

第5回 ローレンツ変換の性質

前回の講義では、光速度一定の原理に基づいてローレンツ変換を導出した。この変換に基づくと、ガリレイ変換に従う相対論以前の物理とは根本的に異なる物理現象が予言される。そのようなローレンツ変換の物理的性質について説明する。

5.1 復習：ローレンツ変換

静止系 O (座標: (ct, x, y, z)) と、それに対して x 軸の方向に速度 V で移動している運動系 O' (座標: (ct', x', y', z')) との間の座標変換であるローレンツ変換は

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (5.1)$$

$$x' = \gamma(-\beta ct + x) \quad (5.2)$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad (5.3)$$

で与えられるのであった。ただし

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.4)$$

β は速度 V を光速 c で割って無次元化したもので $-1 \leq \beta \leq 1$ 。 γ は gamma factor とも呼ばれる量で、 $|V|$ が光速 c に比べて十分小さいときは 1, $|V|$ が光速に近づく ($|\beta| \rightarrow 1$) につれて無限に増大する (図 19(b) 参照)。なお、 $\gamma(-V) = \gamma(V)$ であることに注意。

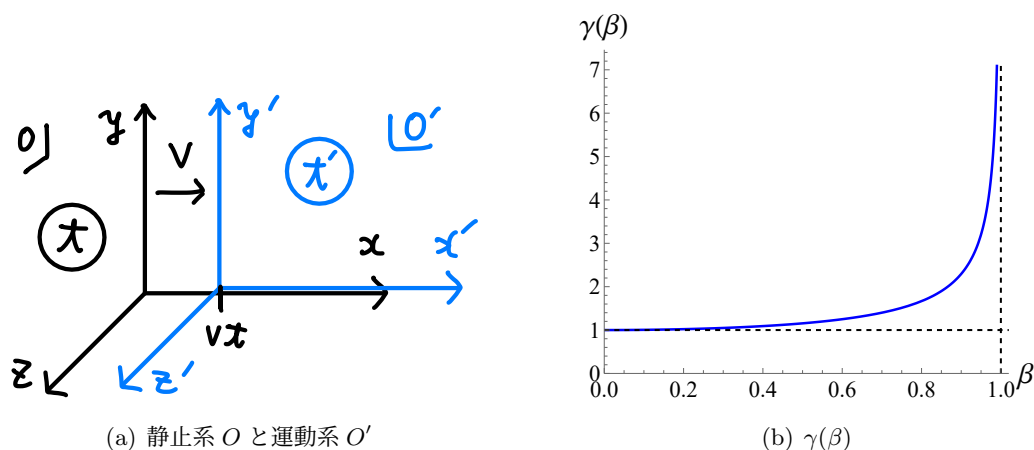


図 19: (a) 静止系 O と運動系 O' 。 (b) gamma factor $\gamma(\beta)$ のグラフ。

逆変換

式 (5.1)–(5.3) は、ある点の静止系 O での座標を運動系 O' での座標に書き直すときに便利な形に書いてある。これとは逆に、運動系 O' の座標が与えられたときに静止系 O での座標を出してくれる式、すなわちローレンツ変換 (5.1)–(5.3) の逆変換もあると、運動系 O' の物理を静止系 O から見るとどうなるかを考える際に便利である。これを以下に示す。

逆変換を構築する方法はいくつかある。結果としては単に式 (5.1)–(5.3) で $V \rightarrow -V$ (すなわち $\beta \rightarrow -\beta$) としたものが逆変換になっているので、実用上はそれを使えばよい。以下で見る通り、直接計算で逆変換を構築するのも簡単にできる。そのために、まず変換 (5.1)–(5.3) を行列表示してお

くと

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\equiv \mathbf{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv \Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\equiv \mathbf{x}} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x}. \quad (5.5)$$

逆変換は、変換行列 Λ の逆行列で与えられる：

$$\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \Lambda^{-1} \mathbf{x}' \quad (5.6)$$

変換行列 Λ の (y, z) 部分は単位行列そのものなので、以下では省略して (t, x) 部分だけに注目する。すると、逆行列 Λ^{-1} は

$$\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1-\beta^2} \begin{pmatrix} 1 & +\beta \\ +\beta & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

従って、逆変換 $\mathbf{x} = \Lambda^{-1} \mathbf{x}'$ は

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

もしくは、成分ごとに書き下すと

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad (5.9)$$

$$x = \gamma(\beta ct' + x') \quad (5.10)$$

$$y = y', \quad z = z'. \quad (5.11)$$

最初に述べた通り、この逆変換は元の変換 (5.1)–(5.3) について速度を反転 ($\beta \rightarrow -\beta$) したものと同一形である。以下では、この逆変換も単に「ローレンツ変換」と呼ぶことにする。

5.2 ローレンツ変換にまつわる物理現象

ガリレイ (逆) 変換

$$t = t', \quad x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z' \quad (5.12)$$

とローレンツ (逆) 変換 (5.9)–(5.11) との相違点は、**変換後の時間座標 t' に元の空間座標 x が混ざること** (式 (5.9))、および ct', x' それぞれに**係数 γ がかかる**ことである (式 (5.9), (5.10))。それぞれ、以下で紹介するような物理的意味がある。

5.2.1 動く時計の遅れ

これまでの講義でも紹介した通り、運動系 O' に乗っている時計を静止系 O から見ると $\gamma(V)$ 倍に遅く進んで見える。直感的な方法でこれを導出する場合は、進行方向と垂直な方向に置いた光時計を考えるとよいのであった。

運動系 O' の原点 $x' = 0$ に固定された時計 (時刻 t') を静止系から見ると、式 (5.9) で $x' = 0$ とした式に従う：

$$t = \gamma t'. \quad (5.13)$$

例えば、 O' 系の時計が1秒を刻むのにかかる O 系での時間は $t = \gamma t' = \gamma \times 1$ 秒で、 $\gamma \geq 1$ だからこれは1秒よりも長い。運動している O' 系の時計の方が $\gamma(V)$ 倍にゆっくり進んで見える、ということを表している。²⁴

²⁴逆に、運動系 O' から静止系 O の時計を見た場合は、 O 系の時計が速度 $-V$ で運動しているように見え、そのため $\gamma(-V)$ 倍に遅く進んで見える。 O 系と O' 系のどちらから見ても相手の方の時計が遅く進んで見えるわけだが、次節で説明する同時性のずれによりつじつまが合うようになっている。

5.2.2 同時性のずれ

ガリレイ変換 (5.12) とローレンツ変換の t の式 (5.9) とのもう一つの相違点は、後者には空間座標 x' が混ざってくることである。そのため、運動系 O' に乗っている観測者からすると同時 (同じ t') に起こった現象でも、静止系から眺めると異なった時刻 t に起こったように見える、ということを意味する。「同時」という概念は観測者 (の速度) ごとに異なる、と言ってもよい。

このような現象が起こること自体はこれまでの講義でも解説したが、ローレンツ変換の式 (5.9) に基づいてより具体的に見てみよう。運動系 O' の各地点に設置されている時計の時刻 t' を、静止系からある時刻 $t = 0$ に読み取ってみる。この場合、式 (5.9) で $t = 0$ とした式が成立するので

$$\gamma(ct' + \beta x') = 0 \quad \therefore t' = -\frac{\beta x'}{c} = -\frac{Vx'}{c^2}. \quad (5.14)$$

すなわち、運動系 O' の進行方向 (x') の方にある時計ほど過去の時刻を指し示している、もしくは時刻が遅れていることになる。

この現象の起源は、次のような思考実験を考えるとわかりやすい²⁵。図 20 のように、 O' 系に車両を設置して、その中心点から車両の先端と後端にいる観測者に光を送る。この車両が静止系 O に対して前方に等速度で動いている状況を考える。

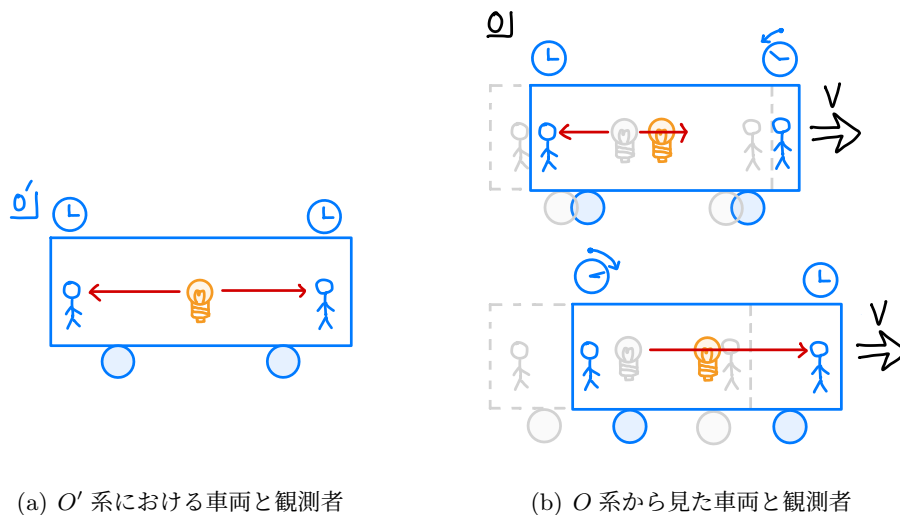


図 20: O' 系の車両と観測者。 O' 系から見ると両方の観測者が同時に光を受け取るが、これを静止系 O から見ると車両先端の観測者の方が後で光を受け取ることになる。

この実験を O' 系と O 系のそれぞれから見た様子は以下ようになる。

- O' 系: O' 系の立場からすると、この二人の観測者は同じ時刻 (t') に光をキャッチする。
- O 系: 静止系 O から見るとこの車両は前方に動いているので、車両の前方/後方にいる観測者はそれぞれ光源に対して遠ざかる/近づくように見える。静止系 O でも光の伝搬速度は c で一定なので、車両の後方にいる観測者が先に光をキャッチし、その後に前方の観測者が光をキャッチするようになる。

どちらの立場から見たとしても、光が各観測者に届いた瞬間に各観測者が持っている時計は同時刻 (t') を指しているはずである。これが静止系 O での見え方と整合的になるためには、 O 系から見ると車両の先端にいる観測者の持っている時計が元から遅れているとするほかない。そうなっていることにより、車両先端の観測者は後の時刻 (t) で光をキャッチしたにもかかわらず、本人としては後端の観測者と同じ時刻 (t') に光をキャッチしたように認識する、ということになる。

²⁵ 前回の講義で行ったローレンツ変換の導出に使ったセットアップと本質的には同じものである。光の各点への到着時刻などをこの系について書き下せば同じローレンツ変換の表式が導出できる。

5.2.3 ローレンツ収縮

ローレンツ変換の x 成分 (式 (5.2)) に基づくと、動いている物体の長さは静止時の長さの $1/\gamma$ 倍に縮むという現象が予言される。起こる現象自体は、マイケルソン・モーリーの実験の結果を非相対論的な物理で説明しようとした際に導入されたローレンツ変換と全く同一であるため、特殊相対論に基づいて導出されたこの収縮現象もその名で呼ばれる。

(静止時の) 長さが L' の物体が O' 系に置かれているとして、それが静止系 O に対して速度 V で運動しているとする。そして、静止系 O にいる観測者がこの物体の長さのある瞬間 $t = 0$ に測った長さが L であったとする。式 (5.2) に基づくと、その長さ L は

$$\underbrace{x'}_{=L'} = \gamma(-\beta \underbrace{ct}_{=0} + \underbrace{x}_{=L}) \quad \therefore L = \frac{1}{\gamma} \times L' \leq L' . \quad (5.15)$$

$\gamma \geq 1$ なので、静止系 O で計った長さ L の方が物体静止時の長さ L' よりも短くなっている。

この現象は、動いている時計の遅れに基づいて以下のように導出することもできる。静止系 O から見て速度 V で走る車両について、その長さ L を測ることを考える。今回は、図 21(a) のように O 系の原点 $x = 0$ に時計を置いておき、 $x = 0$ の地点を車両の先端が通過してから後端が通過するまでの所要時間 T を測って、それに車両の速度 V をかけることで長さ L を求めることにする：

$$L = VT . \quad (5.16)$$

では、この測定の様子を車両に固定された運動系 O' から見てみる (図 21(b))。すると

- O' 系からは静止系 O の時計は速度 $-V$ で動いているように見える。
- その動いている時計が車両の先端から後端までを通り過ぎる間に、その時計は (O 系で見たときと同じく) T だけの時間を刻む。

さて、動いている時計の刻みは $\gamma(V)$ 倍に遅くなって見えるのだから、動いている時計が車両の先端から後端までを通過するのにかかる時間を O' 系の車両に乗った人が測ると

$$T' = T \times \gamma . \quad (5.17)$$

従って、車両に乗った人は車両の長さ L' が

$$L' = VT' = \gamma VT = \gamma L \quad (5.18)$$

であると判断するだろう。すなわち、物体の静止時の長さ L' と比べて、その物体が速度 V で運動している状態で計った長さ L は $1/\gamma(V)$ 倍に縮んでいることになる。

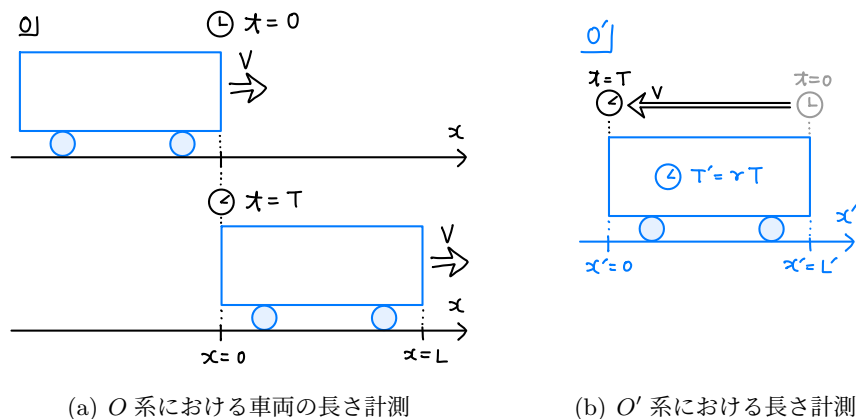


図 21: 動く車両の長さ計測。静止系では車両の通過時間 T を測る。車両に乗った観測者からは、時計の方が逆向きに速度 V で車両先端から後端へ動いていくように見える。

5.3 非相対論的極限

以上ではローレンツ変換とガリレイ変換との相違点に注目し、それを起源として生じる新たな物理現象についてまとめた。これらの現象を実験的に確認することは可能である一方、我々の普段の生活の中でこれらの現象に気づくことはまずない。これは、日常生活で見られる物理現象のほとんどにおいて、速度 V が光速 c よりも十分に遅いためである。従って、この速度が遅い極限（非相対論的極限と呼ぶ）：

$$|\beta| = \frac{|V|}{c} \ll 1 \quad (5.19)$$

を取れば特殊相対論においても相対論以前の物理が再現され、特に静止系と運動系との座標間の関係はガリレイ変換に帰着すると期待される。

このような物理的直観を数式の上でも確認しておく。特殊相対論においては静止系と運動系はローレンツ変換で結ばれる、というのがここまでの結果だった。そこで、ローレンツ変換の式 (5.9)–(5.11) について非相対論的極限 $|\beta| \rightarrow 0$ を取った時にどのような変換に帰着するかをしてみる。まず、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \xrightarrow{|\beta| \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4). \quad (5.20)$$

従って、 $|\beta| \rightarrow 0$ の時にローレンツ変換の式 (5.9)–(5.11) を β の 1 次までで近似する式を書き下すと

$$ct = ct' + \beta x' + \mathcal{O}(\beta^2) \quad (5.21)$$

$$x = \beta ct' + x' + \mathcal{O}(\beta^2) = x' + Vt' + \mathcal{O}(\beta^2) \quad (5.22)$$

$$y = y', \quad z = z'. \quad (5.23)$$

$\mathcal{O}(\beta^2)$ 項を無視すれば、式 (5.22), (5.23) はガリレイ変換と一致する。また、 t についての式 (5.21) は

$$t \simeq t' + \frac{V}{c} \cdot \frac{x'}{c} \quad (5.24)$$

と書き換えられる。この右辺第 2 項は、日常的な物理現象のスケールでは第 1 項よりも十分小さくなっている。例えば、 t, t' として約 1 秒間を取ったとすると、それに対して右辺第二項が同等の大きさになるのは $\frac{|V|}{c} \cdot \frac{|x'|}{c} \sim 1$ となった場合である。一方、速度として $|V| = 1 \text{ m/s}$ 、長さとして $x' = 1 \text{ m}$ を取ると

$$\frac{|V|}{c} \cdot \frac{|x'|}{c} \simeq 10^{-17} \ll 1 \quad (5.25)$$

となり、右辺第 1 項よりも十分に小さい。従って、少なくとも上述のような時間・長さスケールの物理現象を考えるうえでは右辺第二項を無視して差し支えない。

以上の結果は、**非相対論極限ではローレンツ変換はガリレイ変換に帰着する**ことを意味する。日常的なスケールの物理現象を考える限りにおいてはガリレイ変換を使ってもほぼ差し支えなく、一方光速に近い速度を持つ粒子が存在する場合などでは相対論的效果が現れてくる、ということになる。

5.4 ローレンツ変換の時空図

ローレンツ変換 (5.1), (5.2) を時空図 ((ct, x) ないし (ct', x') を縦軸・横軸とするプロット) で書いてみると図 22 のようになる。例えば、 O 系の座標 (ct, x) が通常の直交座標になるように書くと図 22(a) が得られる。このグラフを書くためには、式 (5.1), (5.2) で $ct' = 0, 1, 2, \dots$ や $x' = 0, 1, 2, \dots$ とした式：

$$ct = \beta x + \frac{ct'}{\gamma} = \beta x + \frac{1}{\gamma} \times 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

$$x = \beta ct + \frac{x'}{\gamma} = \beta ct + \frac{1}{\gamma} \times 0, 1, 2, \dots \quad (5.27)$$

に対応する直線群を引けばよい。これらが運動系 O' における座標一定面 ($ct' = \text{一定}$, $x' = \text{一定}$) に対応する。式 (5.26) は傾き β , 切片 ct'/γ の直線に対応し、それを直線 $ct = x$ について鏡映した直線が式 (5.27) に対応する。

逆に、運動系 O' から見た静止系 O の座標系を書くためには、ローレンツ逆変換の式 (5.9), (5.10) について同様の作業を行えばよい (図 22(b) 参照)。 O 系の座標を基準とした図 22(a) について $\beta \rightarrow -\beta$ (左右反転と等価) として $(ct, x) \leftrightarrow (ct', x')$ と置き換えたものになっている。これは、ローレンツ逆変換が元の変換について速度を反転 ($\beta \rightarrow -\beta$) したものになっているためである。

この図から、これまでに解説してきた特殊相対論特有の性質を読み取ることができる。

- **光速一定**：どちらの座標系から見ても光の経路は $ct = x$ ないし $ct' = x'$ (に平行な直線群) となる。 O 系、 O' 系のどちらから見ても光速は c で等しい、ということに対応している。
- **動く時計の遅れ** (図 22(a) の緑点、図 22(b) の左の黒点)：運動系 O' の原点に固定された時計で $ct' = 1$ に対応する点の ct 座標は γ であり、 O' 系で計った時間である 1 よりも長い。動く時計の進みを静止系から見ると γ 倍に遅くなっていることを表している。なお、 O' 系から O 系に固定された時計を見ても遅くなって見える (図 22(b) の左の黒点)。その意味で、 O 系と O' 系は互いに対等になっている。
- **同時性のずれ** (図 22(a) の $ct' = \text{一定}$ の直線など)：運動系 O' の時刻一定面 ($ct' = \text{一定}$ の直線) は、静止系 O の時刻一定面 ($ct = \text{一定}$ の直線) とずれている。「同時」の意味が観測者の速度ごとに異なる、ということに対応する。
- **ローレンツ収縮** (図 22(a) の青点、図 22(b) の右の黒点)：運動系 O' の原点から長さ 1 の地点 ($x' = 1$) を O 系の時刻 $ct = 0$ の瞬間に見ると位置 $x = 1/\gamma < 1$ の地点にある。運動する物体の長さが $1/\gamma$ 倍に縮んで見えるというローレンツ収縮に相当する。なお、静止系 O の物体の長さを運動系 O' から見たときも同様に収縮して見える (図 22(b) の右の黒点)。

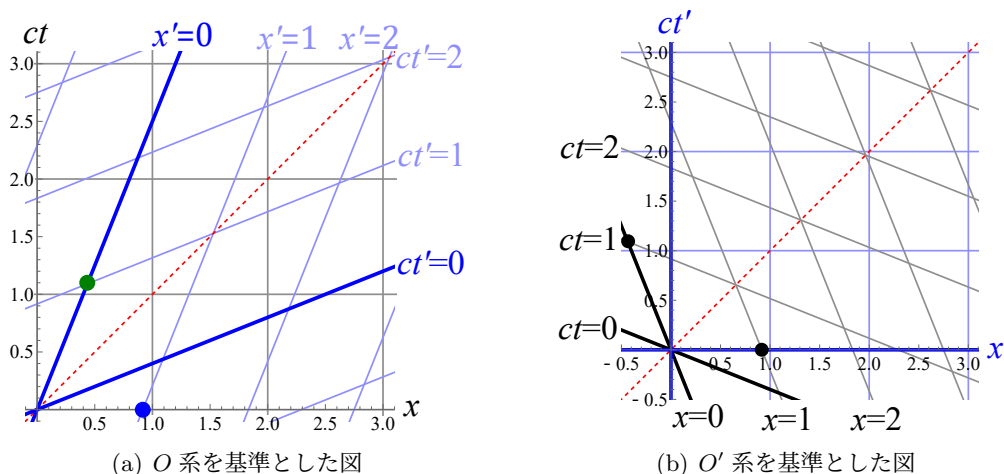


図 22: (a) 静止系 O の座標 (ct, x) と運動系 O' の座標 (ct', x') を $\beta = 0.4$ の場合にプロットしたもの。この速度 β に対して $\gamma \simeq 1.09$, $1/\gamma \simeq 0.92$ である。青点は $(ct, x) = (0, 1/\gamma)$ で、速度 β で動く長さ 1 の棒を静止系 O で見たときの長さに対応する。緑点は O' 系の原点の時計で時刻 $ct' = 1$ に相当する点で、 O 系の時刻 1 よりも後の時刻となっている。(b) 同じグラフを O' 系の座標 (ct', x') を基準として書いたもの。黒点は O 系で長さ $x = 1$, 時間 $ct = 1$ を O' 系で計った時の長さ・時間を表す点。図 (b) は図 (a) を左右反転して座標を $(ct, x) \leftrightarrow (ct', x')$ と入れ替えたものになっていることに注意。