第 9 回　相対論的力学の構築

9.1　復習と補遺：スカラー・ベクトル・テンソル

9.1.1　定義と例

ローレンツ変換 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ に対する変換性に応じて**スカラー・ベクトル・テンソル** (単に**テンソル**と総称する) を以下のように定義する。添字の個数はテンソルの**階数**と呼ばれる。

スカラー： $\phi'(x'^{\rho}) = \phi\big(x^{\rho}\big)$

反変ベクトル： $V'^{\mu}(x'^{\rho}) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} V^{\mu}(x^{\rho})$

共変ベクトル： $U'_{\mu}(x'^{\rho}) = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu} U_{\nu}(x^{\rho})$

2 階テンソル： $T'^{\mu\nu}(x'^{\rho}) = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}(x^{\rho})\ ,\quad T'_{\mu\nu}(x'^{\rho}) = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\mu} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta}{}_{\nu} T_{\alpha\beta}(x^{\rho})\ ,$
$T'^{\mu}{}_{\nu}(x'^{\rho}) = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta}{}_{\nu} T^{\alpha}{}_{\beta}(x^{\rho})\ ,\quad T'_{\mu}{}^{\nu}(x'^{\rho}) = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T_{\alpha}{}^{\beta}(x^{\rho})$

- **世界間隔 ds^2 はスカラー**：
$$ds'^2 = -(cdt')^2 + |d\mathbf{x}'|^2 = -(cdt)^2 + |d\mathbf{x}|^2 = ds^2\ . \tag{9.1}$$
世界間隔を用いて計算される**固有時** $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$**, 固有長** $d\ell = \sqrt{ds^2}$ **もスカラー**となる。

- **位置座標 x^{μ} は反変ベクトル**：
$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \ \left(= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu}\right)\ . \tag{9.2}$$
この式から、ローレンツ変換を考えるときは $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ と書ける。

- **偏微分 $\partial/\partial x^{\mu}$ は共変ベクトル**：
$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\ . \tag{9.3}$$
偏微分が共変ベクトルであることを明示するためにも、$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ と略記することがある。

9.1.2　テンソル計算

テンソルについての計算は、ベクトルや行列について行える計算を拡張したもので与えられる。

- **加法**：同じ型のテンソルは互いに足し合わせることができる。
$$\text{例)}\qquad a\,V^{\mu} + b\,U^{\mu} = W^{\mu}\ ,\quad a\,T_{\mu\nu} + b\,U_{\mu}V_{\nu} = S_{\mu\nu} \qquad (a, b : \text{スカラー}) \tag{9.4}$$

- **積**：スカラー・ベクトル・テンソルの積を取ると、より高階のテンソルが得られる。
$$\text{例)}\qquad a\,U_{\mu}V_{\nu} = T_{\mu\nu}\ ,\quad T_{\mu\nu}V^{\rho} = S_{\mu\nu}{}^{\rho} \tag{9.5}$$

- **微分**： 微分演算子 ∂_{μ} は共変ベクトルとして振る舞うが、これをテンソルに作用させたものは階数の一つ高いテンソルとなる。
$$\text{例)}\qquad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} = T_{\mu}{}^{\nu} \qquad (a : \text{スカラー}) \tag{9.6}$$

- **縮約**：一つの項の中で、反変添字（上付き）と共変添字（下付き）に同じ文字を一つずつ入れたとき、その添字に $0, 1, 2, 3$ を入れて和を取る（**アインシュタインの規約**）。ベクトルの内積の計算と類似しているが、上付き・下付き添字のペアについて和をとるのが特徴。
$$\text{例)}\qquad V_{\mu}W^{\mu} \equiv \sum_{\mu=0,1,2,3} V_{\mu}W^{\mu} \tag{9.7}$$

- **縮約 $\to$ テンソル型の変化**：あるテンソルについて縮約を行ったとき、そのテンソルの型（スカラー、反変・共変ベクトル/テンソルなど）は、縮約されずに残っている添字で決定される。そのため、縮約するとテンソルの階数が減少する。
  例）反変テンソル $T^{\mu\nu}$ と共変ベクトル V_ν を縮約した $T^{\mu\nu}V_\nu$ は反変ベクトルになる。

  ($\because$) $T^{\mu\nu}V_\nu$ を構成する各要素にローレンツ変換をかけると以下のように振る舞う：

$$T'^{\mu\nu}V'_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}\big(\Lambda^{-1}\big)^\gamma{}_\nu V_\gamma = \Lambda^\mu{}_\alpha \underbrace{\big(\Lambda^{-1}\big)^\gamma{}_\nu \Lambda^\nu{}_\beta}_{=\delta^\gamma_\beta} T^{\alpha\beta}V_\gamma = \Lambda^\mu{}_\alpha T^{\alpha\beta}V_\beta \tag{9.8}$$

  この式はテンソル $T^{\alpha\beta}V_\beta$ が反変ベクトルとして振る舞っていることを示す。縮約された添字 ν について、ローレンツ変換で生じる変換行列 $\Lambda^\nu{}_\beta$ がちょうど打ち消し合って消えるのがこの性質の起源である。

  特に、**添字がすべて縮約されたテンソル量はスカラー**として振る舞う (例: $V_\mu U^\mu$ はスカラー)。

9.1.3 計量テンソル

[計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$]　4 次元座標を $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ と書くこと、およびアインシュタインの規約を用いると、世界間隔 ds^2 を次のように書き表すことができる：

$$ds^2 = -\big(dx^0\big)^2 + \big(dx^1\big)^2 + \big(dx^2\big)^2 + \big(dx^3\big)^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \sum_{\mu,\nu=0,1,2,3} \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{9.9}$$

ただし、$\eta_{\mu\nu}$ は以下で定義される**計量テンソル**である（単に「計量」とも呼ぶ）[39]。：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & [(\mu\nu) = (00)] \\ +1 & [(\mu\nu) = (11), (22), (33)] \\ 0 & [\text{その他の成分}] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{9.10}$$

　また、計量 $\eta_{\mu\nu}$ の逆行列を $\eta^{\mu\nu}$ と書くことにする。$\eta^{\mu\nu}$ は以下を満たす。

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu \ , \qquad \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \ . \tag{9.11}$$

δ^ν_μ は $\mu = \nu$ ならば 1, $\mu \neq \nu$ ならば 0 となるクロネッカーのデルタ記号で、単位行列に対応する。
式 (9.10) の行列表示からもわかるとおり、逆行列 $\eta^{\mu\nu}$ の成分は $\eta_{\mu\nu}$ と全く同じである。

[計量 $\eta_{\mu\nu}$ と世界間隔 ds^2 のローレンツ不変性]　計量は 2 階共変テンソルなので、ローレンツ変換した場合の成分は $\eta'_{\mu\nu} = \big(\Lambda^{-1}\big)^\alpha{}_\mu \big(\Lambda^{-1}\big)^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta}$ で与えられる。さらに、この計量は**ローレンツ変換で成分が不変**という性質がある：

$$\eta'_{\mu\nu} = \big(\Lambda^{-1}\big)^\alpha{}_\mu \big(\Lambda^{-1}\big)^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \ . \tag{9.12}$$

この性質を使うと、ローレンツ変換で世界間隔 ds^2 の表式が不変に保たれることが示せる[40]。

---

[39] このテンソルの名前に「計量」とついているのは、$\eta_{\mu\nu}$ の成分の値が dx^μ 方向の世界間隔 $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ の大きさを決めているためである。大雑把には、長さを測る物差しのようなものがあった時、dx^μ が物差しに書いてある目盛り、$\eta_{\mu\nu}$ の成分の値が実際の物理的な長さに対応している。なお、この計量はゆがみのない平坦な時空における計量である。

[40] 式 (9.12) を使うと、ローレンツ変換で世界間隔 ds^2 は以下のように振る舞うことが分かる：

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu}\big(\big(\Lambda^{-1}\big)^\mu{}_\alpha dx'^\alpha\big)\big(\big(\Lambda^{-1}\big)^\nu{}_\beta dx'^\beta\big) = \big(\eta_{\mu\nu}\big(\Lambda^{-1}\big)^\mu{}_\alpha \big(\Lambda^{-1}\big)^\nu{}_\beta\big)dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta}dx'^\alpha dx'^\beta = ds'^2 \ . \tag{9.13}$$

2 番目の等号ではローレンツ逆変換の式 ($dx^\mu = \big(\Lambda^{-1}\big)^\mu{}_\alpha dx'^\alpha$)、4 番目の等号では計量 $\eta_{\mu\nu}$ がローレンツ変換で不変であること (式 (9.12)) を用いた。この式の最初の状態 ($ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$) と最後の状態 ($ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu$) を見比べると、座標を $x^\mu \to x'^\mu$ と置き換えた以外は全く同じ式になっている。**世界間隔 ds^2 の表式がローレンツ不変で、どの慣性系でも同じ表式で与えられる**ということを表している。これらの式を成分で書き下したのが式 (9.1) で、ローレンツ変換で式の形が変わっていないことが見て取れる。

　逆に、計量 $\eta_{\mu\nu}$ を先に定義しておいて、それを不変に保つ変換を導出することでローレンツ変換を構築することもできる。$\eta_{\mu\nu}$ とそれを使って計算される世界間隔 ds^2 をまず導入しておき、光速度不変の原理を成立させるためには $\eta_{\mu\nu}$ がどの慣性系でも不変でなければならない、ということを使ってローレンツ変換を構築することになる。

[反変/共変成分の変換、内積]　ある反変ベクトル V^μ があったとき、計量 $\eta_{\mu\nu}$ と縮約することで、ベクトル V の共変成分 V_μ が得られる。同様に、ある共変ベクトルがあったとき、計量の逆 $\eta^{\mu\nu}$ と縮約することで、ベクトル U の反変成分 U^μ が得られる[41]：

$$V^\mu \ \rightarrow\ V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu \ , \qquad U_\mu \ \rightarrow\ U^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} U_\nu \ . \tag{9.14}$$

例えば、2 つのベクトル V^μ, U^μ の内積 $\eta_{\mu\nu} V^\mu U^\nu$ は以下のように書き表すことができる。

$$\eta_{\mu\nu} V^\mu U^\nu = V_\mu U^\mu = V^\mu U_\mu = -V^0 U^0 + V^1 U^1 + V^2 U^2 + V^3 U^3 \ . \tag{9.15}$$

特に、世界間隔 ds^2 は dx^μ のそれ自身との内積（ノルムの 2 乗）で与えられ、以下のように書ける：

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu = dx^\mu dx_\mu = -(dx^0)^2 + |d\mathbf{x}|^2 = -(cdt)^2 + |d\mathbf{x}|^2 \ . \tag{9.16}$$

9.2　4 元速度、4 元運動量

以上で述べたテンソル量を組み合わせることで、普通の運動方程式に現れるような物理量で、なおかつローレンツ変換に対してテンソルとして振る舞う量を作ることができる。その後、同じ変換性を持つテンソル量だけを使って式を組めば、ローレンツ共変な運動方程式を容易に構築できる。そのための準備として、粒子の運動を記述するのに必要となる**速度・運動量に対応するベクトル**を導入する。

- **4 元速度** u^μ：時間座標 t はローレンツ変換に対するスカラー量ではないので、ニュートン力学における速度 $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ もベクトルとして振る舞わない。ニュートン力学がローレンツ不変でないのもこれが原因であった。一方、**時間座標に対応するスカラー量は固有時間** $d\tau$ である。そこで、運動する粒子の 4 次元的な位置座標 $x^\mu = x^\mu(\tau)$ とその軌道に沿った固有時間 τ を組み合わせて作られる **4 元速度** u^μ を

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \tag{9.17}$$

と定義すると、通常の速度 $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ に対応し、かつ反変ベクトルとして振る舞う量が得られる：

$$u'^\mu = \frac{dx'^\mu(\tau)}{d\tau'} = \frac{d\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu(\tau)}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu \ . \tag{9.18}$$

[**u^μ の性質**]　通常の時間・空間座標を用いて定義される 3 次元的な速度 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ を用いると、u^μ の分母に入っている固有時間は以下のように書ける：

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c}\sqrt{(cdt)^2 - d\mathbf{x}^2(t)} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right|^2}\, dt = \sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}\, dt = \frac{1}{\gamma(\beta)} dt \tag{9.19}$$

したがって、u^μ の成分は

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = \gamma(\beta)\frac{dx^\mu(\tau)}{dt} = \gamma(\beta)\left(\overbrace{\frac{d(ct)}{dt}}^{\mu=0}, \overbrace{\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}}^{\mu=1,2,3}\right) = \gamma(\beta)\left(c, \mathbf{v}(t)\right) \ . \tag{9.20}$$

非相対論的極限 ($|\boldsymbol{\beta}| \ll 1, \gamma \to 1$) で u^μ の空間成分 $\gamma\mathbf{v}$ は通常の速度 $\mathbf{v}$ に一致する。
また、式 (9.20) を使うと **4 元速度の 2 乗 $u^\mu u_\mu$ は必ず定数 $-c^2$ になる**と示せる[42]：

$$u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2(\beta)\left(-c^2 + |\mathbf{v}|^2\right) = -c^2\gamma^2(\beta)\left(1-\boldsymbol{\beta}^2\right) = -c^2 \ . \tag{9.21}$$

3 次元速度 $\mathbf{v}$ がどの値でもこの式が成立するので、u^μ の 4 成分のうち独立なのは 3 成分だけである。u^μ の空間成分に含まれる $\mathbf{v}$ の選び方の自由度に相当する。

[41] 反変ベクトル V^μ はベクトル V の基底 e_μ についての成分、共変ベクトル V_μ は同じベクトル V の双対基底 ω^μ ($e_\mu \cdot \omega^\nu = \delta^\nu_\mu$) についての成分なのだが、詳細についての解説は本講義では割愛する。

[42] ただし、光をはじめとする静止質量がゼロの粒子については $u^\mu u_\nu = 0$ となる。今後の講義で解説する。

- **4 元運動量** p^μ：ニュートン力学では (運動量)=(質量)×(速度) と与えられたが、これを参考にして運動量に相当する 4 元ベクトルを構築してみよう。粒子が静止して見えるような慣性系で測った粒子の質量 m_0 (**静止質量**と呼ぶ) は、定義によりどの慣性系でも一定値を取るため、スカラーとして振る舞う。そこで、静止質量 m_0 と 4 元速度 u^μ をかけたものを

  $$p^\mu = m_0 u^\mu = \big(m_0\gamma c, m_0\gamma \mathbf{v}(t)\big) \equiv \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \tag{9.22}$$

  と定義すると、これは反変ベクトルとして振る舞う。このベクトル p^μ を **4 元運動量**と呼ぶ。また、最後の等号で定義した $E, \mathbf{p}$ はそれぞれ**相対論的なエネルギー・運動量**だが、その性質については以下で説明する。

  [p^μ **の性質**]　**非相対論極限で、p^μ の空間成分は通常の運動量と一致する** ($\mathbf{p} = m_0\gamma\mathbf{v} \to m_0\mathbf{v}$)。また、$p^\mu$ の 2 乗を計算すると

  $$\begin{aligned} p_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu &= -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + |\mathbf{p}|^2 \\ &= m_0^2 u_\mu u^\mu = -m_0^2 c^2\ . \end{aligned} \tag{9.23}$$

  この式の 1 行目は p^μ の成分 (9.22) を使って $\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ を具体的に書き下したもの、2 行目は $u_\mu u^\mu$ の式 (9.21) を用いて $p^\mu p_\mu$ を書き換えたものにそれぞれ相当する。この式を整理すると

  $$E^2 = \big(m_0 c^2\big)^2 + |\mathbf{p}|^2 c^2 \tag{9.24}$$

  という関係式が得られる。

9.3　相対論的運動方程式

9.3.1　運動方程式の構築

前節で作ったベクトル量を用いて、ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\,(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \tag{9.25}$$

の相対論版をいよいよ構築する。その際に、以下の要請を満たす方程式を作るものとする：

1. **特殊相対性原理を満たす**。すなわち、運動方程式がローレンツ共変となり、どの慣性系でも物理法則は同一であるものとする。

2. **非相対論的極限 $|\mathbf{v}| \ll c$ でニュートンの運動方程式 (9.25) に帰着する**。
   実験事実として、この極限では式 (9.25) が精度良く成立するため。

3. （非相対論的極限ではない一般の場合でも）**実験事実と合致する**。

要請 1, 2 に従って運動方程式を理論的に組み、それが実験的な要請 3 も満たすことを確認する、という流れとなる[43]。

要請 1 は、前節で構築したような運動量などに相当するベクトル量を使って式全体を書き下せば自動的に満たされる。どの量をどう組み合わせて方程式を作ればよいかの指針は要請 2 が与えてくれる。特に、非相対論的極限で 4 元運動量 p^μ の空間成分が通常の運動量 $m\mathbf{v}$ に帰着すると確認していたので、式 (9.25) に倣って、力に相当する 4 元ベクトル F^μ を使って

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = F^\mu \tag{9.26}$$

[43] ただし、本講義では主に前半の理論面を解説し、後半の実験的な検証については深入りしないことにする。

という式を立てれば、その空間成分は非相対論的極限で自動的に式 (9.25) に帰着すると期待される。ただし、4 元力ベクトル F^μ の成分がどう与えられるかについては別途調べる必要があり、以下で議論する。なお、この式を作る際に固有時間（スカラー）による微分 $d/d\tau$ を用いたおかげで左辺はベクトル量になり、右辺にもベクトル量 F^μ を持ってくることで方程式全体が共変的に振る舞うようになっている：

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = F^\mu \quad \Leftrightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \frac{d}{d\tau}p'^\alpha = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha F'^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}p'^\mu = F'^\mu \,. \tag{9.27}$$

左辺が変換前の慣性系における運動方程式、中央が同じ式をローレンツ変換後の量 p'^μ, F'^μ で書き直したもので、それを式変形 ($\Lambda^\nu{}_\mu$ を縮約) して得られるのが右辺の p'^μ, F'^μ についての関係式で、ローレンツ変換後に成り立つべき運動方程式になっている。方程式が共変的に組まれていたおかげで、元の運動方程式（左辺）と同じ形の式となっている。

9.3.2 $F^\mu = 0$ の場合

4 元力 F^μ がゼロとなる場合、式 (9.26) は

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) = (\text{一定}) \tag{9.28}$$

という **4 元運動量 p^μ の保存則**を与える。この式の空間成分

$$\mathbf{p} = m_0\gamma(v)\mathbf{v} = (\text{一定}) \tag{9.29}$$

は、ニュートン力学の時と同様に、自由粒子は一定の速度 $\mathbf{v}$ で運動するということを示している。

[**E の解釈**]　式 (9.28) の時間成分については

$$E = m_0\gamma(v)c^2 = \sqrt{(m_0c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2c^2} = (\text{一定}) \tag{9.30}$$

となり、E という量の保存則を与える。運動量 $\mathbf{p}$ が保存しているのでこの量 E も確かに保存するのだが、この量がどのような物理量に相当するのかについては一考の余地がある。ニュートン力学においては、力のかかっていない粒子の軌道について変化しない保存量は**運動エネルギー**と**粒子の質量**であった。式 (9.30) の E はそのどちらとも一致はしないが、E を非相対論極限 $|\mathbf{v}| \ll c$ で展開すると

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2c^2} = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{p}|^2c^2}{(m_0c^2)^2} + \mathcal{O}\left(|\mathbf{p}|^4\right)\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0|\mathbf{v}|^2 + \mathcal{O}\left(|\mathbf{v}|^4\right) \tag{9.31}$$

と、近似的には運動エネルギー $\frac{1}{2}m_0|\mathbf{v}|^2$ と定数部分 m_0c^2 との和で与えられる。ただし、非相対論極限では単に $\mathbf{p} \simeq m_0\mathbf{v}$ となることを使った。

E の展開式 (9.31) に出てくる定数部分 m_0c^2 にはどんな意味があるだろうか。ニュートン力学においては粒子の質量はただの定数なので、式 (9.31) も運動エネルギー $\frac{1}{2}m_0|\mathbf{v}|^2$ を定数 m_0c^2 だけずらして書いたものに過ぎないようにも見える。しかし、以下のように考えると、m_0c^2 を単なる定数部分とはみなすことはできず、むしろ**粒子のエネルギーの一部であり、粒子の運動状態に応じて変化する量**だとみなす必要があるとわかる。

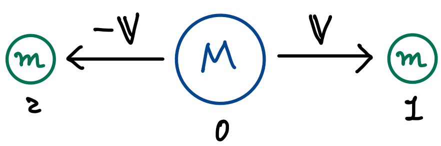

図 35: 静止している静止質量 M の粒子が、静止質量 m, 速さ $|\mathbf{v}|$ の 2 つの粒子に分裂したとする。

図 35 のように、静止質量 M の粒子が静止しており、それが、静止質量 m, 速さ $|\mathbf{v}|$ の 2 つの粒子に分裂したとする。この場合に、運動量保存則 (9.28) が何を予言するのかを見てみよう。まず、図 35 の粒子 0, 1, 2 の 4 元運動量は、それぞれ

$$p_0^\mu = (Mc, 0) \ , \quad p_1^\mu = m\gamma(v)\,(c, \mathbf{v}) \ , \quad p_2^\mu = m\gamma(-v)\,(c, -\mathbf{v}) \ . \tag{9.32}$$

このとき、運動量保存則 $p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ の空間成分は自明に満たされる。一方、時間成分は

$$M = \gamma(v)m + \gamma(-v)m = 2\gamma(v)m \geq 2m \ , \tag{9.33}$$

すなわち、分裂後の粒子の速度がゼロでない ($|\mathbf{v}| \neq 0, \gamma > 1$) 場合は、分裂後の粒子の静止質量の合計値 $2m$ は分裂前の粒子の静止質量 M と比べて減少することを予言する。運動の過程で静止質量 (分裂前は M, 分裂後は $2m$) が保存されないのだから、E の表式 (9.30) に含まれる質量項 m_0c^2 を E 全体から切り分けて考える意義がなくなる。この意味で、**式 (9.30) に含まれる m_0c^2 は単に保存量 E の一部分に過ぎず、場合によっては質量部分 m_0c^2 と運動量部分 $|\mathbf{p}|c$ が互いに移り変わることもある、**と理解するのが良さそうだとわかる。

9.3.3　$F^\mu \neq 0$ の場合

次に、相対論的運動方程式 (9.26) で 4 元力 F^μ がゼロではない場合を考える。その際、3 次元的な力のベクトル $\mathbf{F}$ を

$$\mathbf{F} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{9.34}$$

と、相対論的な 3 次元運動量ベクトル $\mathbf{p} = m_0\gamma(v)\mathbf{v}$ (式 (9.22) 参照) の時間座標 t による微分で定義する。非相対論的極限ではニュートンの運動方程式 (9.25) と一致する定義である。

この定義に従うと、式 (9.26) の空間成分は

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \gamma(v)\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma(v)\mathbf{F} \ . \tag{9.35}$$

また、式 (9.26) の時間成分は

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \gamma(v)\frac{dp^0}{dt} = F^0 \tag{9.36}$$

となるが、この式の意味を考えてみよう。$p^0 = E/c = m\gamma(v)c$ の時間座標 t による微分は、E を $\mathbf{p}$ などで表す式 (9.30) を参考にすると

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\sqrt{(m_0c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2c^2} = \frac{1}{c}\frac{c^2\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}}{\underbrace{\sqrt{(m_0c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2c^2}}_{=E=m_0\gamma(v)c^2}} = \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{F} \ . \tag{9.37}$$

ただし、最後の等号では $\mathbf{p} = m_0\gamma(v)\mathbf{v}$ と与えられることを用いた。この式は、粒子に加えられた力 $\mathbf{F}$ による仕事率 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}$ がエネルギーの時間変化率 dE/dt に等しいということを示している。これを踏まえると、E **は特殊相対論における粒子のエネルギー**であると解釈すると良さそうだということが示唆される。そのような解釈に基づくと、静止した質量 m_0 の粒子もエネルギー $E = m_0c^2$ を持っていることになる。この質量由来のエネルギーは**静止質量エネルギー**と呼ばれている。

また、以上の内容を踏まえて 4 元力ベクトル F^μ の成分を書き下しておくと

$$F^\mu = \gamma(v)\left(\frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}, \mathbf{F}\right) \tag{9.38}$$

であり、時間・空間成分がそれぞれエネルギー E, 運動量 $\mathbf{p}$ の時間変化率を与えている。