し、再び $y=0$ に帰ってくることになる。ただし、鏡の位置は $y=\ell$ にあるものとする。

  経路の対称性から、前半（光が放射されてから反射するまで）と後半（反射時点から光が $y=0$ に帰着するまで）の所要時間は一緒である。その（半経路分の）所要時間を $t=t_1$ とする。今回の場合、光が斜めに伝搬している都合上光路長も伸びているため、光の伝搬に必要な所要時間 t_1 も若干伸びることになる：

$$t_1 = \frac{\sqrt{\ell^2+(Vt_1)^2}}{c} \qquad \therefore \quad t_1 = \frac{\ell}{\sqrt{c^2-V^2}} \quad \Leftrightarrow \quad ct_1 = \frac{\ell}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma\ell \ . \tag{3.4}$$

  ただし、今後繰り返し使うことになる記号 β, γ を以下の通り定義した。

$$\beta(V) \equiv \frac{V}{c} \ , \quad \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(V)}} \qquad (|\beta| \le 1, \gamma \ge 1) \ . \tag{3.5}$$

さて、ここで光時計の y **方向の長さは静止系** O **でも運動系** O' **でも同じ** $(\ell=\ell')$ と仮定しよう。この仮定が実際に正しいことは次回の講義で示す。この仮定の下、光時計が一刻み分進むまでにかかった時間 t'_1 (式 (3.3)) と、同じ一往復分の時間を静止系 O で計ったもの t_1 (式 (3.4)) を比較すると

$$t_1 = \gamma\frac{\ell}{c} = \gamma t'_1 \ge t'_1 = \frac{\ell}{c} \ . \tag{3.6}$$

すなわち、静止した（運動系 O' に乗って測った）光時計の一刻み分の時間 $t'_1 = \ell/c$ と比べて、速度 V で運動している光時計の一刻み分の時間を静止系 O で計った t_1 の方が $\gamma(V) \ge 1$ 倍に長くなっている。つまり、**速度** V **で運動する時計は** $\gamma(V)$ **倍ゆっくり進む**ように見えることが示された。

3.2.2 時刻の同時性

特殊相対性理論を導入する以前は、すべての慣性系で共通の絶対時間が存在して、例えば二つの事象が**同時**に起こったかどうかはその絶対時間を使って判定することができた。一方、光速度一定の原理を仮定すると、そのような**絶対時間のようなものは存在せず**、2 つの事象が**同時かどうかは観測者の速度に依存する**、という相対論以前の常識には反した結論が得られる。以下で順を追って説明する。

- **静止系** O **における時刻の同期**

  静止系 O における「時間座標 t」とはそもそも何なのかについて改めて考えてみよう。そのために、静止系の全ての点 (x,y,z) に時計が置かれており、その読みが $t(x,y,z)$ であるという状況を考えてみる。それらの全ての時計を原点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ に置いた時計と同じ時刻にセット（この操作を**時刻の同期**と呼ぶ）できれば、その時刻 t が物理現象を記述するのに使える時間座標としての役割を果たしてくれる。すなわち、

  空間全体で同期された時計が示す時刻 $=$ **時間座標**

  であると考えればよい。

ここで、**空間的に離れた点に置かれた時計を同期する**にはどうしたらよいかを考えてみる。

– **原点に置かれた時計を別の点まで運んで時刻合わせを行う**とよい、と思うかもしれない。しかし、運び方次第で時計の時刻は変化してしまう（3.2.1 節で示した通り、動く時計はその速度に応じて進みが遅くなる）ため、この方法で離れた時計同士を同期することはできない。
– 電波時計やインターネット時計のように、ある基準の時計から時刻の信号を送って、それに各地点の時計を合わせるということも考えられる。この方法だと、信号の伝搬に時間がかかるために遠方の時計ほど遅れてしまう。しかし、その遅れさえ補正できれば正しく時間合わせをできそうである。

以下では、後者の方法を改良したもの、すなわち**互いに離れた時計同士の間で信号（光）をやり取りして時刻合わせを行う**方法について以下で考えてみることにする。

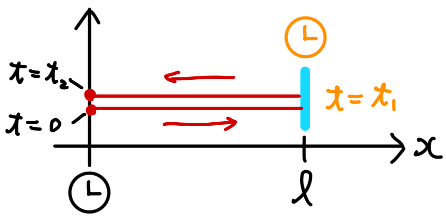


図 11: 原点と $x=\ell$ に置かれた時計の同期。原点の時計の時刻 $t=0$ に光を送り、$x=\ell$ に置かれた鏡で光を反射させて、それが原点の時計の時刻 $t=t_2$ に帰ってきたとする。また、反射の瞬間の時刻を鏡の地点 $x=\ell$ に置いた時計で計ったものが $t=t_1$ だったとする。

図 11 のように、原点に時計と光源を、距離 $x=\ell$ に別の時計と鏡を設置する。3.2.1 節で考えた光時計を進行方向向きに設置したものである。原点の時計で時刻 $t=0$ に光を発し、$x=\ell$ の鏡で反射させたものが時刻 $t=t_2$ に帰ってきたとする。一方、反射が起こった瞬間を位置 $x=\ell$ に置いた時計で計ったものが $t=t_1$ だったとする。光が往路・復路を通過しきるのに必要な時間は同じである。したがって、$x=\ell$ に置いた時計で計った時刻 $t=t_1$ が

$$t_1 = \frac{1}{2}t_2 \tag{3.7}$$

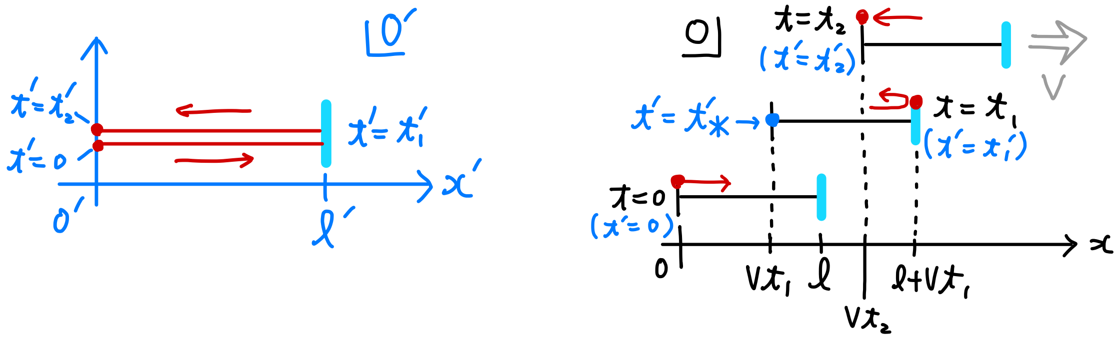
を満たしていれば、原点と位置 $x=\ell$ に置いた時計が同期されていると言えそうである。また、光の移動時間は経路長を光速で割った ℓ/c で与えられるから $t_1=\frac{\ell}{c}$ となる。

- **運動系 O' における時刻の同期**

では次に、運動系 O' における時刻の同期について考える。ただし、鏡の位置は O' 系の座標で $x'=\ell'$ の位置にあるとする（図 12(a) 参照）。運動系 O' に乗った観測者から見ると、時刻の同期の手続きは先ほどと全く同じであり

$$t_1' = \frac{1}{2}t_2' = \frac{\ell'}{c} \quad \Leftrightarrow \quad ct_1' = c\left(t_2'-t_1'\right) = \ell' \ . \tag{3.8}$$

では、この O' 系における時刻の同期の様子を、静止系 O 系から見てみよう（図 12(b) 参照）。ただし、初期時刻 $t=0$ で O' 系の原点は O 系の原点と一致しており、また鏡の位置は $x=\ell$ にあり、O' 系全体が x 正の方向に速度 V で移動しているとする。単純に $x=\ell'$ としていないのは、運動系の経路の長さ ℓ' が静止系では違った長さに見える場合を考慮に入れておくためである。



(a) 運動系 O' における時刻の同期　　(b) 静止系 O から見た、O' 系の時刻の同期

図 12: 運動系 O' における時刻の同期と、それを静止系 O から見たもの。

時刻 $t=0$ に光が鏡に向けて放射されたのち、光は以下のように伝搬することになる。

- $t=t_1$: 鏡に光が反射する。鏡は速度 V で右に移動しているので、反射が起こる時刻 $t=t_1$ で鏡は $x=\ell+Vt_1$ の位置にあるため

$$t_1=\frac{\ell+Vt_1}{c} \qquad \therefore \quad t_1=\frac{\ell}{c-V} \quad \Leftrightarrow \quad ct_1=\frac{\ell}{1-\beta}\,. \tag{3.9}$$

- $t=t_2$: 運動系 O' の原点に光が帰着する。図 12(b) からして、反射が起きてから O' 系の原点に着くまでに光が飛ぶべき距離は $\ell+Vt_1-Vt_2$。これを光速 c で割ったものが光の伝搬時間 t_2-t_1 となるので

$$t_2-t_1=\frac{\ell+Vt_1-Vt_2}{c}$$
$$\therefore \quad t_2-t_1=\frac{\ell}{c+V} \quad \Leftrightarrow \quad c\,(t_2-t_1)=\frac{\ell}{1+\beta}\,, \quad ct_2=\frac{\ell}{1+\beta}+\frac{\ell}{1-\beta}=\frac{2\ell}{1-\beta^2}\,. \tag{3.10}$$

- **運動する系についての同時性のずれ**

ここまでで得られた結果を改めて眺めてみると、何か妙なことが起こっていることに気づく。

- 静止系 O' の時計で計ると、光の発射→反射→光の帰着 は等間隔で起こっていた (式 (3.8) 参照)。
- 一方、これを運動系 O から見たときには、前半（光の発射→反射）と後半（反射→光の帰着）の所要時間 (3.9), (3.10) が互いに異なっている ($t_2-t_1\neq t_1$)。

この時点で、少なくとも運動系 O' の時計と静止系 O の時計には何らかのずれがあることが分かる。それをより具体的に見るため、光時計の左端に固定された時計が、図 12(b) における反射の瞬間に指し示している時刻 $t'=t'_*$ を求めてみよう。この時計の終時刻は $t'=t'_2$ で、一方 O 系で見た反射の瞬間と終時刻はそれぞれ $t=t_1,t_2$ だったのだから

$$t'_*=t'_2\times\frac{t_1}{t_2}=2t'_1\times\frac{\frac{\ell}{1-\beta}}{\frac{2\ell}{1-\beta^2}}=(1+\beta)\,t'_1\neq t'_1\,. \tag{3.11}$$

なお、t'_1 は光時計の右端に固定された時計が反射の瞬間に指している時刻であり、左端の時計の方が $\beta t'_1$ だけ時刻が進んでいることになる。

したがって、**運動系 O' では全空間にわたって時計が同期されていても、静止系 O から見ると進行方向にある時計ほど遅れているように見える**ことが分かった。そのため、O' 系では同時に起こった現象が O 系から見ると同時には起こらないように見えるという意味で、**同時性はどの慣性系から見るかによって変わる**と結論付けられる。。これも特殊相対論ならではの特徴的な現象の一つである。

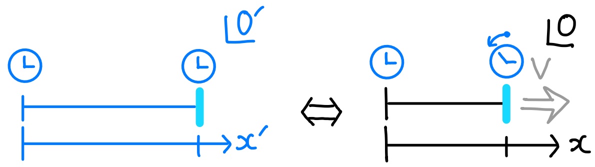


図 13: 運動系 O' に乗った状態で全空間にわたって時計を同期しても、静止系 O から見ると進行方向にある時計ほど遅れているように見える。特に、O' 系では同時に起こった現象が、O 系から見ると同時には起こらないように見える。

次回の講義では、以上で見た時間・空間座標の変換をひとまとめにしたものとして得られる**ローレンツ変換**の導出を行う。