第 6 回　時空と因果性

今回は以下の内容を順次解説する。

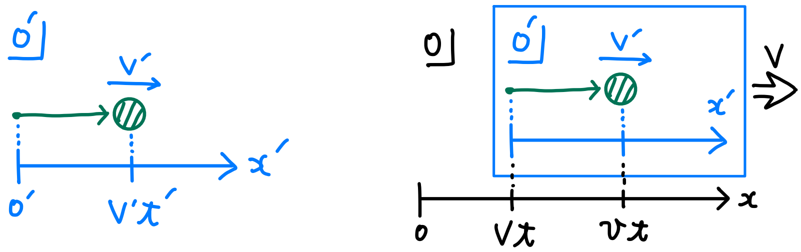
- **速度の合成則** $\to$ 光速は粒子・信号の最高速度
- 光速に基づいた**時空**の**因果性**
- 因果関係を定める**世界間隔** Δs^2
- 世界間隔の**ローレンツ不変性**と**固有時間・固有長**

6.1　速度の合成則

簡単のため、x 方向の速度についてだけ考える。静止系 O に対して x 方向に速度 V で動く運動系 O' を考え、この O' 系上で x' 方向に速度 V で運動する粒子があったとする。これを静止系 O から見たときの速度 v は、ガリレイ変換に基づくと単に

$$v = V + V' \tag{6.1}$$

で与えられるのであった。



(a) O' 系　　(b) O 系

図 23: 速度の合成で考える系。速度 V' の粒子を速度 V だけ加速する。

では、特殊相対論に基づいて速度の合成則を改めて導出してみよう。O 系から見て x 方向に速度 $V = c\beta$ で動く O' 系から O 系へのローレンツ変換は

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \qquad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) . \tag{6.2}$$

O' 系で速度 V' で動く粒子の軌道が

$$x' = V't' \equiv \beta' ct' \tag{6.3}$$

で与えられたとする。これを O 系から見たときの粒子の軌道は、ローレンツ変換 (6.2) に従うと

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ \beta' ct' \end{pmatrix} = \gamma ct' \begin{pmatrix} 1 + \beta\beta' \\ \beta + \beta' \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

$$\therefore \quad ct = \gamma ct' \left(1 + \beta\beta'\right) , \qquad x = \gamma ct' \left(\beta + \beta'\right) . \tag{6.5}$$

粒子軌道の起点を原点にセットしてあったので、O 系で見た粒子の速度 v は

$$v = \frac{x}{t} = c \cdot \frac{\gamma ct' \left(\beta + \beta'\right)}{\gamma ct' \left(1 + \beta\beta'\right)} = c \cdot \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} = \frac{V + V'}{1 + \frac{VV'}{c^2}} . \tag{6.6}$$

これが相対論的な速度の合成則である。

- **非相対論的極限**

  速度が光速よりも遅い極限 ($|V|, |V'| \ll c$) で、式 (6.6) は

$$v = \frac{V+V'}{1+\frac{VV'}{c^2}} = \left(V+V'\right)\left(1-\mathcal{O}\left(\frac{VV'}{c^2}\right)\right) \ . \tag{6.7}$$

  従って、$\mathcal{O}\left(\frac{VV'}{c^2}\right)$ 項を無視する近似では相対論的な速度の合成則 (6.6) は通常の（非相対論的な）式 (6.1) に帰着する。

- **光速度は不変**

  運動系 O' で光速 $V' = c$ で運動する粒子を静止系 O から見たときの速度 v は

$$v = \frac{V+c}{1+\frac{Vc}{c^2}} = c \ . \tag{6.8}$$

  すなわち、光速はどの慣性系から見ても変化せず c のままである。

- **光速＝最高速度**

  光速以下の速度を合成しても、**合成された速度 v は光速 c を越えない**ことを以下のようにして示せる。式 (6.6) より、光速を越えない速度 $|\beta|, |\beta'| < 1$ について

$$1-\frac{|v|}{c} = 1-\left|\frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}\right| = \frac{1+\beta\beta'-|\beta+\beta'|}{1+\beta\beta'} \ . \tag{6.9}$$

  この分子について

$$\left(1+\beta\beta'\right)^2 - |\beta+\beta'|^2 = \beta^2\beta'^2 + 2\beta\beta' + 1 - (\beta^2+2\beta\beta'+\beta'^2) = \left(1-\beta^2\right)\left(1-\beta'^2\right) > 0 \ . \tag{6.10}$$

  この結果と式 (6.9) より、$1-\frac{|v|}{c} > 0$, すなわち合成された速度は光速を越えない ($|v| < c$) ことが示された。すなわち、**光速以下の速度で動く物体がいくら加速しても光速には到達できない**。

6.2 時空の因果性

前節で示した通り、物体はどれだけ加速してもその速度が光速に到達することはない。また、光速度で運動する物体を加速しても光速を越えさせることはできない。そのため、相対論においては**光速は物体・信号の最高速度**としての役割を果たす。また、光の伝搬面を基準として**因果性**（ある点を基準として、別の点がその未来・過去・その他のいずれにあるか）を厳密に定めることができる。順を追って説明する。

6.2.1 時空

相対論以前の物理では**時間座標** t と**空間座標** $\mathbf{x}$ はあくまで別個のものであった。実際、ガリレイ変換において時間座標は不変であり、空間座標も速度の分シフトされるだけである。

一方、相対性理論においては、ローレンツ変換 (6.2) のもとで時間と空間は互いに混ざり合ってしまい、互いに明確に区別されるものではない。むしろ、両者を一体のものとしてとらえたほうがすっきりする。そのような立場を取ることにして、時間と空間をまとめて**時空**と呼ぶことにする。例えば、私たちの世界は時間（1 次元）と空間 3 次元で構成される **4 次元時空**である。また、時空の中のある時刻・位置の一点 $(ct, \mathbf{x})$ のことを**時空点**、その時刻・位置で起きた何らかの現象のことを**事象 (event)** と呼ぶ。

6.2.2　世界間隔

本節冒頭で述べた通り、時空の因果性は光の伝搬面を基準として定められる。その光の経路を解析するのに便利な量である**世界間隔**を本節で導入する。

時空の原点と別の点 (ct, x, y, z) との間の**世界間隔** Δs^2 を

$$\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(ct)^2 + |\mathbf{x}|^2 \tag{6.11}$$

と定義する[26]。この量の性質は下記の通り。

- **距離の一般化**：Δs^2 は空間的な距離の 2 乗 $x^2 + y^2 + z^2$ に $-(cdt)^2$ を付け加えたものになっている。空間成分と異なり負符号がついているために通常の距離とは異なった振る舞いをする。
- **光の経路上で** $\Delta s^2 = 0$：時刻 $t = 0$ に原点から光を飛ばしたとすると、光のその後の位置は $|\mathbf{x}| = ct$ で与えられる。したがって、光の経路に沿って $\Delta s^2 = -(ct)^2 + |\mathbf{x}|^2 = 0$ となる。
- Δs^2 **はローレンツ不変量**

  簡単のため、時空のうち (ct, x) 部分だけを考える。O' 系の原点と別の点 (ct', x') との間の世界間隔を O' 系で計ると

  $$\Delta s'^2 = -(ct')^2 + x'^2 \ . \tag{6.12}$$

  この 2 点間の世界間隔を O 系から測った値を求めるには、ローレンツ変換 (6.2) によって O 系における 2 点の座標を出せばよい。まず、O' 系の原点 $(ct', x') = (0, 0)$ は O 系の原点 $(ct, x) = (0, 0)$ に写される。一方、O' 系の点 (ct', x') の O 系における座標は

  $$ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right) \ , \qquad x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right) \ . \tag{6.13}$$

  したがって、O 系で計った 2 点間の世界間隔は

  $$\begin{aligned}\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 &= -\gamma^2\left(ct' + \beta x'\right)^2 + \gamma^2\left(x' + \beta ct'\right)^2 \\ &= \gamma^2\left[-\left(1-\beta^2\right)(ct')^2 \left(1-\beta^2\right) x'^2\right] = -(ct')^2 + x'^2 = \Delta s'^2 \ .\end{aligned} \tag{6.14}$$

  すなわち、静止系 O から測った場合でも世界間隔は不変 ($\Delta s^2 = \Delta s'^2$) である。Δs^2 はローレンツ変換で変化しない、というこの性質のことを「Δs^2 は**ローレンツ不変量**である」とも言う。

6.2.3　因果関係

光よりも速く運動する粒子・信号は存在しないということを踏まえると、座標 (ct, x) の点の原点に対する因果関係は下記の 3 つのパターンしかないことが分かる。図 24 も参照のこと。原点から未来・過去向きに飛ばした光の経路 $x = \pm ct$ が境界線になっている。

1. **未来**：点 (ct, x) が未来向きの光の経路の内側の領域 $|x| \leq ct$ $(t > 0)$ に入る場合、原点からその点に (光速よりも遅い) 粒子・信号を送ることができる。逆はできない。この点は原点に対して**未来**の領域にある、と言う。

   この場合、2 点間の世界間隔は $\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 \leq 0$ (ただし $t > 0$) となる。

2. **過去**：同様に、点 (ct, x) が過去向きの光の経路の内側の領域 $|x| \leq -ct$ $(t < 0)$ に入る場合、その点から原点へ粒子・信号を送ることができ、逆はできない。この点は原点に対して**過去**の領域にある、と言う。

   この場合も、2 点間の世界間隔は $\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 \leq 0$ (ただし $t < 0$) となる。

---

[26] 一般の 2 点 $(ct_1, \mathbf{x}_1), (ct_2, \mathbf{x}_2)$ の間の世界間隔は、$c\Delta t = ct_2 - ct_1, \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2$ として $\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta\mathbf{x}^2$ と与えられる。また、時空中の 2 点間の座標が (cdt, dx, dy, dz) だけ離れている場合について、その 2 点間の（微小）世界間隔 $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ を使うことも多い。

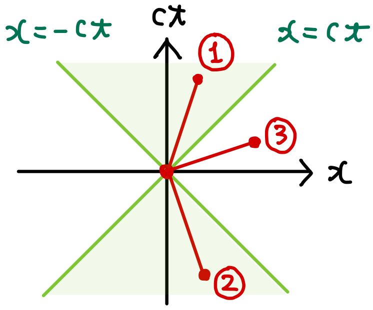


図 24: 原点についての因果的領域。緑線は時刻 $t = 0$ に原点 $x = 0$ から出た光の経路。

3. **空間的**：点 (ct, x) が過去向き・未来向きの光の経路の外側の領域 $|x| > ct$ に存在するとき、原点からこの点へ、もしくはこの点から原点へ粒子や信号を送ることはできない。この 2 点は互いに因果関係がない、またはこの 2 点は**空間的**に離れている、などと言う。

   この場合、2 点間の世界間隔は $\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 > 0$ となる。

- **因果関係はローレンツ不変**

  前節で説明した通り、世界間隔 Δs^2 はローレンツ変換で変化しない。また、2 点間の因果関係がどの種類になるかは Δs^2（と t）の符号で決まる、というのが上で述べた結果の一つであった。したがって、2 点間の因果関係はローレンツ変換で不変、すなわち**どの慣性系から見ても因果関係は変わらない**。例えば、粒子の速度はどの速度の慣性系から見るかで変化する。2 点間の因果関係は、そのような慣性系の選び方に由来する不定性なしに決まっていることになる。

- **空間的に離れた 2 点の時間順序は不定**

  上記で言うところの「未来」・「過去」は、単純に時間座標 t が原点の時刻 $t = 0$ より前か後かで決めているのではないことに注意。特に、空間的に離れた 2 点間の場合、そのどちらの時間座標が先になるかはローレンツ変換、すなわちどの速度の慣性系から見るかによって入れ替わってしまう。そのため、この場合は「どちらが時間的に先か」を定めることにあまり意味がない。一方、「互いに信号のやり取りをできない」という性質はどの慣性系でも必ず成立している。観測の仕方に依存しない性質である、という意味でこちらの方がより重要である。

- **光円錐**

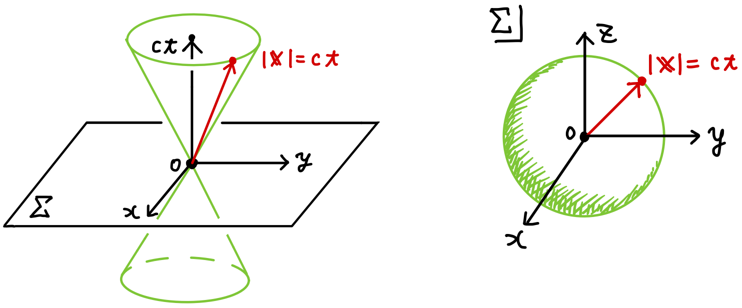
  y, z 座標も考慮に入れた場合の光の波面は $|\mathbf{x}| = |ct|$ 上にあるが、時間座標を高さ、空間座標を横方向の位置としてこれを図示すると、原点を頂点とする円錐となる。ただし、円錐の時刻一定面による断面は円（2 次元平面上の 1 次元球面）ではなく、3 次元空間中の 2 次元球面である。この光の伝搬面が描く（高次元版の）円錐を**光円錐**と呼ぶ。図 25 参照。時刻 t が一定となる面 Σ は 3 次元空間 (x, y, z) となるが、空間方向を 1 次元つぶして 2 次元面のように描くと、上記の円錐状の構造が見て取りやすくなる。

6.3　固有時・固有長

世界間隔のもう一つの物理的な意味は、**時計・物体が静止している状態で計った時間・長さ**であり、それぞれ**固有時・固有長**と呼ばれる。

- **固有時**：静止している時計（時刻: t）を原点に置く。その位置は $(ct, x) = (ct, 0)$ となるが、この点と原点との世界間隔は

$$\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 = -(ct)^2 \ . \tag{6.15}$$



(a) 光円錐　　(b) 時刻 t における断面

図 25: 光円錐の図。図 25(a) は 3 次元空間 (x, y, z) である時刻一定面 Σ を 2 次元面 (x, y) として書いたもの。図 25(b) は光円錐の時刻 t における断面。3 次元空間内の 2 次元球面となる。

したがって、世界間隔は時計の時刻と $t = \frac{1}{c}\sqrt{-\Delta s^2}$ という関係にある。

- **固有長**：静止している棒（長さ: L）を原点から x 軸方向に向けて置く。この棒の両端の時刻 $t = 0$ における位置は $(ct, x) = (0, 0), (0, L)$ となるが、この 2 点間の世界間隔は
$$\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 = L^2 \ , \tag{6.16}$$
すなわち棒の長さは $L = \sqrt{\Delta s^2}$ で与えられる。

世界間隔 Δs^2 はローレンツ不変、すなわちどの速度の慣性系から見ても変化しない。したがって、動いている時計・棒があった場合にその「両端」の間の世界間隔を求めれば、その時計・棒が静止しているときの時間・長さが求められることになる。この量は観測の仕方（観測を行う慣性系の選び方）に依存しない物体固有の量となるので、それぞれ**固有時・固有長**とよばれる。

例えば、動いている時計の位置が $(ct, x) = (ct, Vt)$ だったとすると、原点との世界間隔は
$$\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 = -(ct)^2 + (Vt)^2 = -(ct)^2\left(1 - \beta^2\right) = -\frac{1}{\gamma^2}(ct)^2 \ . \tag{6.17}$$
したがって、初期時刻 $(t = 0)$ とその後のある時刻 t との間の固有時間は $\frac{1}{c}\sqrt{-\Delta s^2} = \frac{t}{\gamma}$ である。動いている時計の刻みは $\frac{1}{\gamma}$ 倍に遅くなって見えるので、t 秒経過後に動いている時計は t/γ 秒しか刻んでいない、ということと対応している。

6.4　ローレンツ変換の別の導出法

世界間隔 (6.11) のローレンツ変換に対して不変であった。実は、この性質は**平面上の回転**と密接な関係にあることが以下のようにしてわかる。

- **距離と回転変換**

原点と位置 (x, y) の点を結ぶ線分を考えると、その長さ ℓ は
$$\ell^2 = x^2 + y^2 \tag{6.18}$$
で与えられる。この線分を原点について回転させても、長さ ℓ はもちろん変化しない。

この事実を数式で書き表してみよう。点 (x, y) を原点について角度 θ だけ回転させることを考える。回転後の位置を (x', y') とすると、その座標は以下の**回転変換**で求められる：
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \ . \tag{6.19}$$

回転後の原点との距離 ℓ' は、回転前の距離 ℓ から変化しない：

$$\ell'^2 = x'^2 + y'^2 = (x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = x^2 + y^2 = \ell^2\ . \tag{6.20}$$

- **距離** ℓ^2 $\quad\rightarrow\quad$ **世界間隔** Δs^2

  平面上の距離 (6.18) において、座標 y はもちろん実数である。ここで、y 軸をあえて実数ではなく虚数方向に伸ばしてみることにする。これを実現するべく $y \rightarrow ict$（ct は実数）と置き換えると、距離の式 (6.18) は

$$\ell^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (ict)^2 = -(ct)^2 + x^2 = \Delta s^2 \tag{6.21}$$

  のとおり、世界間隔の式 (6.11) に一致する。

- **回転** $\quad\rightarrow\quad$ **ローレンツ変換**

  さて、この置き換えを回転変換の式 (6.19) でもやってみよう。変換後の座標について $y' \rightarrow ict'$ と同様の置き換えを行うと

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ -i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}\ . \tag{6.22}$$

  変換行列に虚数単位 i が入っているので、変換後の座標 (ct', x') を実数にするためには工夫が必要になる。結果としては、角度を虚数にする $(\theta \rightarrow i\eta)$ にするとうまくいくことが以下のようにしてわかる。まず、

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\ , \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\ . \tag{6.23}$$

  したがって、$\theta \rightarrow i\eta$ として回転角度を虚数方向にとると

$$\sin(i\eta) = \frac{e^{i\cdot i\eta} - e^{-i\cdot i\eta}}{2i} = \frac{e^{-\eta} - e^{\eta}}{2i} = i\sinh\eta\ , \quad \cos(i\eta) = \frac{e^{i\cdot i\eta} + e^{-i\cdot i\eta}}{2} = \frac{e^{-\eta} + e^{\eta}}{2} = \cosh\eta\ . \tag{6.24}$$

  したがって、式 (6.22) は

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ -i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta \\ \sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \cosh\eta \begin{pmatrix} 1 & \tanh\eta \\ \tanh\eta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}\ . \tag{6.25}$$

  ここで $\beta = -\tanh\eta$ と取ると、ローレンツ変換の式 (6.2) がちょうど再現される。ただし、ここで

$$1 + \tanh^2\eta = \frac{1}{\cosh^2\eta} \qquad \therefore \quad \cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1+\tanh^2\eta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} = \gamma \tag{6.26}$$

  となることを使った。

以上より、**世界間隔は虚時間 it についての距離、ローレンツ変換は虚数角度の回転**として理解できることが分かった。

逆に、物理的な考察によって世界間隔 (6.11) がどの慣性系でも同じ値になることを導いておいて、それを不変に保つ変換を構築することでローレンツ変換の表式 (6.2) を導出することもできる。この導出法の詳細については本講義では割愛する[27]。

[27]例えば、岩波文庫「相対論の意味」（アインシュタイン 著）、東京図書「場の古典論」（ランダウ 著）にはこの方針に基づくローレンツ変換の導出法が説明されている。