

複素関数論 講義ノート

棚橋典大

2018年度前期 水曜2限

第1回 導入

1.1 複素関数論とは

- 複素関数：複素数を変数に持つ関数。 $y = f(x)$ (x, y : 実数) $\Rightarrow w = f(z)$ (w, z : 複素数)
- 複素解析：複素関数と、その微分・積分に関する学問。

$$\frac{df(x)}{dx} \Rightarrow \frac{df(z)}{dz}, \quad \int f(x)dx \Rightarrow \int f(z)dz$$

一見似ているが、複素数独特の性質や計算法がある。

- 複素解析の応用：工学・物理学でよく使われる。
 - － 振動・波動:
 $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ [オイラーの公式]
 - － フーリエ解析:
波形 $y = f(t)$ の周波数成分は $\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt$.
音声・画像処理などによく使われる。
 - － 境界値問題・ポテンシャル問題: 静電場、熱伝導、流体の流れなどは、ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

の解で表される。

(正則な) 複素関数の実部・虚部はラプラス方程式の解になるため、これらの問題に応用できる。

1.2 この講義の目標と進め方

複素積分をマスターすることが主な目標。そのために、下記項目を順に学ぶ。

1. 複素数の基礎

2. 複素関数の微分: 微分可能性とコーシー・リーマンの関係式
3. 複素関数いろいろ ($z^p, e^z, \sin z, \sinh z, \log z$)
4. 複素関数の図形的解釈: 等角写像
5. 複素関数のテイラー展開とその拡張 (ローラン展開)
6. 複素積分: 留数定理、実積分への応用

1.3 複素数の基礎

1.3.1 複素数

$x, y, \dots \in \mathbb{R}$: 実数、 $z \in \mathbb{C}$: 複素数、 i : 虚数単位 ($i^2 = -1$) として

$$z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z \quad (1)$$

$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$: 複素数 z の実部、虚部。複素数 z の共役複素数 $\bar{z}$:

$$\bar{z} = x - iy = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$$

を用いると、 z の実部、虚部は

$$\operatorname{Re} z = x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

複素数 z の絶対値 $|z|$ は実数になる:

$$|z|^2 = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

複素数の演算の例:

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)\overline{(1-i)}}{(1-i)\overline{(1-i)}} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+3i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+3i}{2}$$

1.3.2 複素平面、複素数の極形式

● 複素平面

複素数 $z = x + iy$ の実部、虚部を直交座標系の点として表す。

* 複素共役 $\bar{z}$ は、 z を実軸について鏡映した点に相当。

● 複素数の極形式

複素数 z は、2次元面上の点 (x, y) として表すと便利。極座標 (r, θ) で表すと

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \right).$$

$r = |z| > 0$ は z の絶対値、 $\theta \equiv \arg z$ は複素数 z の偏角である。

* 偏角が 2π の整数倍異なっても、複素数値としては同じ値。

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i \sin(\theta + 2n\pi)] \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \in \mathbb{Z})$$

$\mathbb{Z}$: 整数全体

* 青字部分をオイラーの公式と呼ぶ。後で説明する。

● 極形式での積・商

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ の積は

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2. \end{aligned} \quad (2)$$

積 $z_1 z_2$ の絶対値 $|z_1 z_2|$ は絶対値同士の積、偏角 $\arg(z_1 z_2)$ は偏角同士の和。

計算：

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

同様に、商の絶対値と偏角は絶対値同士の商と偏角同士の差：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad \therefore \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2. \quad (3)$$

* 複素数の積が、複素平面上の回転・拡大に対応していることが要点。

絶対値倍だけ拡大、偏角分だけ回転される。

● ド・モアブルの定理

公式 (2) で $z_1 = z_2 = z$ とすると

$$z^2 = r^2 [\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)]$$

より一般に、次のド・モアブルの定理が成り立つ (式 (2), (3) を使って示せる)：

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (4)$$

● n 乗根

n 乗根 $\sqrt[n]{z}$: n 乗すると z になる数 ($(\sqrt[n]{z})^n = z$)。 $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ とも書く。

ド・モアブルの公式 (4) を使うことで、複素数 z の n 乗根 $\sqrt[n]{z}$ を求められる。

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m}{n}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m}{n}\pi\right) \right] \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (5)$$

$m \in \mathbb{Z}$ の分、全部で n 個の互いに異なる n 乗根が存在するので注意。

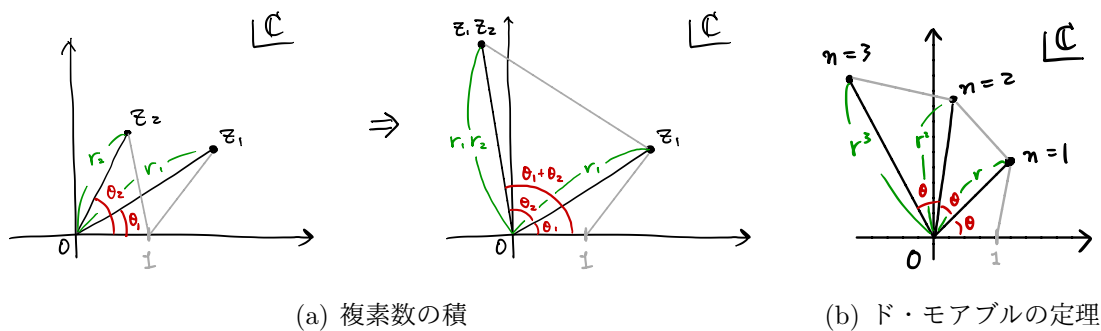


図 1: 複素平面上における複素数の積とド・モアブルの定理の表示。

導出：

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のときに $\sqrt[n]{z} = R(\cos \Theta + i \sin \Theta)$ を求める。式 (4) を使うと

$$z = (\sqrt[n]{z})^n \Leftrightarrow r(\cos \theta + i \sin \theta) = R^n [\cos(n\Theta) + i \sin(n\Theta)]$$

両辺を比較して

$$r = R^n, \quad \cos \theta = \cos(n\Theta), \quad \sin \theta = \sin(n\Theta).$$

この式を満たす R, Θ を求めると

$$R = r^{1/n}, \quad n\Theta = \theta + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

この結果から、 z の n 乗根 $\sqrt[n]{z} = R(\cos \Theta + i \sin \Theta)$ が式 (5) の通りに得られる。

$\frac{2m}{n}\pi$ の部分を除けば、元の複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と比べて、絶対値は $1/n$ 乗 ($|\sqrt[n]{z}| = r^{1/n}$)、偏角は $1/n$ 倍 ($\arg z = \frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}$) で、ド・モアブルの定理と同じ形になっている。

特に、**1** の n 乗根は ($r = |1| = 1, \theta = \arg 1 = 0$)

$$\sqrt[n]{1} = \cos \left(\frac{2m}{n} \pi \right) + i \sin \left(\frac{2m}{n} \pi \right) \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

例：1 の 3 乗根、4 乗根は、複素平面上で単位円に内接する正三角形、正四角形の頂点の位置。

$$\sqrt[3]{1} = 1, \quad \cos \left(\frac{2}{3} \pi \right) + i \sin \left(\frac{2}{3} \pi \right), \quad \cos \left(\frac{4}{3} \pi \right) + i \sin \left(\frac{4}{3} \pi \right) = 1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\sqrt[4]{1} = 1, \quad \cos \left(\frac{2}{4} \pi \right) + i \sin \left(\frac{2}{4} \pi \right), \quad \cos \left(\frac{4}{4} \pi \right) + i \sin \left(\frac{4}{4} \pi \right), \quad \cos \left(\frac{6}{4} \pi \right) + i \sin \left(\frac{6}{4} \pi \right), \quad \cos \left(\frac{8}{4} \pi \right) + i \sin \left(\frac{8}{4} \pi \right) = 1, i, -1, -i.$$

● オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (6)$$

極形式の複素数を、実部と虚部に分けずにコンパクトに書ける。

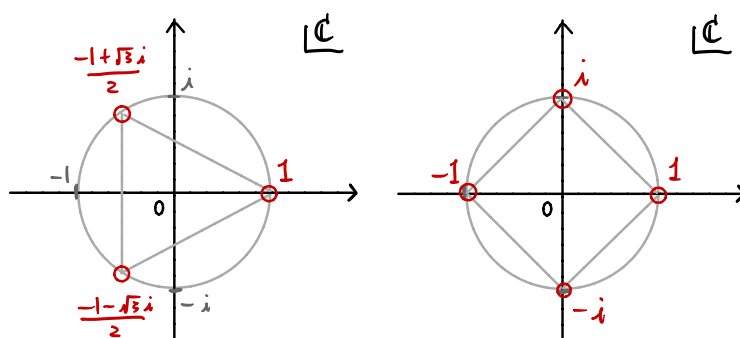


図 2: 複素平面上における 1 の 3 乗根、4 乗根の表示。

例：

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\pi/3}$$

$$1 = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} \Rightarrow 1^{1/3} = 1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

* この講義の後の方で、(複素) 指数関数 $e^z = e^{x+iy}$ の一部としてまた出てくる。

導出：実数関数 e^x のテイラー展開は

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

これに $x = i\theta$ を代入すると、実部と虚部がそれぞれ $\cos \theta$, $\sin \theta$ のテイラー展開になっている：

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \dots \quad (7)$$

$$= 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}i\theta^5 + \dots \quad (8)$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!} + \dots + i \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \right) \quad (9)$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta. \quad (10)$$

例題：

1. $z = \left(\frac{6+8i}{4-3i} \right)^2$ を極形式で表し、複素平面上に図示せよ。

以下のようにして、 z は絶対値 4, 偏角 π の複素数であるとわかる。

$$\left(\frac{6+8i}{4-3i} \right)^2 = \left(\frac{(6+8i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} \right)^2 = \left(\frac{50i}{25} \right)^2 = (2i)^2 = -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi).$$

複素平面上では $(x, y) = (-4, 0)$ の点。

2. 3 乗根 $\sqrt[3]{1+i}$ を全て複素平面上に図示せよ。

まず、絶対値と偏角を求める。

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+i} &= \sqrt[3]{\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)} = 2^{1/6} \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \\ &= 2^{1/6} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3} \right) \right] \quad (n \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

1 の 3 乗根が合計三つあることに注意する。複素平面上では、原点を中心とする半径 $2^{1/6}$ 上の偏角 $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{17\pi}{12}$ の点。正三角形をなす。

第2回 複素関数の微分

複素関数の微分と、そのために必要となるコーシー・リーマンの関係式を理解して使いこなすことを目標とする。

2.1 複素関数

実関数 $y = f(x)$ ($x, y \in \mathbb{R}$): 各実数 x に対して、ある実数 $y = f(x)$ を対応させる規則
複素関数 $w = f(z)$ ($w, z \in \mathbb{C}$): 各複素数 z に対して、ある複素数 $w = f(z)$ を対応させる規則

複素関数 $f(z)$ を実部 $u(z)$ と虚部 $v(z)$ に分けて書くこともある。

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy, \quad u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R})$$

複素関数 $f(z)$ は、2つの実関数 $u(z), v(z)$ を組み合わせたもの。

2.2 複素関数の微分

実関数 $f(x)$ の連続性と微分は以下のように定義される。

- 実関数 $f(x)$ について

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

が満たされるとき、 $f(x)$ は $x = x_0$ で連続であるという。

- 実関数 $f(x)$ について、次の極限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) \quad (11)$$

が存在するとき、 $f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能という。

- Δx をゼロに近づけると、正の側から近づける場合と、負の側から近づける場合の2通りがある。 $f(x)$ の微分が存在するためには、その2つの極限值が一致する必要がある。

例) $f(x) = x^2$ の微分は

$$\left. \frac{dx^2}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0.$$

- 微分可能な関数 $f(x)$ は、 $x = x_0$ で近傍で次のように近似できる。

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \cdots$$

$f'(x_0)$ は、グラフ $y = f(x)$ の $x = x_0$ における傾き。

実関数の場合を参考に、複素関数 $f(z)$ についても連続性と微分を以下のように定義する。

- 複素関数 $f(z)$ について

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$$

が満たされるとき、 $f(z)$ は $z = z_0$ で連続であるという。

- 複素関数 $f(z)$ について、次の極限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \equiv \frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0) \quad (12)$$

が存在するとき、 $f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能という。

◆ 実関数の微分と一見同じ形をしているが、今回は複素平面上で Δz をどの方向からゼロに近づけても同じ値に収束することが必要になる。

- 上記の点だけ注意すれば、計算自体は実関数と同様に計算できる。

例) $f(z) = z^2$ の (複素) 微分は

$$\left. \frac{dz^2}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z_0^2 + 2z_0\Delta z + \Delta z^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 2z_0 + \Delta z = 2z_0.$$

- 微分可能な関数 $f(z)$ は、 $z = z_0$ で近傍で次のように近似できる。

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta z + \cdots \quad (13)$$

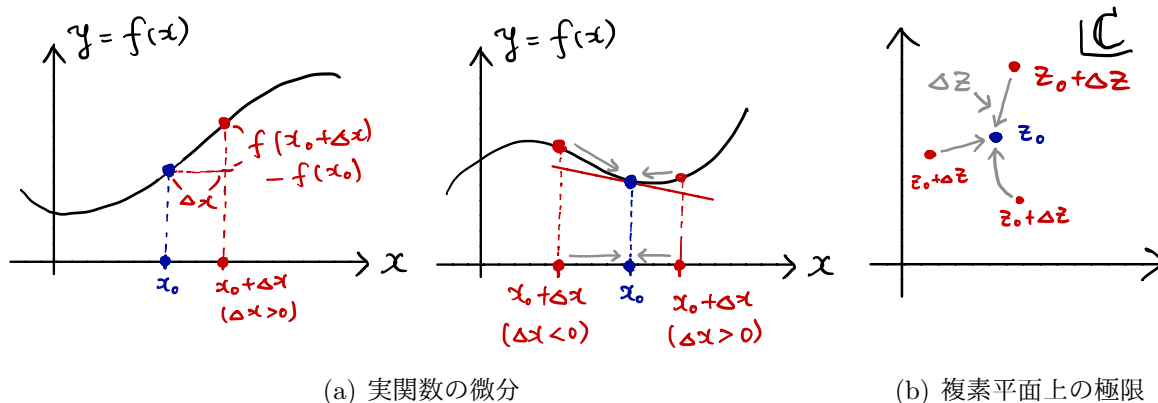


図 3: (a): $x = x_0$ における実関数の微分は、式 (11) の極限 ($\Delta x \rightarrow 0$) を取ることで得られる。 x の正の側 ($\Delta x > 0$) と負の側 ($\Delta x < 0$) から近づく 2 通りの極限の取り方がある。(b): 複素微分の定義 (12) の極限 $\Delta z \rightarrow 0$ は、複素平面上の様々な方向から取ることができる。その全てについて式 (12) の左辺が同じ値に収束するとき、関数 $f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能となる。

2.3 複素関数の微分可能性とコーシー・リーマンの関係式

実関数の微分に出てくる極限 $x \rightarrow x_0$ を取る方法は、 x の正と負のどちらかの方向から x_0 に近づくという2通りしか存在しなかった。これに対して、複素数の場合には Δz の偏角 (複素平面上での Δz の向き) を任意の値にとったうえで $\Delta z \rightarrow 0$ とできる。この偏角に式 (12) が依存しない場合に限って $f(z)$ は微分可能となるが、そうなるためには $f(z)$ がコーシー・リーマンの関係式と呼ばれる条件を満たす必要がある。これを以下で導出する。

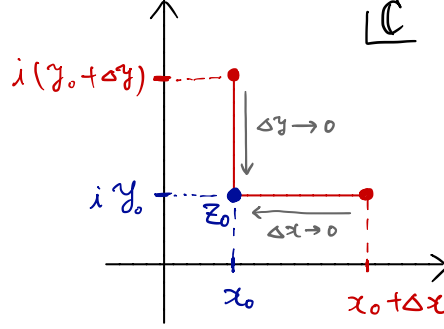


図 4: コーシー・リーマンの関係式の導出の際に使う Δz の経路。 $z = z_0$ に実軸および虚軸方向から近づく2通りの極限について微分の定義式 (12) を評価する。

以下では、複素関数を実部と虚部に分けて

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy, x, y, u, v \in \mathbb{R})$$

とする。コーシー・リーマンの関係式を導出するため、次の2通りの極限の取り方について微分の定義式 (12) を評価してみる。

1. 実軸沿いに近づく場合 [$\Delta z = \Delta x, \Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta x \in \mathbb{R}$)]:

この Δz を式 (12) に代入すると、 $z_0 = x_0 + iy_0$ として

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (14)$$

最後の等号では実関数の偏微分の定義式を用いている。

2. 虚軸沿いに近づく場合 [$\Delta z = i\Delta y, \Delta y \rightarrow 0$ ($\Delta y \in \mathbb{R}$)]:

この Δz について同様の計算を行うと

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (15)$$

複素微分 $df/dz(z_0)$ が存在するためには、極限值 (14) と (15) が同じ値となる必要がある。これらの式の実部・虚部をそれぞれ比較することで

コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (16)$$

が得られる。逆に、コーシー・リーマンの関係式 (16) が満たされるとき、複素微分 (12) が確かに存在することを示せる。

$\because \Delta z = \Delta x + i\Delta y$ とする。 $\Delta x, \Delta y$ が十分に小さい時、 $f(z)$ は以下のように振舞う。

$$f(z_0 + \Delta z) = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \quad (17)$$

$$\simeq u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + i \left[v(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right]$$

$$= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y. \quad (18)$$

ここで、コーシー・リーマンの関係式を用いて $\partial u/\partial y$ を $-\partial v/\partial x$ で、 $\partial v/\partial x$ を $\partial u/\partial x$ で置き換え、式を整理すると

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta y \\ &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i\Delta y) \\ &= f(z_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta z. \end{aligned} \quad (19)$$

この式を用いて式 (12) を評価すると

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (20)$$

となり、 $\Delta z \rightarrow 0$ の極限をとるときの向き ($\Delta y/\Delta x$) に依存しない値に収束することが示された。

コメント：

- 以上より、以下の2つが互いに等価であることが示された。
 1. 複素関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で微分可能である。
 2. $z = z_0$ で $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の実部・虚部がコーシー・リーマンの関係式 (16) を満たす。
- 複素平面上のある領域で複素関数 $f(z)$ が微分可能なとき、 $f(z)$ は解析的であるという。また、このとき関数 $f(z)$ を解析関数と呼ぶ。
- 解析関数 $f = u + iy$ の実部・虚部は、以下のラプラス方程式を満たす。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (21)$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \text{解析関数 } f \text{ の実部 } u(x, y) \text{ はコーシー・リーマンの関係式 (16) を満たすので,} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \text{が成立する。ここで、2つ目と4つ目の等号で式 (16) を使い、3つ目の等号では偏微分が可換であることを用いた。虚部 } v(x, y) \text{ についても同様にして証明できる。} \end{array} \right]$$

- $f(z)$ が微分可能なとき、 $f(z)$ は $\bar{z}$ に依存しない z だけの関数として表せる。

$$\left[\begin{array}{l} \because \text{まず、} z \text{ の実部 } x = (z + \bar{z})/2 \text{ と虚部 } y = (z - \bar{z})/2i \text{ が} \\ \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2} \\ \text{を満たすことに注意する。これを用いて複素関数 } f = u + iv \text{ の } \bar{z} \text{ による微分を計算すると} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial \bar{z}} \\ = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \right) \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + i \times \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \\ \text{最後の等号は、} f \text{ が解析関数でありコーシー・リーマンの関係式を満たすならば成立する。} \\ \text{この式より、} \partial f / \partial \bar{z} = 0 \text{ であり } f \text{ が } \bar{z} \text{ に依存しないことが示された。} \end{array} \right]$$

第3回 様々な複素関数 (有理関数、指数関数、双曲線関数)

前回の授業で導入した解析関数の例を見ていく。今回は

- べき関数・有理関数
- 指数関数
- 三角関数・双曲線関数

を扱う。

簡単な場合には、単に微分可能な実関数 $f(x)$ の引数を $x \rightarrow z$ と置き換えるだけで解析関数 $f(z)$ が得られる。コーシー・リーマンの関係式を満たすように実部・虚部を構築することが必要になる場合もある。

3.1 べき関数・有理関数

- べき関数:

べき関数 z^n を足して得られる多項式関数

$$f(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m$$

は、複素平面全体で解析関数となる。微分は実関数と同様で $f'(z) = \sum_{n=0}^m c_n n z^{n-1}$ 。

例)

- 1 次変換 $f(z) = az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$): 複素平面上での回転・拡大と平行移動を表す。
- $f(z) = z^2$: 極形式 $z = re^{i\theta}$ で表すと $f(z) = r^2 e^{2\theta}$ で、絶対値 r が 2 乗、偏角 θ が 2 倍。

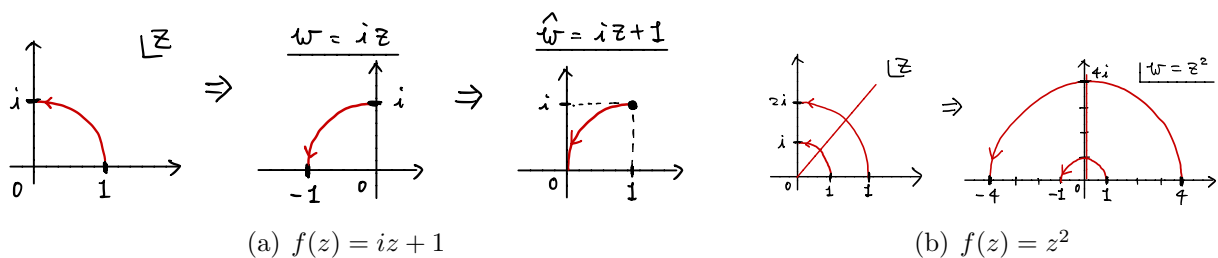


図 5: 多項式関数の例。

- 分数べき関数

極形式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ で表すと、ド・モアブルの定理 (4) より

$$f(z) = z^{1/n} = r^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi m i}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi m i}{n} \right) \right] \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

偏角 $\frac{2\pi m i}{n}$ の分だけ、 n 種類存在することに注意。

* より一般的なべき関数は、対数関数を導入してから定義する。

- 有理関数:

2つの多項式 $p(z)$, $q(z)$ の分数

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n}{d_0 + d_1z + d_2z^2 + \cdots + d_mz^m}$$

は有理関数と呼ばれる。分母が非ゼロ ($q(z) \neq 0$) のときに $f(z)$ は解析的となる。

次回、1次分数関数 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$) についてより詳しく説明する。

3.2 指数関数

実関数としての指数関数

$$f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

を複素関数に拡張することができる。そのためには、一般に下記の手順を踏む必要がある。

1. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおく
2. 実軸上で $f(z)$ が実関数 $f(x) = e^x$ と一致すると仮定する。すなわち、実軸 $y = 0$ 上で

$$u(x, 0) = e^x, \quad v(x, 0) = 0 \quad (22)$$

が満たされれるとする。

3. コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を解き、条件 (22) を満たすような関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ を構築する。

逆に、複素関数 $f(z)$ の具体形の見当がついている場合には、それがコーシー・リーマンの関係式を満たしていることを確認するだけでもよい。今回はこの方針で複素指数関数を作る。

式 (10) で、 e^x のテイラー展開に基づく $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ となることが示された。これをもとに、(複素) 指数関数を

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (23)$$

と定義する。この関数の実部・虚部がコーシー・リーマンの関係式を満たすことを確認できるので、式 (23) は解析関数となる。

$$\left[\begin{array}{l} \because e^z = u(x, y) + iv(x, y) \text{ の実部・虚部は} \\ u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y. \\ \text{これらの偏微分を計算すると} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y. \\ \text{この表式はコーシー・リーマンの関係式 (16) を満たしている。} \end{array} \right]$$

コメント：

- 引数が純虚数の指数関数の式はオイラーの公式と呼ばれる。

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (24)$$

絶対値が1の複素数を表す。複素平面上で、原点を中心とする単位円上の点に対応。

$$(\because |e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1.)$$

$$\begin{aligned} y = \pi/2 &\Rightarrow \exp(i\pi/2) = i, \\ y = \pi &\Rightarrow \exp(i\pi) = -1 \end{aligned}$$

などが特徴的。

- e^z は $2\pi i$ の周期性を持つ。

$$e^{z+2\pi ni} = e^z \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$(\because e^{z+2\pi ni} = e^z \times e^{2\pi ni} = e^z \times (\cos(2n\pi) + i \sin(2n\pi)) = e^z \times 1 = e^z.)$$

例題: $e^z = 3$ の解を以下の手順で求めよ。

- $z = x + iy$ として $e^z = 3$ を書き下し、実部・虚部を両辺で比較することで

$$e^x \cos y = 3, \quad e^x \sin y = 0$$

を導出する。

- 上式の一般解を求める。

解は $z = \log 3 + 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$) となる。

3.3 三角関数・双曲線関数

解析関数を組み合わせることで新たな解析関数を作れる。この方針で、三角関数 $\sin x, \cos x$ などを複素化する。実は双曲線関数 $\cosh x, \sinh x$ とも関係していることも観察する。

オイラーの公式 (24) より

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y. \quad (y \in \mathbb{R})$$

この二つの式を組み合わせ (実数) 三角関数 $\sin y, \cos y$ を構成できる。

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{e^{iy} + e^{-iy}}.$$

この式の引数 $y \in \mathbb{R}$ を複素数 $z \in \mathbb{C}$ に置き換えることで、(複素) 三角関数を新たに定義する。

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}. \quad (25)$$

オイラーの公式 (24) を複素化した式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ を覚えることにしても便利。

性質：

- 通常の三角関数の公式や微分はそのまま成立する。

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2 - (e^{iz} - e^{-iz})^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \cos z &= \frac{d}{dz} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{ie^{iz} + (-i)e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z \\ \frac{d}{dz} \sin z &= \frac{d}{dz} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \end{aligned}$$

- $\cos z, \sin z$ は、実軸上では実数の三角関数 $\cos x, \sin x$ と一致する。
- 一方で、虚軸上 $z = iy$ ($y \in \mathbb{R}$) では (実数の) 双曲線関数になる。

$$\begin{aligned} \cos(iy) &= \frac{e^{i \cdot iy} + e^{-i \cdot iy}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{+y}}{2} = \cosh y, \\ \sin(iy) &= \frac{e^{i \cdot iy} - e^{-i \cdot iy}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{+y}}{2i} = i \frac{e^y - e^{-y}}{2} = i \sinh y. \end{aligned} \tag{26}$$

- 引数が一般の複素数 $z = x + iy$ の場合、(複素) 三角関数は以下のようにふるまう。

$$\begin{aligned} \cos(x + iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} \\ &= \frac{e^{-y} + e^y}{2} \cos x + i \frac{e^{-y} - e^y}{2} \sin x = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sin(x + iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} \\ &= \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \cos x + i \frac{e^{-y} + e^y}{2i} \sin x = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

上記と同様に、実数の双曲線関数 (26) で $y \rightarrow z$ とすることで (複素) 双曲線関数を定義する。

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \tag{27}$$

第4回 様々な複素関数 (対数関数、1 次分数変換)

前回の授業で複素指数関数を導入した。これをもとに

- 対数関数 $\ln z = \ln |z| + i \arg z$
- 一般のべき関数 $z^p = e^{p \ln z}$

を定義する。また、1 次分数変換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ とその図形的な意味を説明する。

4.1 前回までの復習

- 複素数 z の極形式：

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, x, y \in \mathbb{R})$$

$|z|$ を z の絶対値、 $\theta \equiv \arg z$ を z の偏角と言う。

- 複素関数としての指数関数:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (28)$$

と定義する。特に、 z が純虚数のときの式はオイラーの公式と呼ばれる。

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

- べき関数：

$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ について、その整数べき z^n ($n \in \mathbb{Z}$) は

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]. \quad (29)$$

ド・モアブルの定理と同じ式。

z の分数べき $z^{1/n}$ は

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) \right] \quad (m \in \mathbb{Z}). \quad (30)$$

$z^{1/n}$ は n 乗すると z になる数 $((z^{1/n})^n = z)$ として定義される。ド・モアブルの定理を使ってこれを実際に確認できる。

$$\begin{aligned} (z^{1/n})^n &= \left\{ r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) \right] \right\}^n \\ &= (r^{\frac{1}{n}})^n \left\{ \cos\left[n \times \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right] + i \sin\left[n \times \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right] \right\} \\ &= r \left[\cos(\theta + 2m\pi) + i \sin(\theta + 2m\pi) \right] = r(\cos \theta + i \sin \theta) = z. \end{aligned} \quad (31)$$

$z^{1/n}$ の余分な偏角 $2m\pi/n$ は、三角関数の周期性 $\sin(\theta + 2m\pi) = \sin \theta$, $\cos(\theta + 2m\pi) = \cos \theta$ が起源。

4.2 対数関数

実数関数としての対数関数 $y = \ln x$ ($x, y \in \mathbb{R}$) は、指数関数 $y = e^x$ の逆関数として定義された。

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y \quad (\because e^{\ln x} = x, \ln(e^x) = x) \quad (32)$$

$\ln x$ は e を底とする対数関数。

複素関数としての対数関数 $w = \ln z$ ($z, w \in \mathbb{C}$) も同じ方針で定義する。

$$z = e^w \quad \Leftrightarrow \quad w = \ln z \quad (33)$$

この式を満たす関数 $\ln z$ を作ることにする。

対数関数の実部・虚部を

$$w = \ln z = u + iv$$

とし、 z を極形式 $z = re^{i\theta}$ で表したうえで $z = e^w$ に代入すると

$$z = e^w \quad \Rightarrow \quad z = (re^{i\theta}) = e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv}. \quad (34)$$

したがって、関数 $\ln z = u + iv$ の実部 u ・虚部 v と、この関数の引数 $z = re^{i\theta}$ は次を満たす：

$$r = e^u, \quad e^{i\theta} = e^{iv}. \quad (35)$$

(35) の第 1 式から

$$r = e^u \quad \Rightarrow \quad u = \ln r, \quad (36)$$

(35) の第 2 式から

$$e^{i\theta} = e^{iv} \quad \Rightarrow \quad v = \theta + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (37)$$

指数関数の周期性 $e^{2n\pi} = 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) のために、 $e^{i\theta} = e^{iv}$ を満たす v には $2n\pi$ を足す不定性があることに注意。式 (36), (37) より、引数が $z = re^{i\theta}$ のときの (複素) 対数関数 $\ln z$ の表式は

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (38)$$

$$= \ln |z| + i \arg z + 2n\pi i \quad (39)$$

と与えられる。この式の性質をまとめると下記の通り。

- 対数関数 $\ln z$ の実部は、引数 z の実部の対数 $\ln |z|$
- 対数関数の虚部は、引数の偏角 $\arg z$

対数関数 (39) は、偏角 $2n\pi i$ のために多価関数となっている。これを避けるために、対数関数の主値 $\text{Ln } z$ を

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z \quad (-\pi < \arg z \leq \pi) \quad (40)$$

と定義しておく。もともとの対数関数 $\ln z$ (39) の定義で、偏角 $\arg z$ を $-\pi \sim \pi$ に制限したもの。

例) $\ln(-1) = (2n+1)\pi i = \dots, -3\pi i, -\pi i, \pi i, 3\pi i, 5\pi i, \dots, \quad \text{Ln}(-1) = \pi i.$

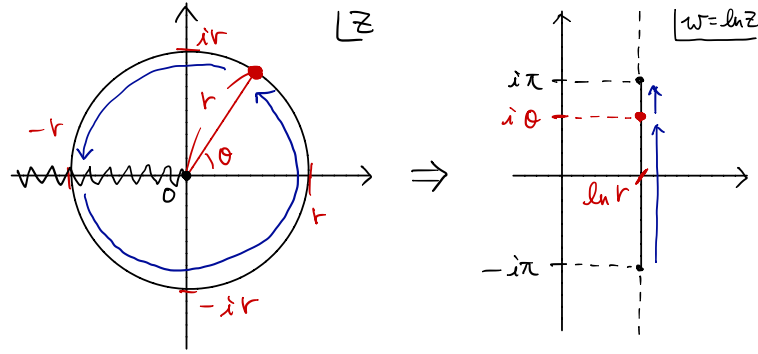


図 6: 複素対数関数 $w = \text{Ln } z$ による z 平面上の半径 r の円 $z = re^{i\theta}$ の像。 w 平面上では線分 $w = \ln r + i\theta$ ($-\pi < \theta \leq \pi$) になっている。

対数関数の性質：

式 (39) で定義される (複素) 対数関数は、実数の対数関数とほぼ同じ性質を持つ。

- 積・商の対数は対数の和・差：

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2. \quad (41)$$

ただし、偏角の不定性の分ずれることがあるので注意が必要。

例) $z_1 = z_2 = -1$:

$$\ln(z_1) = \ln(z_2) = \ln(-1) = \pi i + 2n\pi i \quad \therefore \ln(z_1) + \ln(z_2) = 2\pi i + 2n\pi i,$$

$$\ln(z_1 z_2) = \ln[(-1) \times (-1)] = \ln 1 = 0 + 2n\pi i. \quad (n \in \mathbb{Z})$$

偏角からくる不定性 $2n\pi i$ を無視すれば一致する。

- 対数関数の微分：

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{d \text{Ln } z}{dz} = \frac{1}{z}. \quad (42)$$

複素対数関数の定義式 (39) から導出可能。 $\ln z$ は $z \neq 0$ を除けば解析的となる。

$\text{Ln } z$ が解析関数となることは下記のように確認できる。 $z = x + iy$ とすると

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x} \equiv u + iv. \quad (43)$$

以下のとおり、 $\text{Ln } z$ の実部 u ・虚部 v がコーシー・リーマンの関係式を満たすことを確認できる (計算の詳細は略)。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (44)$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (45)$$

コーシー・リーマンの関係式が満たされるので、微分 $d \text{Ln } z / dz$ の値は微分を取る方向に依存しない。そこで、実軸方向の微分をとることで $d \text{Ln } z / dz$ を評価すると

$$\frac{d \text{Ln } z}{dz} = \frac{\partial \text{Ln } z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}. \quad (46)$$

4.3 一般のべき関数

これまでに z の整数べき z^n や分数べき $z^{1/n}$ を導入して調べてきた。対数関数を使ってこれを拡張する。

対数関数の定義式の p 乗を取ると

$$z = e^{\text{Ln } z} \Rightarrow z^p = (e^{\text{Ln } z})^p = e^{p \text{Ln } z}. \quad (47)$$

この式を z^p の定義として採用する。べきの値 p は一般の複素数でよいことに注意。

$\text{Ln } z$ が多価関数であることに対応して z^p も多価関数になる。そこで、 z^p の主値を

$$z^p = e^{p \text{Ln } z} \quad (48)$$

と定義しておく。

例) i^i の値は

$$i^i = e^{i \text{Ln } i} = e^{i[(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i]} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}. \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (49)$$

上記の計算では $|i| = 1, \arg i = \pi/2$ より $\text{Ln } i = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i$ ($n \in \mathbb{Z}$) となることを使っている。 $\text{Ln } i$ 由来の不定性 $2n\pi$ が出ていることに注意。一方で、 i^i の主値は

$$i^i = e^{i \text{Ln } i} = e^{i \frac{\pi i}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \quad (50)$$

となる。 $\text{Ln } z = \frac{\pi i}{2}$ となることを使っている。

4.4 1 次分数変換

前回導入した有理関数 (多項式関数の分数) のうち、分子と分母がともに 1 次関数で与えられるもの

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0) \quad (51)$$

について、その図形的な意味を調べておく。この変換はメビウス変換とも呼ばれる。 $ad - bc = 0$ のとき $w = (\text{定数})$ となるので、その場合を除くために $ad - bc \neq 0$ を仮定している。

● 特別な場合:

1 次分数変換 (51) は、以下の特別な場合を含む。

- 平行移動 $w = z + b$: 複素数 $b = x + iy$ に対応した平行移動。
- 回転・拡大 $w = az$: $a = re^{i\theta}$ として、原点を中心とした r 倍の拡大、角度 θ の回転。
- 反転 $w = 1/z$: 単位円 $|z| = 1$ を基準とする反転を表す。

この変換 $w = 1/z$ は、 $z = re^{i\theta}$ とすると

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad (52)$$

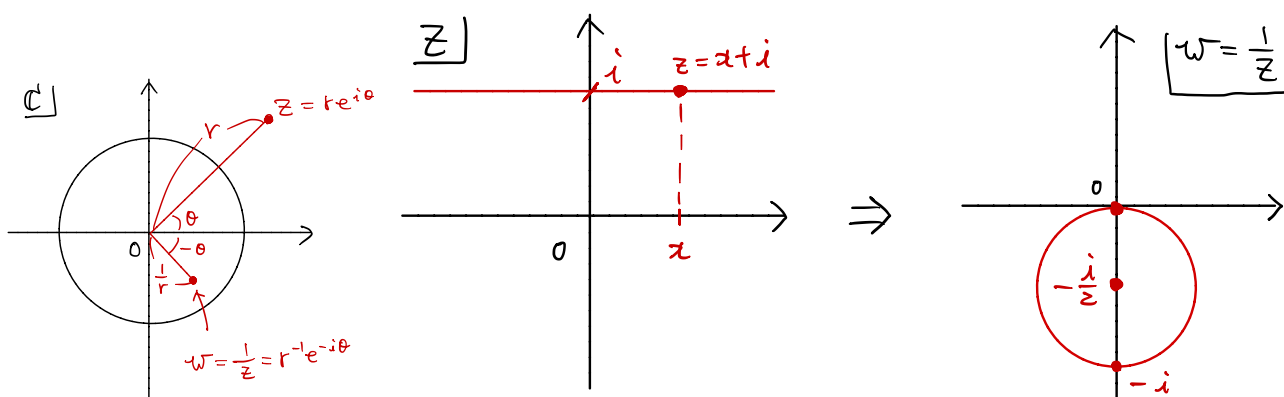
となり、絶対値 $|w| = r^{-1} = |z|^{-1}$ は元の絶対値 $|z|$ の逆数、偏角 $\arg w = -\theta = -\arg z$ は元の偏角 $\arg z$ のマイナスの値となる。

この反転で、元の変数 z での直線・円は、変換後の変数 w での直線・円に移る。

$$\begin{aligned}
& z = x + iy \text{ とすると、} z \text{ 平面における円は次の方程式} \\
& A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R}) \quad (53) \\
& \text{で表される。} x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \text{ で式を書き換え、変換 } w = 1/z \text{ をかけると} \\
& Az\bar{z} + B\frac{z+\bar{z}}{2} + C\frac{z-\bar{z}}{2i} + D = 0 \\
& \Rightarrow A\frac{1}{w\bar{w}} + B\frac{w^{-1} + \bar{w}^{-1}}{2} + C\frac{w^{-1} - \bar{w}^{-1}}{2i} + D = 0 \\
& \Leftrightarrow A + B\frac{\bar{w} + w}{2} + C\frac{\bar{w} - w}{2i} + Dw\bar{w} = 0 \quad (54) \\
& \text{この式を } w = \hat{x} + i\hat{y} \text{ (} \hat{x} = \frac{w+\bar{w}}{2}, \hat{y} = \frac{w-\bar{w}}{2i} \text{)} \text{ で書き換えると} \\
& A + B\hat{x} - C\hat{y} + D(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) = 0. \quad (55) \\
& \text{この方程式を満たす図形は、} w \text{ 平面上の円か直線となる。}
\end{aligned}$$

例) 直線 $z = x + i$ ($x \in \mathbb{R}$) は、反転 $w = 1/z$ によって w 平面上の円 $\hat{x}^2 + (\hat{y} + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ に写される。

$$\begin{aligned}
& \because \\
& z = x + i \text{ (} x \in \mathbb{R} \text{)} \Leftrightarrow y - 1 = 0 \quad (56) \\
& \text{これは、式 (53) で } A = B = 0, C = 1, D = -1 \text{ としたものに相当する。これを変換} \\
& w = 1/z \text{ で写したものは、式 (55) より} \\
& -\hat{y} - (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) = 0 \Leftrightarrow \hat{x}^2 + \left(\hat{y} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2. \quad (57) \\
& \text{これは、} w \text{ 平面上における中心 } -\frac{i}{2} \text{、半径 } \frac{1}{2} \text{ の円に相当する。}
\end{aligned}$$



(a) 点 $z = re^{i\theta}$ の像

(b) 直線 $z = x + i$ ($x \in \mathbb{R}$) の像

図 7: 単位円を基準とする反転 $w = 1/z$ による写像。(a) 点 $z = re^{i\theta}$ の像 $w = r^{-1}e^{-i\theta}$ 。絶対値は元の値の逆数 r^{-1} 、偏角はもとの値のマイナス $-\theta$ になる。(b) 直線 $z = x + i$ ($x \in \mathbb{R}$) の像 $|w + i/2| = 1/2$ 。中心 $-i/2$ 、半径 $1/2$ の円に写る。

● 一般の場合:

一般的な1次分数変換(51)は、上記の平行移動・回転・拡大と単位円を基準とする反転の組み合わせとして表せる。

∴

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a\left(z + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d} = \frac{-\frac{ad}{c} + b}{cz + d} + \frac{a}{c} \equiv \frac{K}{cz + d} + \frac{a}{c}. \quad \left(K \equiv -\frac{ad - bc}{c}\right) \quad (58)$$

この変換は、以下の変換を順次組み合わせたものとして得られる。

1. $f_1(z) = cz + d$ (c による回転・拡大と d による平行移動)
2. $f_2(z) = \frac{1}{z}$ (反転)
3. $f_3(z) = Kz + \frac{a}{c}$ (K による回転・拡大と a/c による平行移動)

これらの関数を使って、式(58)を下記のように合成関数として表せる。

$$w = f_3(f_2(f_1(z))) \equiv f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) \quad (59)$$

図形的にも、式(58)の変換は関数 $f_{1,2,3}(z)$ に相当する操作を z 平面上の図形について順次行ったものになっている。

● 1次分数変換の決定:

式(51)は4つの係数 a, b, c, d を含むが、そのうち1つは全ての係数の定数倍 $a, b, c, d \mapsto \alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d$ ($\alpha \in \mathbb{C}$)によって任意の値にセットできる。このように変換しても w の値には影響が生じない。

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\alpha az + \alpha b}{\alpha cz + \alpha d} \quad (60)$$

したがって、残り3つ分の係数の値を決めることができれば1次分数変換は一意に定まる。

係数3つ分の値を確定するためには、 z 平面上のある3点が w 平面上のどの点に写されるかを指定すればよい。

例) $z = 0, 1, 2$ のそれぞれを $w = 2, 5, 8$ に写す1次分数変換は以下のように求まる。まず、求める1次分数変換を式(51)のとおりにおくと、 $z = 0, 1, 2$ が $w = 2, 5, 8$ に写されるので

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \Rightarrow \begin{aligned} 2 &= \frac{b}{d}, & 5 &= \frac{a + b}{c + d}, & 8 &= \frac{2a + b}{2c + d} \end{aligned} \quad (61)$$

$$\Rightarrow a = 3d, b = 2d, c = 0. \quad (62)$$

この表式を w の式に代入すると

$$w = \frac{3dz + 2d}{0z + d} = 3z + 2. \quad (63)$$

● 無限遠点 ∞ :

式(51)は、分母がゼロとなる $z = -d/c$ の場合には w は定義されない。ここで、 $z = -d/c$ に対応する w の値を無限遠点 $w = \infty$ であると定義しておく、あたかも複素平面上の1点であるかのように扱うことができる。変換 $w = 1/z$ で、 z 平面の原点 $z = 0$ は $w = \infty$ に、 z 平面の無限遠点 $z = \infty$ は w 平面の原点 $z = 0$ に写る。

第5回 複素積分 (線積分、コーシーの積分定理)

実数の積分に基づいて、複素積分を定義する。

また、応用上も重要なコーシーの積分定理 $\oint_C f(z)dz = 0$ ($f(z)$: 経路 C 内で解析的) を導入する。

5.1 複素積分の定義

実数の積分は、区分求積法に基づいて定義される。

$a \leq x \leq b$ の範囲で実関数 $f(x)$ を積分することを考える。このとき、積分区間を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

と n 個の区間に分割し、これを用いて

$$\int_a^b f(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\hat{x}_i) \Delta x_i \quad (\Delta x_i \equiv x_i - x_{i-1}) \quad (64)$$

ただし、区間の幅 $|\Delta x_i|$ は分割数 n を大きくするにつれてゼロに近づくとする。また、 $\hat{x}_n$ は $x_{n-1} \leq \hat{x}_n \leq x_n$ を満たす点で、そこでの $f(x)$ の値を和を取るのに用いている。 n を大きくするにつれて分割が細くなるため、右辺の和の値は実際の積分値に近づく。その極限值が存在するとき、関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で積分可能であるという。

複素数の積分も同様に定義する。ただし、複素平面は2次元的に広がっているため、積分を行う経路をまず指定することが必要となる。ある複素平面上の経路 C について、その上の点 $z(t)$ をパラメタ t を使って

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

と表す。実積分の場合と同様に、パラメタ t の区間 $[a, b]$ を n 個の区間に分割しておく：

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

これを用いて、複素関数 $f(z)$ の経路 C に沿った線積分を

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\hat{z}_i) \Delta z_i \quad (z_i \equiv z(t_i), \Delta z_i \equiv z_i - z_{i-1}) \quad (65)$$

と定義する。ただし、複素平面上での区間の幅 $|\Delta z_i|$ は分割数 n を大きくするにつれてゼロに近づくものとする。和をとるときに用いる関数値 $f(\hat{z}_i)$ は、積分路 C 上で i 番目の区間内のある点 $\hat{z}_i = z(\hat{t}_i)$, $t_{i-1} \leq \hat{t}_i \leq t_i$ における値である。

5.2 基本的な性質

- 線形性: 複素関数の和の積分は、個別に取った積分の和に等しい。

$$\int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)] dz = k_1 \int_C f_1(z) dz + k_2 \int_C f_2(z) dz$$

- 方向転換: 積分の向きを逆にすると、積分値はマイナスになる。

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = - \int_{z_2}^{z_1} f(z) dz$$

- 積分路の分割: 積分路を C を2つの部分 C_1, C_2 に分割したとき、積分値は各部分の和。

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

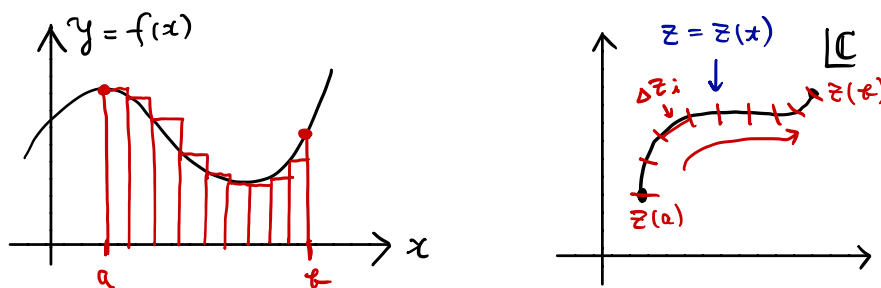


図 8: 実積分と複素積分の概念図。複素積分では、積分経路上の要素 Δz_i と、その区間における関数値 $f(z_i)$ をかけたものの和をとり、分割を細かくする極限を取って得られる値が積分値となる。

5.3 複素積分の例

積分路 C 上の点がパラメタ t で $z = z(t)$ と表せるとき、積分要素を

$$dz = \frac{dz(t)}{dt} dt$$

と書きなおせる。こうすることで、複素積分を t に関する定積分に直して計算できる。

- z^2 を原点 $z = 0$ から $z = 1 + i$ に至る線分 C 上で積分する。

この積分経路上の点は、パラメタ t を用いて

$$z(t) = t + it \quad (0 \leq t \leq 1)$$

と表せる。これを用いて、積分要素 dz を dt に書き換えると

$$dz = \frac{dz}{dt} dt = \frac{d(t + it)}{dt} dt = (1 + i) dt. \quad (66)$$

したがって、今回求める積分は

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t + it)^2 \cdot (1 + i) dt = \int_0^1 (1 + i)^3 t^2 dt = (-2 + 2i) \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i. \quad (67)$$

z^2 を原点 $z = 0$ から z_1 に至る線分 C_1 、引き続き z_1 から $z = 1 + i$ に至る線分 C_2 からなる経路 C 上で積分すると、上記の積分と同じ結果が得られる。始点・終点と同じなら、積分結果が積分経路によらない場合がある。

各積分路は

$$C_1: z(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1), \quad C_2: z(t) = 1 + it \quad (0 \leq t \leq 1)$$

と表せる。また、各積分経路上における積分要素は

$$C_1: dz = \frac{dz(t)}{dt} dt = 1 \times dt, \quad C_2: dz = \frac{dz(t)}{dt} dt = i \times dt$$

となる。したがって、求める積分は

$$\begin{aligned} \int_C z^2 dz &= \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1 + it)^2 i dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 + i \left[t + 2i \cdot \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} + i \left(1 + i - \frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i. \end{aligned} \quad (68)$$

積分路が異なるにもかかわらず、積分値は式 (67) と同じ結果になる。

- $1/z$ を単位円 C 上で一周積分：

単位円上の点は、パラメタ θ を使って

$$z(\theta) = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (69)$$

と表せる。この系路上で、積分要素 dz は

$$dz = \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta = \frac{de^{i\theta}}{d\theta} d\theta = ie^{i\theta} d\theta \quad (70)$$

となる。したがって、今回求める一周積分は

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = i [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i. \quad (71)$$

- $(z - z_0)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) を円 $|z - z_0| = \rho$ 上で一周積分：

上と同様に、パラメタ θ を使って

$$z(\theta) = z_0 + \rho e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (72)$$

$$dz = \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta = \frac{d(z_0 + \rho e^{i\theta})}{d\theta} d\theta = i\rho e^{i\theta} d\theta \quad (73)$$

と表せるため、求める積分は

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} (\rho e^{i\theta})^n \cdot i\rho e^{i\theta} d\theta = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta. \quad (74)$$

$n \neq -1$ のとき、この積分は

$$\begin{aligned} i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta &= i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)] d\theta \\ &= \frac{i\rho^{n+1}}{n+1} [\sin((n+1)\theta) - i \cos((n+1)\theta)]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

一方で $n = -1$ のとき、 $n+1 = 0$ になることに注意すると

$$i \int_0^{2\pi} 1 d\theta = i [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i \quad (76)$$

と評価できる。以上の結果をまとめると

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases}. \quad (77)$$

5.4 コーシーの積分定理

様々な複素積分を評価するうえで重要となるコーシーの積分定理を導入する。

コーシーの積分定理

有界な単連結領域 D で $f(z)$ が解析的なら、 D 内のすべての単純閉曲線 C に対して

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (78)$$

となる。

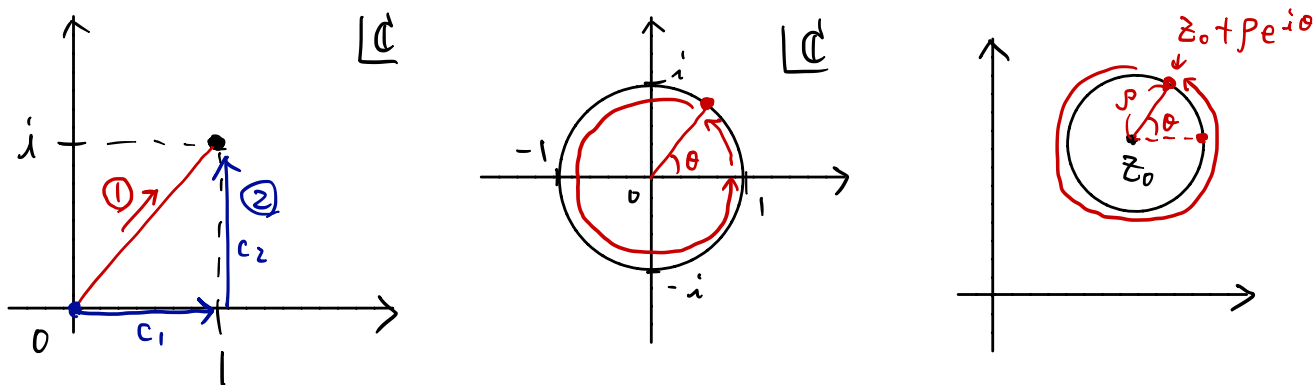


図 9: 積分 (67), (68), (124), (77) の積分路。

単純閉曲線：自分自身と交わらないループ状の曲線
 単連結領域 D ： D 内のすべての閉曲線が D 内の点だけを囲むような領域。穴が開いていない領域のこと。

定理の証明：

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $dz = dx + idy$ と表すと

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u + iv)(dx + idy) = \oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (udy + vdx). \quad (79)$$

ここで、ストークスの定理 (もしくはグリーンの定理)

$$\int_C \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C (V_x dx + V_y dy) \quad (80)$$

を用いて右辺第 1 項を書き直すと

$$\oint_C (udx - vdy) = \oint_C \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy. \quad (81)$$

領域 D 内で $f(z)$ は解析的であり、コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (82)$$

を満たすため、右辺の被積分関数はゼロになる。同様に、式 (80) の右辺第 2 項もゼロになることが示せる。

5.4.1 積分路の変形

コーシーの積分定理では一周積分に注目した。この積分路 C を、始点・終点と同じ二つの経路 C_1, C_2 に分割すると

$$0 = \oint_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz \quad \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz. \quad (83)$$

ここで、2つの経路 C_1, C_2 によって囲まれる領域では被積分関数 $f(z)$ が解析的であると仮定していることに注意する。上記の書き換えによって、関数 $f(z)$ が単連結領域 D 上で解析的なら、 D 上で積分路を変形しても積分値は変わらないことが分かった。

$f(z) = 1/z$ のような解析的ではない点を持つ関数については、その解析的ではない点 ($1/z$ については $z = 0$) を乗り越えるような積分路の変形はできないので注意すること。

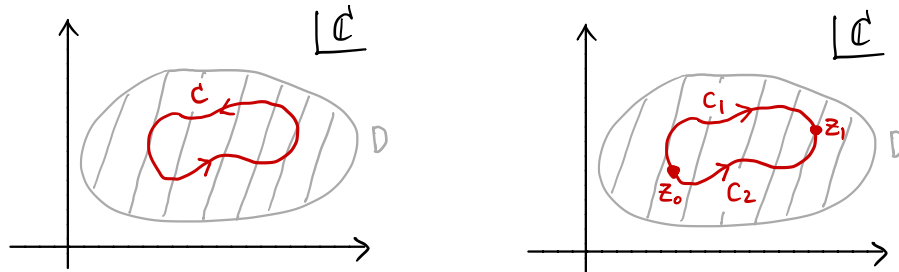


図 10: コーシーの積分定理で考える一周積分と、この定理に基づく積分路の変形。

5.4.2 多重連結領域への応用

多重連結領域 (穴のある領域) は、切断を入れることで単連結領域にできる。また、切断面上の線積分は、往復分でちょうど打ち消しあい、最終的な積分には寄与しない。このことから、切断された多重連結領域についてコーシーの積分定理を適用することで

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots = 0 \quad (84)$$

となることを示せる。ただし、 C_1 は領域の外周、 $C_2, \dots$ は領域に空いた穴の外周。また、積分の向きは、切断面を使って一周積分に直したときに反時計回りになるように取っているのに注意すること。

$f(z) = 1/z$ など、解析的でない点を含む関数についての積分路を変形する際にこの性質を使う。

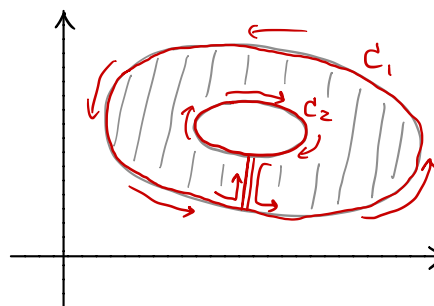


図 11: 二重連結領域 D についてのコーシーの定理。外周 C_1 , 内周 C_2 上で積分の向きが逆になっていることに注意。 C_1 と C_2 とをつなぐ積分路上では、積分値が往復分で合計ゼロになっている。

5.4.3 不定積分による計算

ここまでで、複素関数が解析的なら積分値は積分路によらないことが示された。これを活用して、複素積分の計算を単純化できる。
例)

- $f(z) = z^2$ を原点 $z = 0$ から $z = 1 + i$ まで積分

関数 z^2 は複素平面上のいたるところで解析的なので、その積分値は積分経路に依存しない。
また、 $f(z) = z^2$ の不定積分（微分すると z^2 になる関数）は $(1/3)z^3$ なので

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i. \quad (85)$$

- $f(z) = \cos z$ を $z = 0$ から $z = i$ まで積分

関数 $\cos z$ は複素平面上のいたるところで解析的なので、積分値は積分路によらず

$$\int_0^i \cos z dz = [\sin z]_0^i = \sin(i) - \sin 0 = i \sinh 1 \quad (86)$$

となる。ここで、 $\sin 0 = 0$ および

$$\sin(i) = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e}{2i} = -\frac{1}{i} \frac{e - e^{-1}}{2} = i \sinh 1 \quad (87)$$

となることを用いた。

第6回 複素積分 (コーシーの積分公式とその応用)

前回解説したコーシーの積分定理 $\oint_C f(z)dz = 0$ ($f(z)$: C 内で解析的な関数) や $\oint \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$ をもとに、

- コーシーの積分公式 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$
- 解析関数の微分の公式 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$

を示し、複素積分の計算に応用する。

6.1 準備：積分路の変形

コーシーの積分定理や様々な複素積分を行うにあたり、積分路を適切に変形することが必要となる。今回は特に周積分の経路を変形することが重要となるので、その方法を解説する。

復習：複素積分の性質

- 線積分の向きを反転すると積分値はマイナスになる。

複素平面上の点 a から b にいたる積分路を逆向き (b から a) にたどって積分すると

$$\int_a^b f(z)dz = - \int_b^a f(z)dz.$$

- ある複素線積分の積分路を分割すると、分割した各積分路の積分値の合計は元の積分値と等しい。

複素平面上の点 a から b にいたる積分路を系路上の点 c で分割すると

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^c f(z)dz + \int_c^b f(z)dz.$$

復習：コーシーの積分定理

複素関数 $f(z)$ の閉路 C に沿った一周積分は、 C で囲まれる範囲全体で $f(z)$ が解析的ならゼロになる。

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad [f(z) : \text{経路 } C \text{ 内で解析的}]$$

復習：線積分の経路の変形

- 複素平面上で点 a から b にいたる2つの異なる経路 A, B があったとする。
- A と B で囲まれる領域で、関数 $f(z)$ は解析的であるとする。

このとき、経路 A に沿った $f(z)$ の積分値は、経路 B にそった積分値と等しい。

⇒ 関数 $f(z)$ が解析的な範囲で、積分路を変形しても積分値は不変。

($\therefore$) 始点 a から経路 A に沿って終点 b に行き、経路 B に沿って点 a に戻ってくる閉路 C を考える。上記の 2 つ目の仮定より、 C 内で $f(z)$ は解析的であるので、コーシーの定理より

$$0 = \oint_C f(z)dz = \int_A^b f(z)dz + \int_b^a f(z)dz = \int_A^b f(z)dz - \int_a^b f(z)dz.$$

$$\therefore \int_A^b f(z)dz = \int_B^b f(z)dz$$

以上を踏まえて、一周積分の積分路の変形を行う。

- 2 つの閉路 C_1, C_2 があったとする。
- C_1 と C_2 に囲まれる領域で、関数 $f(z)$ は解析的であるとする。

このとき、閉路 C_1, C_2 に沿った同じ向きの一週積分値は、互いに一致する。

$\Rightarrow f(z)$ が解析的な範囲で一週積分の経路を変形しても、積分値は変わらない。

今後、様々な複素積分を評価する際にこの種の経路の変形を多用する。今回はコーシーの積分定理の証明と練習問題で用いる。

($\therefore$) 図 (12) のように 2 つの閉路 C_1, C_2 をつなぐ経路を一本用意し、それを通じて

1. C_1 を反時計回りに回る
2. C_1 と C_2 をつなぐ経路を $C_1 \rightarrow C_2$ と移動
3. C_2 を時計回りに回る
4. C_1 と C_2 をつなぐ経路を $C_2 \rightarrow C_1$ と移動

と一筆書きする経路を C' とする。

経路 C' は一つの閉路であり、その内側の全体で $f(z)$ は解析的である (図 (12) 参照)。したがって、コーシーの積分定理より C' に沿った一周積分の値はゼロになる。さらに、その積分経路を上記の通り分割すると

$$0 = \oint_{C'} f(z)dz = \int_1 f(z)dz + \int_2 f(z)dz + \int_3 f(z)dz + \int_4 f(z)dz. \quad (88)$$

このうち、1 番目の積分は経路 C_1 に沿った反時計回りの積分に、3 番目の積分は、積分経路の向きまで考えると経路 C_2 に沿った反時計回りの積分のマイナスに一致する。

$$\int_1 f(z)dz = \oint_{C_1, \circlearrowleft} f(z)dz, \quad \int_3 f(z)dz = \oint_{C_2, \circlearrowleft} f(z)dz = - \oint_{C_2, \circlearrowright} f(z)dz. \quad (89)$$

また、4 番目の積分は、2 番目の積分と同じ経路を逆向きにたどるので、2 番目の積分値のマイナスになる。

$$\int_4 f(z)dz = - \int_2 f(z)dz. \quad (90)$$

以上を用いて式 (88) を書き換えると

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_1 f(z)dz + \int_2 f(z)dz + \int_3 f(z)dz + \int_4 f(z)dz \\
 &= \oint_{C_1, \odot} f(z)dz + \int_2 f(z)dz - \oint_{C_2, \odot} f(z)dz - \int_2 f(z)dz \\
 &= \oint_{C_1, \odot} f(z)dz - \oint_{C_2, \odot} f(z)dz \\
 \therefore \quad \oint_{C_1, \odot} f(z)dz &= \oint_{C_2, \odot} f(z)dz.
 \end{aligned}$$

すなわち、閉路 C_1 と C_2 の間で $f(z)$ が解析的ならば、積分路を C_1 から C_2 に変更しても積分値は変わらない。

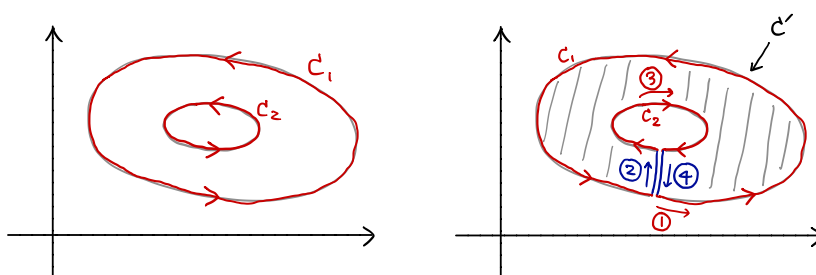


図 12: 閉路 C_1 を C_2 に変形する際に考える経路。 C_1 と C_2 をつないで作った経路 C' も一つの閉路で、かつその内側で $f(z)$ は解析的であることに注意。

6.2 コーシーの積分公式

複素平面上のある一点 $z = z_0$ における複素関数の値 $f(z_0)$ を、その点を囲む一周積分として表すのがいかに述べるコーシーの積分公式である。

コーシーの積分公式

単連結領域 D において解析的な関数 $f(z)$ について

$$2\pi i f(z_0) = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (91)$$

ただし、 z_0 は D 内の任意の点、 C は z_0 を取り囲む D 内の任意の単純閉曲線。

コメント：前回、 $z = z_0$ を囲む経路 C 上で $1/(z - z_0)$ を一周積分すると $2\pi i$ になることを示した：

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

この被積分関数に、経路 C の内部で解析的な関数 $f(z)$ をかけてから積分すると

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \times f(z_0)$$

と、分母がゼロになる地点 $z = z_0$ における $f(z_0)$ が結果として出てくる、という公式である。

($\therefore$) 公式 (91) の被積分関数を $f(z) = f(z_0) + (f(z) - f(z_0))$ のように z_0 における値 $f(z_0)$ とその値からのずれ $f(z) - f(z_0)$ に分離して書くと

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \quad (92)$$

被積分関数は、経路 C 内で $z = z_0$ を除くすべての点で解析的である。¹

したがって、積分路 C を、 $z = z_0$ を中心とする半径 ρ の円 $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に変形しても積分値は変わらない。

この積分路を用いて、式 (92) の右辺第一項が $2\pi i f(z_0)$ に、第二項がゼロになることを以下で示す。

- 右辺第一項に $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を代入すると

$$\oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i \rho e^{i\theta} d\theta = f(z_0) \cdot i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0). \quad (93)$$

θ 積分に書き換える際に、 $z(\theta) = z_0 + \rho e^{i\theta}$ に対して

$$dz = \frac{dz}{d\theta} d\theta = i \rho e^{i\theta} d\theta$$

となることを用いている。

- 右辺第二項の被積分関数 $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ は、積分路の半径 ρ をゼロに近づける極限で分子も分母もゼロに近づき、それらの比 $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ はある定数 ϵ/ρ よりも小さくなると示せる。² したがって、右辺第二項の積分は以下のように評価される：

$$\left| \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \oint_C \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| |dz| < \frac{\epsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

不等式の変形には複素数の三角不等式 $|ab| < |a||b|$ ($a, b \in \mathbb{C}$) を用いている。この式より

$$\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

が結論される。

¹ $\frac{1}{z - z_0}$ が $z = z_0$ で解析的ではないことに対応して、 $\frac{f(z)}{z - z_0}$ も $z = z_0$ で解析的ではなくなる。

² 右辺第二項の被積分関数 $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ が積分路 $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 上でどう振る舞うかを調べる。まず、 $f(z) - f(z_0)$ は、 $f(z)$ が連続関数であることから、 $\epsilon > 0$ をある値に取ったとき、それに対応してある数 $\delta > 0$ で $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ を満たすものが存在する。ここで、積分路の半径を $\rho < \delta$ が満たされるように取ると $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\rho}$ が積分路 $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 上の全体で満たされる。

6.2.1 コーシーの積分定理の応用

コーシーの積分公式 (91)、およびコーシーの積分定理 (78) を用いて

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (f(z): C \text{ 内で解析的})$$

の形の積分を簡単に評価できる。

- 点 $z = z_0$ が閉路 C 内に含まれるなら、コーシーの積分定理より

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

- 点 $z = z_0$ が閉路 C 内に含まれないなら、被積分関数 $\frac{f(z)}{z - z_0}$ は C 内全体で解析的となる。このとき、コーシーの積分定理 (閉路 C 内で $f(z)$ が解析的なら $\oint_C f(z) dz = 0$) より

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

[例題] 関数 $\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$ を、以下の点を中心とする半径 1 の円に沿って反時計回りに積分せよ。

(a) $z = 1$

(b) $z = \frac{1}{2}$

(c) $z = -1$

(d) $z = i$

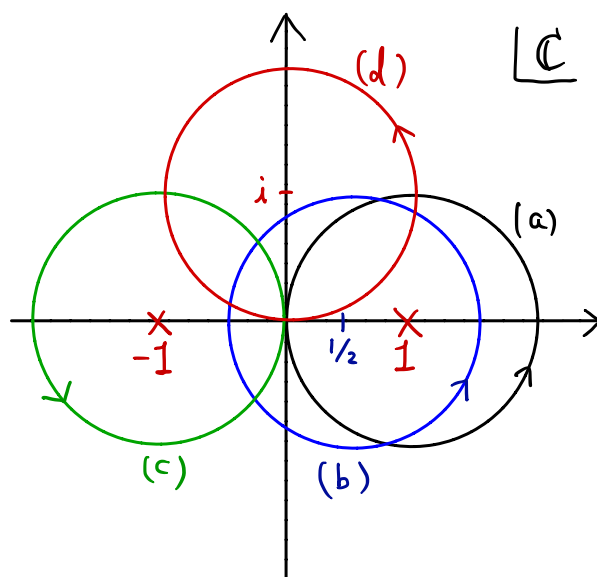


図 13: 今回の例題で用いる積分経路。複素平面上の (a) $z = 1$, (b) $z = \frac{1}{2}$, (c) $z = -1$, (d) $z = i$ のそれぞれを中心とする半径 1 の円である。

[解答例]

被積分関数は

$$\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(z - 1)}$$

と変形でき、特に分母は $z = 1$, $z = -1$ でゼロになる。

- (a), (b) は、その内側に点 $z = 1$ を含み、 $z = -1$ は含まない。したがって、被積分関数の分母の因子のうち $z - 1$ だけが経路内でゼロになる。これにコーシーの積分公式を適用すると

$$\oint_{(a), (b)} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \oint_{(a), (b)} \frac{\frac{z^2 + 1}{z + 1}}{z - 1} dz = 2\pi i \cdot \frac{z^2 + 1}{z + 1} \Big|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{1^2 + 1}{1 + 1} = 2\pi i.$$

- (c) は、その内側に点 $z = -1$ だけを含むので、被積分関数の分母のうち $z + 1$ だけがゼロになる。したがって

$$\oint_{(c)} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \oint_{(c)} \frac{1}{z + 1} \cdot \frac{z^2 + 1}{z - 1} dz = 2\pi i \cdot \frac{z^2 + 1}{z - 1} \Big|_{z=-1} = 2\pi i \cdot \frac{(-1)^2 + 1}{-1 - 1} = -2\pi i.$$

- 円 (d) は、その内側に $z = \pm 1$ を含まないため、被積分関数 $\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$ はその内側全体で解析的となる。したがって、コーシーの積分定理より

$$\oint_{(d)} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = 0.$$

6.3 解析関数の微分の公式

コーシーの積分公式では、ある地点 $z = z_0$ における関数値 $f(z_0)$ を一周積分として表した。これと類似したものとして、その地点における関数の微分値 $\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) \equiv f^{(n)}(z_0)$ を一周積分として表す公式もある。

解析関数の微分の公式

単連結領域 D において関数 $f(z)$ が解析的なとき、 D 内では $f(z)$ のすべての階数の微分が存在する。

さらに、 D 内の点 $z = z_0$ における微分値 $f^{(n)}(z_0)$ は以下のように表せる：

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (94)$$

ただし、 z_0 は D 内の任意の点、 C は z_0 を取り囲む D 内の任意の単純閉曲線。

コメント：

- 複素関数 $f(z)$ が解析的 (1 階微分 $f'(z_0)$ が存在する) ならば、 $f(z)$ は無限に微分可能であることを示す定理である。一般の関数 $f(x)$ には 1 階微分可能だが 2 階微分が存在しないものなどが存在する。こうしたものと比べて、解析関数は単純な性質を持つということを意味している。
- 公式の覚え方：

もし、点 $z = z_0$ における関数 $f(z)$ のテイラー展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(z_0)(z-z_0)^3 + \cdots \quad (95)$$

と、分数関数の一周積分の性質

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases} \quad (96)$$

を覚えていれば、公式 (94) を以下のように導くことができる。

$$\begin{aligned} & \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \\ &= \oint_C \frac{f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(z_0)(z-z_0)^3 + \cdots}{(z-z_0)^{n+1}} dz \\ &= \oint_C dz \left[\frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}} + \frac{f'(z_0)(z-z_0)}{(z-z_0)^{n+1}} + \frac{1}{2} \frac{f''(z_0)(z-z_0)^2}{(z-z_0)^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} + \cdots \right] \\ &= \oint_C dz \left[\frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}} + \frac{f'(z_0)}{(z-z_0)^n} + \frac{1}{2} \frac{f''(z_0)}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{f^{(n)}(z_0)}{z-z_0} + \cdots \right] \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \end{aligned} \quad (98)$$

最後の等式では、式 (96) のように一周積分で $\frac{1}{z-z_0}$ は $2\pi i$ に、その他の項 $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ ($n \neq 1$) はゼロになることを用いた。

実際には、公式 (94) をもとにしてテイラー展開の式 (95) を示すことになる。今後の授業でまた説明する。

[公式 (94) の証明概要]

$n=1$ の場合の公式

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad (99)$$

を証明する。

関数の微分 $f'(z_0)$ の定義式から出発して、それをコーシーの積分公式で書きなおすと

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i \Delta z} \oint_C \left[\frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} - \frac{f(z)}{z - z_0} \right]$$

この式の右辺の積分をさらに変形すると

$$\frac{1}{\Delta z} \oint_C \left[\frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} - \frac{f(z)}{z - z_0} \right] = \oint_C \left[\frac{f(z)}{(z-z_0)^2} + \Delta z \cdot \frac{f(z)}{(z-z_0 - \Delta z)(z-z_0)^2} \right] dz.$$

このうち、右辺第2項が極限 $\Delta z \rightarrow 0$ でゼロになっていれば公式 (94) が示される。点 z_0 から最も近い積分経路 C 上の点までの距離を d とすると、 Δz が十分小さい時には

$$\left| \frac{1}{z-z_0} \right| \sim \left| \frac{1}{z - (z_0 + \Delta z)} \right| \lesssim \frac{1}{d}$$

となる。

$$\left| \Delta z \cdot \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz \right| < |\Delta z| \cdot \oint_C \left| \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} \right| |dz| < |\Delta z| \cdot \frac{L}{d^3} \max_C f(z). \quad (100)$$

ただし、 $L = \oint_C |dz|$ は積分経路の長さ。 $\max_C f(z)$ は経路 C 上における $f(z)$ の最大値で、 $f(z)$ が解析的であることからこれは有限の値となる。したがって、 $\Delta z \rightarrow 0$ の極限で式 (100) はゼロとなり、公式 (94) が示された。

より正確な証明については教科書 3.6 節を参照のこと。

[例題] 関数 $\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^3}$ を円 $|z| = 2$ に沿って積分せよ。

[解答例] 点 $z = 1$ で被積分関数 $\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^3}$ の分母はゼロとなる。また、この点は円 $|z| = 2$ の内側に存在するので、微分公式 (94) で $n = 2$, $z_0 = 1$ としたものを適用することにより

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} [\cos(\pi z)]'' \Big|_{z=1} = \pi i [-\pi^2 \cos(\pi z)] \Big|_{z=1} = -\pi^3 i \cos(\pi) = \pi^3 i.$$

第7回 ベキ級数（収束半径）

[教科書 3.1 章の一部、3.2 章]

複素平面上の点 $z = z_0$ の近傍におけるべき級数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \quad (101)$$

について、その基本的な性質（収束半径の定義と求め方など）を学ぶ。

次回、解析関数をべき級数として表すテイラー展開：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots$$

を学ぶための準備に相当する。

7.1 ベキ級数

式 (101) の $f(z)$ のように、係数 a_n と変数 $z - z_0$ のべきの積の和で表される式を $z - z_0$ のべき級数と呼ぶ。無限和が収束するならば $f(z)$ は複素関数となるが、 z の値によっては和が収束せず、 $f(z)$ が関数として意味をなさない場合がある。雰囲気をつかむため、べき級数の例をいくつか見てみることにする。

- (原点 $z_0 = 0$ を中心とする) 等比級数（幾何級数）

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^N z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \quad (102)$$

この和 $f_N(z)$ が、 $N \rightarrow \infty$ とする極限で有限値に収束するかを判別したい。そのためには、右辺に現れる z^{N+1} の $N \rightarrow \infty$ における振る舞いを調べればよい。 $z = r = e^{i\theta}$ と表して、 z^N の絶対値の大きさに注目すると

$$|z^N| = |(re^{i\theta})^N| = |r^N| |e^{iN\theta}| = r^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & (|z| = r < 1) \\ 1 & (|z| = r = 1) \\ \infty & (|z| = r > 1) \end{cases}.$$

ただし、 $|e^{iN\theta}| = 1$ となることを使っている。したがって、式 (102) の極限值は³

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{1-z} \text{ に収束} & (|z| < 1) \\ \text{発散 (振動的)} & (|z| = 1) \\ \infty & (|z| = r > 1) \end{cases} \quad (103)$$

となる。原点を中心とする半径 1 の円の内部 $|z| < 1$ で収束、その外側 $|z| \geq 1$ で発散していることに注意。

³ $|z| = r = 1$ の場合、式 (102) の和は

$$f_N(z)|_{z=e^{i\theta}} = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]}{1 - e^{i\theta}}$$

となる。 N を増やすごとに分子は振動的に変化し続け、一定値に収束することはない。このような場合も和 $f_N(z)$ は発散すると言います。

- 指数関数 e^z

次回の授業でも示すが、指数関数は以下のようにべき級数で表せる。実関数としての指数関数と同様。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots \quad (104)$$

このべき級数は、複素平面上の全ての z について収束することを示せる。

数列が収束するかどうか、する場合は複素平面上のどの範囲で収束するかを調べるためには、いくつかのテクニックを使う必要がある。それを次のセクションで整理する。

7.2 収束の判定法

数列とその和の収束性と、収束するか否かを判別するための方法について、この講義に必要な分だけ簡単にまとめておく。より詳細については教科書 3.1 章を参照のこと。

定義：数列の収束

ある数列 $z_1, z_2, \dots = \{z_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ の極限で定数 c に収束するとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある整数 $N > 0$ が存在して

$$|z_n - c| < \epsilon \quad (\forall n > N) \quad (105)$$

が成立する場合のことを指す。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$ と書き表す。

ある数列が上記の意味で収束しない場合、その数列は発散するという。 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ となる場合、 n を増やすにつれて $|z_n|$ が一つの値に収束せず変化し続ける場合などが存在する。

上記の収束の定義は本来は実数 $z_n \in \mathbb{R}$ についてのものであるが、複素数 $z_n \in \mathbb{C}$ の場合でもその実部・虚部それぞれに注目することで同様の定義ができる。

定義：級数の収束

ある級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$ が収束するとは、数列 $\{z_n\}$ の部分 and $f_N(z)$:

$$f_N(z) = \sum_{n=1}^N z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N$$

が $N \rightarrow \infty$ とする極限で収束するときという。

定義：絶対収束

ある級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$ について、その各項の絶対値の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

が収束するとき、絶対値をとる前の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束するという。

特に、ある級数が絶対収束するならばその級数は収束することが示せる。各項の絶対値をとってか

ら和をとることで、もとの級数 (の絶対値) よりも大きくなることが保証される。したがって、絶対収束は単なる収束よりも厳しい条件下でのみ起こることがわかる。

以下では、ある級数が収束するか否かを判別するための判定法を3つ紹介する。特に、後ほど級数の収束半径を求めるのに比判定法を主に使う。

比較判定法

ある級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ に対して、収束する級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ で

$$|z_n| \leq b_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (106)$$

を満たすものが存在するなら、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束する。

収束する級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ を用意して、それと比較することで収束性を示す方法である。⁴

比判定法

$z_n \neq 0$ を満たす級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$ となるとき、

- (a) $L < 1 \Rightarrow$ 級数は絶対収束する。
- (b) $L = 1 \Rightarrow$ この方法では判定できない。
- (c) $L > 1 \Rightarrow$ 級数は発散する。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$ となるとき、級数の n が大きい部分について各項の絶対値をとったものは等比級数 $|z_n| + |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots = |z_n| (1 + L + L^2 + \dots)$ のように振る舞う。これは $L < 1$ のときに $\frac{|z_n|}{1-L}$ に収束し、 $L > 1$ のときには発散する。このような方針に基づいて上記の判定法を導くことができる。なお、 $L = 1$ となった場合には別の手法で収束・発散を調べる必要が生じるので注意すること。⁵

⁴[比較判定法の証明] 元の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ で各項の絶対値を取って得られる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ を考える。上の条件が満たされるとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ となる。元の級数の部分和 $\sum_{n=1}^N |z_n|$ は N について単調増加なので、上に有界な単調増加列は収束することを使うと、 $N \rightarrow \infty$ の極限で元の級数が絶対収束することが示される。

⁵(b) $L = 1$ の場合については、級数ごとに収束性が異なる。例えば、

$$(1) \quad z_n = \frac{1}{n}, \quad (2) \quad z_n = \frac{1}{n^2} \quad (107)$$

を用いて与えられる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ を考えると、(1) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, (2) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$ となる一方で、それぞれの級数は

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots > \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{\infty} = \infty,$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 1 + 1 = 2$$

となり、(1) の級数は発散、(2) の級数は収束 (正確な収束値は $\pi^2/6$) することがわかる。

根判定法

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ となるとき、

- (a) $L < 1 \Rightarrow$ 級数は絶対収束する。
- (b) $L = 1 \Rightarrow$ この方法では判定できない。
- (c) $L > 1 \Rightarrow$ 級数は発散する。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ となるとき、級数の各項は $|z_n| \sim C L^n$ (C は定数) のように振る舞う。したがって、級数は $L < 1$ のときに収束し、 $L > 1$ のときに発散する。^{6,7}

7.3 ベキ級数の収束半径

7.2 節で導入した収束判定法を用いて、ベキ級数が収束する複素平面上的領域の半径 (収束半径) を求めることができる。まず、ベキ級数の収束に関する定理を述べ、その後に収束半径を求める具体的な方法を解説する。

定理 (ベキ級数の収束)

- (1) ベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ($a_n \in \mathbb{C}$ は定数の係数) がある点 $z = z_1$ で収束するとする。このとき、複素平面上的領域 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ の全体でこの級数は絶対収束する。
- (2) 同様に、上記のベキ級数が点 $z = z_2$ で発散するとする。このとき、領域 $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ の全体でこの級数は発散する。

級数が収束する点が一点 (上記では $z = z_1$) 存在すると、ベキ級数の基準点 $z = z_0$ を中心とし、 z_0 から見て z_1 よりも近い点の全て、すなわち収束点までの距離を半径とする円の内部全体で級数は絶対収束する。

逆に、級数が発散する点が一点 (上記では $z = z_2$) 存在すると、 z_0 から見て z_2 よりも遠い点の全て、すなわち発散点までの距離を半径とする円の外部全体で級数は発散する。

どちらの場合も、 $z = z_0$ を中心とする円の内部・外部全体で収束・発散するのが特徴。

[証明の概要] ある点 z_1 でベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ が絶対収束する場合には、7.2 節で導入した比較判定法で (1) を示せる。実際には z_1 で級数が収束することを使うだけで (1) を示せるが、そのためにはもう少し証明を工夫する必要がある。教科書 3.2 章の証明を参照。(2) は (1) から従う。

上の定理から、ベキ級数が収束する領域は複素平面上的円盤領域になること、またその領域外部の全体でベキ級数は発散することがわかる。この収束領域のことを収束円、その半径のことを収束半径と呼ぶ。収束円の直上では、ベキ級数が収束するか発散するかは一般的には定まらない。

⁶なお、式 (107) の例 (1), (2) のどちらについても $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = 1$ となる。よって、根判定法を用いてもこれらの級数の収束・発散を判定することはできない。

⁷極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ が存在しない場合でも、数列 $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$, $\sqrt[n]{|z_n|}$ がある定数 $q < 1$ よりも常に小さくなるならば、その級数は絶対収束することが示せる。教科書 3.1 章を参照。

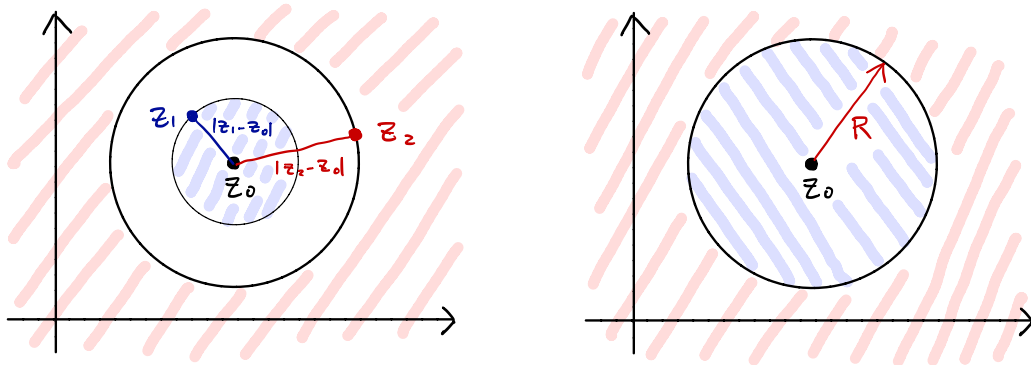


図 14: 左図: べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ が点 $z = z_1$ で収束し $z = z_2$ で発散するとき、 z_0 を中心とする半径 $|z_1 - z_0|$ の円内全体 (青斜線部) で級数は絶対収束、半径 $|z_2 - z_0|$ の円外全体 (赤斜線部) で発散する。右図: べき級数が収束する点全体 (青斜線部) を含む円で最小半径のものは収束円、その半径 R は収束半径と呼ばれる。収束円の外部 $|z - z_0| > R$ 全体でべき級数は発散する。

収束半径は、そのべき級数が収束して解析関数として振る舞う領域はどこかを示す。べき級数は解析関数を近似的に表す場合などに用いられるが、収束半径はその表式がどこまで有効かを示す役割を果たす。

べき級数の係数 a_n の絶対値が $n \rightarrow \infty$ で一定値に収束する場合には、この収束半径を求めるための公式があるので紹介する。

収束円の半径の公式 (コーシー・アダマールの公式) —

べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ について、隣接する項の係数の絶対値の比が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L^*$$

と一定値に収束するとする。このとき、そのべき級数の収束半径 R は

$$R = \frac{1}{L^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (108)$$

で与えられる。 $L^* = 0$ の場合は複素平面全体でべき級数は収束し、 $R = \infty$ と書き表す。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ が発散する ($L^* = \infty$) 場合は収束半径は $R = 0$ となり、べき級数は $z = z_0$ を除くすべての点で発散する。

[証明] 7.2 節の比判定法を $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ に適用すると

$$\frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L^* |z - z_0| \equiv L$$

となる。 L^* が有限の場合には、比判定法から $L < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < 1/L^*$ なら級数は収束し、 $L > 1 \Leftrightarrow |z - z_0| > 1/L^*$ なら級数は発散することがわかる。

コメント:

- 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L_*$ が存在する場合も、収束半径は $R = 1/L_*$ となる。証明は根判定法に基づいて行う。
- 数列 $|a_{n+1}/a_n|$ が収束しない場合には個別に議論する必要がある。例えば、数列が振動的でいくつかの収束値を持つ場合、それらの最大値の逆数が収束半径となる。⁸

例) ベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z-3i)^n$ の収束半径 R は $1/4$ となることが以下の計算でわかる。

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \cdot (n+1)^2 = \frac{1}{4}.$$

一方で、ベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{20n}}{n!} (z-3)^n$ については

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{20n}}{n!}}{\frac{2^{20(n+1)}}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{20n}}{2^{20(n+1)}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{20}} \cdot n = \infty.$$

したがって、収束半径は無限大であり、ベキ級数は複素平面全体で収束する。

⁸より正確には、数列 $|a_n/a_{n+1}|$ の集積点 (部分数列の収束値) で最大のものが収束半径となる。

第8回 ベキ級数（テイラー級数）

[教科書 3.3 章, 3.4 章]

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が解析関数の一つであること、逆に解析関数 $f(z)$ は点 $z = z_0$ の周りでベキ級数の形に展開できて

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots$$

と表せることを学ぶ。実関数について導入したテイラー級数（テイラー展開）を複素関数に拡張したものとなる。関数 $f(z)$ の値を点 $z = z_0$ における関数の値 $f(z_0)$ やその微分 $f^{(n)}(z_0)$ を用いて近似的に表すのに使えるほか、後ほど複素積分の簡単な公式を導出する際にもこの表式を活用して行うことになる。

8.1 ベキ級数の性質

ベキ級数は以下の性質を持つ。以下では簡単のため展開の中心を原点にセットする ($z_0 = 0$) が、 $z \mapsto z - z_0$ と置き換えれば元の表式に戻る。

- 一意性: 2つのベキ級数全体が一致するとき、級数の各項同士も完全に一致する。

$$\left[\begin{array}{l} 2 \text{ つのベキ級数 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ が、} |z| < R \text{ で収束し、かつ} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \\ \text{を満たすとする。このとき、係数 } a_n \text{ と } b_n \text{ は } a_n = b_n \text{ (} n = 0, 1, 2, \dots \text{) を満たす。} \\ \text{証明は } z = 0 \text{ で級数を評価することにより、帰納的に行える。} \end{array} \right]$$

- ベキ級数同士の和・積

2つのベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ が $|z| < R$ で収束するとき、それらの和・差は項別の和・差で与えられる。

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$$

また、ベキ級数の積はコーシー積と呼ばれる次の表式で与えられる。

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} \right) z^n. \end{aligned} \tag{109}$$

- ベキ級数の微分・積分

べき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の微分は、級数の各項を別個に微分することで与えられる。⁹

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} (a_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (110)$$

また、微分の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ の収束半径は、微分する前の級数の収束半径と一致する。

$$\left[\begin{array}{l} \because \text{コーシー・アダマールの公式 (108) より、元の級数の収束半径 } R \text{ は} \\ \\ R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ \\ \text{で与えられる一方、式 (110) で表される級数の収束半径 } \tilde{R} \text{ は} \\ \\ \tilde{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \\ \\ \text{となり、元の収束半径 } R \text{ と一致する。} \end{array} \right]$$

微分と同様に、級数の不定積分は、級数の各項を積分したものに一致し、その収束半径は元の級数のそれと一致する。

$$\int f(z) dz = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int a_n z^n dz \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$$

以上の結果は、べき級数 $f(z)$ はその収束半径の内部で解析関数となっていることを意味している。

8.2 テイラー級数

まず最初に、解析関数 $f(z)$ のテイラー展開の式を導入する。

テイラー級数

複素関数 $f(z)$ が領域 $|z - z_0| < R$ で解析的であるとする。このとき、 $f(z)$ を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n \quad (111)$$

で与えられるテイラー級数で表せる。級数に現れる係数は、 $f^{(n)}(z_0)$ を解析関数の微分の公式 (94) によって

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* \quad (112)$$

と、テイラー展開される関数 $f(z)$ を積分することで求められる。ただし、 C は z_0 を含む D 上の反時計回りの積分経路。

⁹証明は、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を微分の定義に従って書き表したものと、式 (110) との差がゼロになること

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} a_n \left[\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - n a_n z^{n-1} \right] = 0$$

を示すことにより行われる。計算の詳細は省略する（教科書 3.3 節を参照のこと）。

[テイラー級数の表式 (111) の導出]

コーシーの積分公式 (92):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* \quad (113)$$

について、被積分関数に含まれる $\frac{1}{z-z^*}$ をテイラー展開の中心 $z = z_0$ の周りで展開することを考える。等比級数の和の公式より

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots \quad (114)$$

と表されることを使うと、 $\frac{1}{z-z^*}$ を以下のように書き換えることができる：

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^* - z} &= \frac{1}{z^* - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{z^* - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z^* - z_0}} \\ &= \frac{1}{z^* - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{z^* - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right)^2 + \cdots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z^* - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

これを式 (113) に代入すると

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

ただし、最後の等式では解析関数の微分の公式 (94) と用いた。この表式はテイラー級数の式 (111), (112) そのものである。

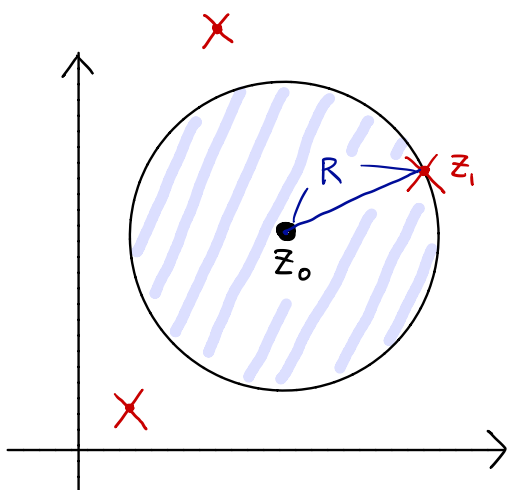
コメント：

● テイラー級数の収束半径

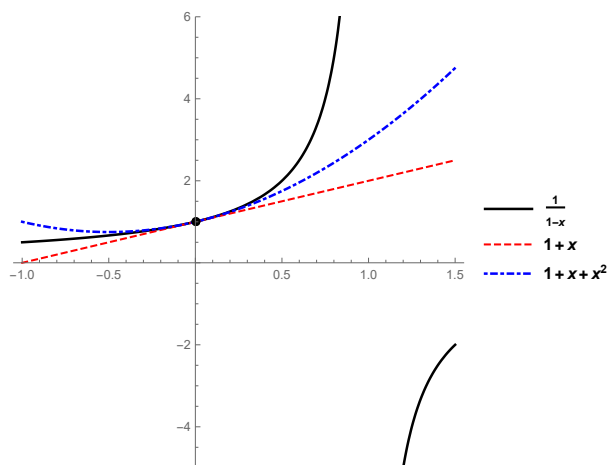
上記のテイラー級数の導出は、 $f(z)$ が解析的である範囲で有効である。逆に、 $f(z)$ が点 $z = z_1$ で解析的でなくなるとすると、この点でテイラー級数も収束しなくなる。べき級数が収束する範囲は円形領域となることを思い出すと、テイラー級数は点 $z = z_0$ を中心とする半径 $|z_1 - z_0|$ の円形領域で収束することがわかる。

$f(z)$ が解析的でなくなる点は関数 $f(z)$ の特異点と呼ばれる。これを使って、**テイラー級数の収束半径は、展開の中心点から見て最も近い特異点までの距離となる**と言い換えることができる。級数の収束半径を求めるうえで重要な性質である。

- 原点を中心とするテイラー展開 ($z_0 = 0$) にはマクローリン展開という名前がついているが、その場合でも単にテイラー展開と呼ばれることの方が多い。
- テイラー展開をある次数で打ち切ると、元の関数 $f(z)$ を展開の基準点 $z = z_0$ の周りで多項式近似する表式が得られる。有限次で打ち切った時に生じる誤差は、打ち切りの次数を無限大にすることでゼロに収束することが示せる (教科書 3.4 章参照)。



(a) 特異点と収束半径



(b) テイラー展開による近似

図 15: (a) 点 $z = z_0$ を中心とする関数 $f(z)$ のテイラー級数の収束半径は、 $z = z_0$ から最も近い $f(z)$ の特異点までの距離 R で与えられる。(b) 関数 $\frac{1}{1-z}$ の $z = 0$ 周りのテイラー展開を、実軸 $z = x + i \times 0$ 上で表示したもの。展開次数が上がるごとに近似精度が上がっている。

8.3 テイラー展開の例

複素関数 $f(z)$ のテイラー級数の表式は、式 (111), (112) に従って計算することで得られる。いくつかの代表例については、別の方法で多項式展開したり、表式を覚えておくとう便利なので紹介しておく。どれについても、実数関数のテイラー展開と同等の式である。

なお、8.1 節で説明したべき級数の一意性 (級数が一致するなら級数の各項がそれぞれ一致する) から、どのような計算方法を取ったとしても結果として得られるテイラー級数の表式は同じものになる。したがって、テイラー級数の計算は自分の好きな方法で行えばよい。

● 分数関数の $z = 0$ 周りでの展開

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (115)$$

等比級数の公式そのものが、そのままテイラー級数になっている。関数 $\frac{1}{1-z}$ の特異点は $z = 1$ であり、これに対応して上記のテイラー級数の収束半径は原点から $z = 1$ までの距離である 1 となる。

これを少し応用することで、様々な展開が可能になる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{c-z} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{c}} = \frac{1}{c} \left[1 + \frac{z}{c} + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \dots \right] \\ \frac{1}{1-z^2} &= 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots \end{aligned}$$

2 番目の例では $z \rightarrow z^2$ と置き換えている。

● 指数関数の $z = 0$ 周りでの展開

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \dots$$

テイラー展開の定義式より導出可能。 e^z が (無限遠点を除く) 複素平面上全体で解析的であることに対応して、このテイラー級数の収束半径は無限大となる。

● 三角関数の $z = 0$ 周りでの展開

指数関数の展開式 (8.3) で $z \rightarrow iz$ と置き換え、オイラーの公式 (24)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (116)$$

と比較することで、以下の三角関数の展開公式を得る。

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots \quad (117)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots \quad (118)$$

指数関数と同様、これらの級数の収束半径は無限大となる。

なお、双曲線関数 $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ の展開形も、指数関数の表式 (8.3) を適当に足し合わせることで構成できる。

● 対数関数の展開

対数関数 $\text{Ln}(1+z)$ を $z = 0$ 周りでテイラー展開すると

$$\text{Ln}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad (119)$$

$\text{Ln}(1+z) = \text{Ln}|1+z| + i \arg z$ であることから、 $\text{Ln}(1+z)$ の特異点は $z = -1$ に存在する。したがって、上記の級数の収束半径は 1 となる。

● 関数の微分・積分の展開

8.1 節では、べき級数には以下の性質があることを見た。

1. べき級数の微分・積分は、級数の各項を微分・積分したものに等しい。
2. べき級数の収束半径は、級数について微分・積分をとっても変わらない。

これらの性質を利用して、テイラー級数と収束半径の計算を簡略化できる場合がある。

例)

– $\frac{1}{(1-z)^2}$ の $z = 0$ 周りでの展開:

$\frac{1}{(1-z)^2}$ が $\frac{1}{1-z}$ の微分で

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z}$$

と与えられるため、 $\frac{1}{(1-z)^2}$ の展開式は $\frac{1}{1-z}$ の展開式を微分したものに等しい。そこで、式 (115) の結果を使うと以下のように展開されることがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \\ &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \end{aligned}$$

もしくは、 $\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2$ であることに基づいて、級数 (115) の 2 乗をコーシー積の表式 (109) に従って計算しても同じものが得られる。¹⁰

$\frac{1}{(1-z)^2}$ の特異点は $z = 1$ に存在することから、上記の級数の収束半径は 1 となる。 $\frac{1}{1-z}$ の $z = 0$ 周りでのテイラー級数の収束半径と同じ。

– $\text{Ln}(1+z)$ の $z = 0$ 周りでの展開

$\text{Ln}(1+z)$ が $\frac{1}{1+z}$ の積分で

$$\text{Ln}(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+z^*} dz^*$$

と表せることに気をつけると、式 (115) で $z \mapsto -z$ と置き換えたものを使って

$$\text{Ln}(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+z^*} dz^* = \int_0^z dz^* (1 - z^* + z^{*2} - z^{*3} + \cdots) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \cdots$$

と、 $\text{Ln}(1+z)$ のテイラー級数 (119) と一致する結果が得られる。

関数 $\frac{1}{1+z}$ の特異点は $z = -1$ に存在するため、この関数の $z = 0$ 周りでのテイラー展開の収束半径は 1 となる。したがって、 $\text{Ln}(1+z)$ の $z = 0$ 周りでのテイラー展開の収束半径も 1 となる。

¹⁰ $\frac{1}{(1-z)^n}$ ($n \in \mathbb{Z}$) の $z = 0$ 周りでの展開も同様に計算できる。 $\frac{1}{(1-z)^n}$ が $\frac{1}{1-z}$ の微分で

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{1-z}$$

と与えられるため、式 (115) の微分をとることで展開式を以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^n} &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} z^m \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m=n-1}^{\infty} m(m-1) \cdots [m-(n-1)+1] z^{m-(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\tilde{m}=n-1}^{\infty} \frac{m!}{[m-(n-1)]!} z^{m-n+1} = \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \frac{(\tilde{m}+n-1)!}{(n-1)! \tilde{m}!} z^{\tilde{m}} = \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} {}_{n-1}C_{\tilde{m}} z^{\tilde{m}}. \end{aligned}$$

第9回 テイラー展開の計算／ローラン級数

[教科書 3.4 章、4.1 章]

前回は、解析関数 $f(z)$ を点 $z = z_0$ の周りで近似的に表すテイラー級数を学んだ。今後の内容を学ぶ上で重要になるので、次の話題に進む前にテイラー級数の計算法を復習しておく。

次に、テイラー級数に負べきの項を付け加えて得られるローラン級数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

を導入する。ローラン展開の特徴は、 $z = z_0$ で発散する項 $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ が展開式に含まれていることである。この負べきの部分を使って、点 $z = z_0$ の近傍で関数が特異である（解析的でない）場合でも、点 $z = z_0$ を中心とする円環領域で関数 $f(z)$ を級数として表せるようになる。

次回以降、ローラン級数の表式に基づいて複素積分を大幅に単純化する留数積分の方法を学ぶが、今回の内容はその準備にあたる。

9.1 テイラー級数の計算法

解析関数 $f(z)$ の点 $z = z_0$ 周りでのテイラー級数は、式 (111)：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z-z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2!} f''(z_0)(z-z_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(z_0)(z-z_0)^3 + \cdots \quad (120)$$

で与えられる。前回説明した通り、関数の (収束する) 級数展開は一意に定まるため、どのような方法で計算したとしても同じ級数の表式が得られる。主な計算法を以下にまとめる。

また、収束半径の求め方も付記する。展開の中心点 $z = z_0$ から最も近い特異点までの距離が収束半径となる。

● 定義通り計算

原点 $z_0 = 0$ 以外の点の周りで展開する場合は大概この方法で計算する。特に工夫することなく常に求められる。

例) $\text{Ln } z$ を $z_0 = i$ の周りで展開

$$\begin{aligned} \text{Ln } z &= \text{Ln } z_0 + (\text{Ln } z)' \Big|_{z=z_0} (z-z_0) + \frac{1}{2!} (\text{Ln } z)'' \Big|_{z=z_0} (z-z_0)^2 + \frac{1}{3!} (\text{Ln } z)''' \Big|_{z=z_0} (z-z_0)^3 + \cdots \\ &= \text{Ln } i - \frac{1}{z} \Big|_{z=i} (z-i) + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} \Big|_{z=i} (z-i)^2 - \frac{1}{3!} \frac{2}{z^3} \Big|_{z=i} (z-i)^3 + \cdots \\ &= \text{Ln } i - \frac{1}{i} (z-i) + \frac{1}{2!} \frac{1}{i^2} (z-i)^2 - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{2}{i^3} (z-i)^3 + \cdots \\ &= \frac{\pi i}{2} + i(z-i) - \frac{1}{2} (z-i)^2 - \frac{i}{3} (z-i)^3 + \cdots \end{aligned}$$

ただし、 $f(z) \Big|_{z=z_0}$ は関数 $f(z)$ の $z = z_0$ における値。 $\text{Ln } z$ は $z = 0$ に特異点を持つため、上記の級数の収束半径は $z_0 = i$ から $z = 0$ までの距離である $R = |i - 0| = 1$ となる。

● 代表例

代表的な関数の原点 $z_0 = 0$ についての展開形を以下にまとめる。ある程度見慣れておくとよい。どれも、それぞれの関数を $z_0 = 0$ の周りで定義通りにテイラー展開すれば導出可能。¹¹

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \quad (\text{収束半径 } R = 1)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots \quad (\text{収束半径 } R = \infty)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \cdots \quad (\text{収束半径 } R = \infty)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \cdots \quad (\text{収束半径 } R = \infty)$$

$$\text{Ln}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 - \cdots \quad (\text{収束半径 } R = 1)$$

収束半径は、特異点の位置から求めるのが簡単。 $\frac{1}{1-z}$ は $z = 1$ に特異点が存在するため、展開の中心点である原点 $z_0 = 0$ からの収束半径は $R = |1 - 0|$ となる。同様に、 $\text{Ln}(1+z)$ は $z = -1$ に特異点があるため、収束半径は $R = |-1 - 0| = 1$ となる。 e^z , $\cos z$, $\sin z$ は複素平面全体で解析的であり、したがって $R = \infty$ となる。¹²

双曲線関数 $\cosh z$, $\sinh z$ の展開形は、 $\cos z$, $\sin z$ の各項の符号をすべて $+$ にしたもので与えられる。

$$\cosh z = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \cdots, \quad \sinh z = z + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \cdots \quad (R = \infty)$$

● 変数の置き換え

展開前の関数 $f(z)$ について変数を $z \rightarrow w$ と置き換えてからテイラー展開したものは、 $f(z)$ をテイラー展開してから $z \rightarrow w$ と置き換えたものと同じである。

例)

$$\frac{1}{1+iz^4} = \frac{1}{1-z} \Big|_{z \rightarrow -iz^4} = 1 + z + z^2 + \cdots \Big|_{z \rightarrow -iz^4} = 1 - iz^4 - z^8 + \cdots$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \cdots \Big|_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}z} = \frac{\pi}{2}z - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2}z\right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{2}z\right)^5 + \cdots$$

¹¹ 三角関数の展開形は、定義通りテイラー展開するほかに、オイラーの公式から得られる定義式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \Rightarrow \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

に基づいて導出することもできる。 e^z の展開式で $z \rightarrow \pm iz$ と置き換えたものの和・差をとればよい。

¹² 係数の一般式 a_n からコーシー・アダマールの公式 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ に基づいて収束半径を求めることも可能。

● 級数の和・積

関数の和 $f(z) + g(z)$ の級数展開は、収束半径内では級数の各項の和で与えられる。関数の積 $f(z)g(z)$ の級数展開は、一般には前回導入したコーシー積 (109) で与えられるが、場合によってはより単純に計算できる場合もある。¹³

例)

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-2z} = 1 + z + z^2 + \cdots + (1 + 2z + (2z)^2 + \cdots) = 2 + 3z + 5z^2 + \cdots$$

$$z^2 \sin(2z) = z^2 \left(z - \frac{1}{3!}(2z)^3 + \frac{1}{5!}(2z)^5 - \cdots \right) = z^3 - \frac{4}{3!}z^5 + \frac{2^5}{5!}z^7 - \cdots$$

● 級数の微分・積分

関数の微分 $f'(z)$ 、積分 $\int f(z)dz$ をテイラー展開したものは、収束半径の内部においては関数をテイラー展開してから微分・積分を取ったものと等しい。また、収束半径は微分・積分の前後で同じ値となる。

工夫をすれば、この性質を利用してテイラー展開を簡単化することもできる。

例) 関数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ を原点 $z_0 = 0$ の周りでテイラー展開:

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{1+z} \right) = -\frac{d}{dz} (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots) = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \cdots \quad (R=1)$$

● 応用

以上の方法を応用することで、やや複雑な関数の展開を簡単化できる場合がある。もちろん、定義通りテイラー展開を行って展開級数を求めることもできるので、好きな方法で計算すればよい。

－ 式変形との組み合わせ

以上で出てきた形に一見ならない関数についても、式変形で前処理することで展開を簡単化できる場合がある。

例) $\frac{1}{2z+3}$ を原点 $z_0 = 0$ の周りでテイラー展開:

$$\frac{1}{2z+3} = \frac{1}{3(1 - \frac{-2z}{3})} = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{-2z}{3} + \left(\frac{-2z}{3} \right)^2 + \cdots \right] = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{3}z + \frac{4}{9}z^2 + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{9}z + \frac{4}{27}z^2 + \cdots$$

¹³級数の和の応用の一つとして、指数関数 e^z の級数展開の和をとり双曲線関数の展開形を導出することもできる。

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \left[1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots + \left(1 + (-z) + \frac{1}{2}(-z)^2 + \frac{1}{3!}(-z)^3 + \frac{1}{4!}(-z)^4 + \cdots \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots + \left(1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots \right) \right] = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots \quad (R=\infty)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \left[1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots - \left(1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots \right) \right]$$

$$= z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots \quad (R=\infty)$$

関数 $\frac{1}{3+2z}$ は $z = -\frac{3}{2}$ に特異点を持つことから、収束半径は展開の中心点 $z_0 = 0$ から $z = -\frac{3}{2}$ までの距離 $R = \frac{3}{2}$ となる。

－ 部分分数分解の活用

分数関数の展開は、部分分数分解を使うことで簡単化できる場合がある。

$$\begin{aligned}\frac{-3z+2}{2z^2-3z+1} &= \cdots = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-2z} = 1+z+z^2+\cdots + [1+2z+(2z)^2+\cdots] \\ &= 2+3z+5z^2+\cdots\end{aligned}$$

9.2 ローラン級数

テイラー級数は、展開点 $z = z_0$ とその近傍で解析的な関数を級数として表すものであった。関数が特異点を持つ場合に、それを取り囲むような領域で関数を展開することを可能とするローラン級数を今度は導入する。

9.2.1 定義と性質

定義：ローラン級数

関数 $f(z)$ が、 $z = z_0$ を中心とする 2 つの同心円 C_1, C_2 で囲まれる円環領域内で解析的であるとする。このとき、 $f(z)$ は

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \\ &= \cdots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots\end{aligned}\quad (121)$$

と展開される。また、ローラン級数の各係数は $f(z)$ の一周積分で与えられる。

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*) dz^* \quad (n = 1, 2, \dots)\quad (122)$$

ただし、 C は上述の円環領域に含まれる単純閉曲線を反時計回りに回る積分経路。

● 簡単な例

関数 $\frac{1}{z} \cos z$ は、原点 $z = 0$ に特異点を持つ ($|\frac{1}{z} \cos z| \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$)。この関数を、特異点 $z = 0$ を中心としてローラン展開すると

$$\frac{1}{z} \cos z = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots \right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}z + \frac{120^3}{z} - \cdots \quad (123)$$

原点近傍で解析的な関数 $\cos z$ のテイラー展開の式と比べて、負べきの項 $\frac{1}{z}$ が現れているのが特徴。

● 基本的な性質

- － 正べきの項だけを含むテイラー展開に、負べきの項を付け加えた式になっている。

– 円環領域の内側に関数 $f(z)$ の特異点がある場合には負べきの項が発生する。

● 導出の概略

テイラー展開の場合と同様に、展開する関数 $f(z)$ をコーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1, \odot} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2, \odot} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^*$$

で表し、被積分関数に含まれる $\frac{1}{z^* - z}$ を $z = z_*$ の周りで級数展開することで、ローラン展開の表式 (121), (122) を導出することができる。詳細は教科書を参照のこと。

ローラン級数の係数の表式 (122) が成立することを認めれば、そこから特定の係数 a_n, b_n を取り出すのは比較的簡単にできる。一周積分の性質

$$\oint_{C: z_0 \text{ を囲む経路}} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = 1) \\ 0 & (n \text{ が } 1 \text{ 以外の整数}) \end{cases} \quad (124)$$

に注意して、式 (121) の $f(z)$ を一周積分 $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^*$ ($n = 0, 1, \dots$) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \frac{1}{(z^* - z_0)^{n+1}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z^* - z_0)^m + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(z^* - z_0)^{-m+n+1}} + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'+n+1}} \right]. \end{aligned} \quad (125)$$

式 (124) で示されるように、分数関数を一周積分して非ゼロになるのは分母のべきが 1 の場合 ($\frac{1}{z - z_0}$) だけである。一つ目の被積分関数の分母に現れるべきが $-m + n + 1 = 1$ となるのは $m = n$ の場合だけである。また、二つ目の被積分関数のべきは $m' + n + 1 \geq n + 2 > 1$ となり、一周積分するとすべて消えてしまう。したがって、式 (125) は

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(z^* - z_0)^{-m+n+1}} + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'+n+1}} \right] = a_n$$

と、係数 a_n だけが取り出される。同様に、式 (121) の $f(z)$ を $\frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*) dz^*$ ($n = 1, 2, \dots$) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*) dz^* &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* (z^* - z_0)^{n-1} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z^* - z_0)^m + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(z^* - z_0)^{-m-n+1}} + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'-n+1}} \right]. \end{aligned} \quad (126)$$

一つ目の被積分関数の分母のべきは $-m - n + 1 \leq 0$ となる一方で、二つ目の被積分関数の分母のべき $m' - n + 1$ は $m' = n$ のときに 1 に等しくなる。したがって、式 (126) は

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*) dz^* = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(z^* - z_0)^{-m-n+1}} + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'-n+1}} \right] = b_n \quad (127)$$

となり、係数 b_n だけを取り出すことができる。

● ローラン級数の収束領域

ローラン展開の収束領域は、展開点 $z = z_0$ を中心とする円環上の領域のうち、特異点にぶつからない最大のもとなる。図 (16) を参照。

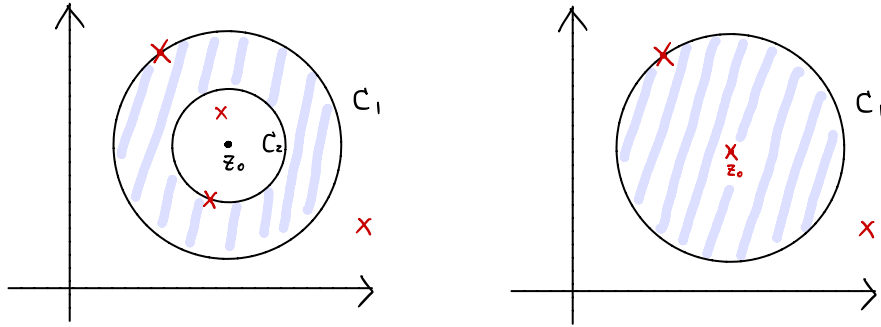


図 16: 左: $z = z_0$ を中心とするローラン級数の収束領域。 $z = z_0$ を中心とする円環領域で、特異点にぶつからない最大のものが収束領域となる。右: $z = z_0$ に特異点が存在する場合、ローラン級数の収束領域は $z = z_0$ の周りの円形領域から中心点 $z = z_0$ を除いたものとなる。

9.2.2 ローラン級数の簡単な例

式 (123) のように、 $\frac{1}{(z-z_0)^n} \times (\text{解析関数})$ の形の関数を $z = z_0$ の周りでローラン展開するときは、単に解析関数の部分のテイラー展開を $(z - z_0)^n$ で割ればよい。

- 関数 $\frac{1}{z(1-z)}$ を原点 $z_0 = 0$ の周りでローラン展開するときは、 $\frac{1}{z} \times \frac{1}{1-z}$ と書き換えてから、 $\frac{1}{1-z}$ を原点 $z_0 = 0$ の周りでテイラー展開すればよい。

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

この級数の収束領域は、円形領域 $|z| < 1$ から原点 $z = 0$ を除いた領域である。

- 同じ関数 $\frac{1}{z(1-z)}$ を原点 $z_0 = 1$ の周りでローラン展開するときは、 $\frac{1}{z-1} \times \left(-\frac{1}{z}\right)$ と書き換えてから、 $-\frac{1}{z}$ を $z_0 = 1$ の周りでテイラー展開すればよい。¹⁴

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z-1} \cdot \left(-\frac{1}{z}\right) \\ &= -\frac{1}{z-1} \left[\frac{1}{z} \Big|_{z=1} + \left(\frac{1}{z}\right)' \Big|_{z=1} (z-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z}\right)'' \Big|_{z=1} (z-1)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z}\right)''' \Big|_{z=1} (z-1)^3 + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{z-1} \left[\frac{1}{z} \Big|_{z=1} - \frac{1}{z^2} \Big|_{z=1} (z-1) + \frac{1}{2} \frac{2}{z^3} \Big|_{z=1} (z-1)^2 - \frac{1}{3!} \frac{3 \cdot 2}{z^4} \Big|_{z=1} (z-1)^3 + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{z-1} [1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots] \\ &= -\frac{1}{z-1} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

この級数の収束領域は、円形領域 $|z-1| < 1$ から点 $z = 1$ を除いた領域である。

¹⁴ $\frac{1}{z}$ の $z = 1$ 周りで展開は、変数の書き換えを行い、公式 $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$ を用いることで以下のように行うこともできる。計算法に慣れればこちらの方が楽。

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - [-(z-1)]} = 1 + [-(z-1)] + [-(z-1)]^2 + [-(z-1)]^3 + \dots = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots$$

第10回 特異点、極と零点／留数積分

[教科書 4.2 章、4.3 章]

前回導入したローラン級数に基づいて、複素関数の特異点を分類する。特に、比較的性質の良い特異点である極に注目する。

複素関数 $f(z)$ を極 $z = z_0$ でローラン展開したとき、その $\frac{1}{z-z_0}$ 項の係数を留数 $\underset{z=z_0}{\text{Res}} f(z)$ という。その計算法をまずまとめる。次に、留数を用いて複素関数の一周積分を留数で書き表す留数積分:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \underset{z=z_0}{\text{Res}} f(z)$$

を導入する。これを活用すれば、複素積分の計算を大幅に簡単化することが可能となる。

10.1 特異点の分類

複素関数 $f(z)$ を $z = z_0$ の周りでローラン展開したときには

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

のように、負べきの項が現れるのが特徴だった。

この負べきの項は、 $z = z_0$ で発散する関数 $f(z)$ をその点の周りで展開したときに生じる。その点 $z = z_0$ は関数 $f(z)$ の特異点となるが、ローラン級数の負べき部分の性質に基づいて、特異点を下記の3種に分類できる。¹⁵

1. 真性特異点

関数 $f(z)$ の $z = z_0$ におけるローラン級数の負べきの項が無限次まで現れる場合に、 $z = z_0$ を関数 $f(z)$ の真性特異点と呼ぶ。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

2. (m 位の) 極

$f(z)$ の $z = z_0$ におけるローラン展開に負べきの項が有限次までしか現れない場合に、 $z = z_0$ を関数 $f(z)$ の極であるという。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^m \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

ただし、最高次の負べきの項の係数は非ゼロ ($b_m \neq 0$) であるとする。このように、ローラン級数に $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ 項までが現れるとき、 $z = z_0$ を m 位の極と呼ぶ。

¹⁵ここでは、 $f(z)$ がある特異点の近傍で解析的となり別の特異点が存在しないような場合、すなわち $f(z)$ が孤立特異点を持つ場合だけについてここでは解説する。

3. 除去可能特異点

関数 $\frac{1}{z} \sin z$ は、原点 $z = 0$ の近くで $\frac{0}{0}$ のように振る舞うため関数の値が定義されず、そのため $z = 0$ はこの関数の特異点となる。しかし、 $\frac{1}{z} \sin z$ を $z = 0$ の周りでローラン展開すると

$$\frac{1}{z} \sin z = \frac{1}{z} \left(z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \cdots \right) = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 + \cdots$$

となり、原点 $z = 0$ 付近では有限値 1 に漸近する。そこで、 $\frac{1}{z} \sin z$ は $z = 0$ のときに 1 という値を取ると定義すれば、この関数を全ての z で解析的な関数に格上げすることができる。

この例のように、 $z = z_0$ における関数値 $f(z_0)$ を指定することで取り除くことのできる特異点を除去可能特異点と呼ぶ。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots$$

のように、 $f(z)$ の $z = z_0$ におけるローラン級数に負べきの項が現れないのが特徴。

極と真性特異点の例：

- $\frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2}$ は、 $z = 0$ に 1 位の極、 $z = 2$ に 5 位の極を持つ。実際、 $z = 0$ の周りでこの関数をローラン展開すると、分母に含まれる z がゼロになることなどから

$$\frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2} = -\frac{1}{32z} + \frac{11}{64} + \cdots,$$

同じく $z = 2$ の周りでローラン展開すると、分母に含まれる $(z-2)$ がゼロになることなどから

$$\frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2} = \frac{1}{2(z-2)^5} - \frac{1}{4(z-2)^4} + \cdots$$

となる。

- $e^{\frac{1}{z}}$ は原点 $z = 0$ に真性特異点を持つ。

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z} \right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z} \right)^3 + \cdots$$

z を 0 に近づけると、実軸の正の部分に沿って近づける ($z = x$ としてから $x \rightarrow \infty$) と $e^{1/z} = e^{1/x} \rightarrow \infty$, 実軸の負の部分に沿って近づける ($z = -x$ としてから $x \rightarrow \infty$) と $e^{1/z} = e^{-1/x} \rightarrow 0$ となる。

さらに、 $e^{1/z}$ は 0 を除くあらゆる複素数値を真性特異点 $z = 0$ の近傍で取ることができることを示せる。これは真性特異点について一般に成り立つ特徴の一つとなっている。¹⁶

¹⁶ この性質を示す定理はピカールの定理と呼ばれる。詳細については教科書を参照のこと。

10.1.1 零点

特異点の場合とは逆に、 $f(z)$ の $z = z_0$ におけるローラン展開が正べきの部分しか持たない場合、 $z = z_0$ における関数値は $f(z_0) = 0$ となる。このとき、 $z = z_0$ は関数 $f(z)$ の零点であると呼ぶ。

特に、ローラン展開したときに

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots$$

のように m 次の項から級数が始まる場合、 $z = z_0$ を $f(z)$ の m 次の零点と呼ぶ。

10.1.2 無限遠点

複素平面で $|z| \rightarrow \infty$ となる領域を調べる場合には、変数変換 $z \rightarrow \frac{1}{w}$ を適用し、新変数における原点 $w = 0$ 付近に注目すると便利である。この変換 $z \rightarrow \frac{1}{w}$ は z 平面における原点と無限遠を入れ替える写像になっている。特に、 $|z| \rightarrow \infty$ に相当する点は、新変数の原点 $w = 0$ ただ一点に写される。

この性質に基づいて、 $w = 0$ に相当する点を無限遠点 $z = \infty$ と新たに定義することにする。また、複素平面 $\{z \in C\}$ に無限遠点 $z = \infty$ 一点を付け加えたものを拡張された複素平面と呼び、元の複素平面と (一応) 区別する。

無限遠点における関数の振る舞いの例：

- 関数 $f(z) = \frac{1}{z}$ は、変数変換 $z \rightarrow \frac{1}{w}$ で $f(z) = \frac{1}{z} = w$ となり、新変数の原点 $w = 0$ 付近で1位の零点を持つことがわかる。このとき、変換前の関数 $f(z) = \frac{1}{z}$ は無限遠点 $z = \infty$ で1位の零点を持つ、と言う。逆に、関数 $f(z) = z$ は、 $f(z) = 1/w$ と振る舞うことから、元の変数の無限遠点 $z = \infty$ に1位の極を持つことになる。
- 関数 e^z は変数変換 $z \rightarrow \frac{1}{w}$ で $f(z) = e^{1/w}$ となり、新変数の原点 $w = 0$ に真性特異点を持つ。このとき、関数 e^z は無限遠点 $z = \infty$ に真性特異点を持つ、と言う。

図17のように、複素平面上の点を立体射影によって球面に写し、無限遠点 $z = \infty$ を球面上の「北極点」と同一視すると便利である。この球面はリーマン球面と呼ばれ、拡張された複素平面全体が球の表面全体に対応している。

10.2 留数積分

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ に m 位の極を持つときに、それを囲む積分経路 C に沿って $f(z)$ を一周積分することを考える。ここでは、経路 C 内には $z = z_0$ 以外の特異点が存在しないと仮定する。

仮定により、 $f(z)$ は $z = z_0$ の周りで

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

とローラン展開される。以前も導入した分数関数 $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ の一周積分の性質

$$\oint_{C: z_0 \text{ を囲む経路}} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = 1) \\ 0 & (n \text{ が } 1 \text{ 以外の整数}) \end{cases}$$

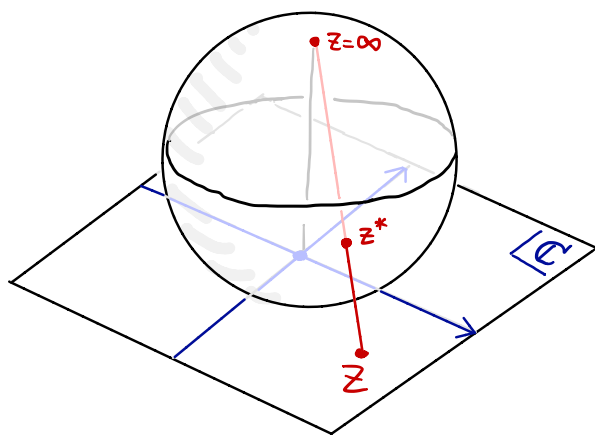


図 17: リーマン球面の模式図。複素平面 $\{z \in \mathbb{C}\}$ の原点の直上に球を置き、その北極点から複素平面上のある点 z まで直線を引き、それと球面との交点 z^* を複素平面上の点 z と同一視する。この写像を立体射影と呼ぶ。この写像で、拡張された複素平面上の無限遠点 $z = \infty$ はリーマン球上の北極点と対応付けられる。

を思い出すと、 $f(z)$ を経路 C に沿って一周積分した結果は

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C dz \left[\frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \right] = 2\pi i b_1 \quad (128)$$

と、積分値は $\frac{1}{z - z_0}$ 項の係数 b_1 だけで決まることがわかる。

この $\frac{1}{z - z_0}$ 項の係数を関数 $f(z)$ の $z = z_0$ における留数 $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$ 、留数の値で積分値を表す式 (128) のことを留数積分と呼ぶ。¹⁷

10.2.1 留数の計算法

実際に留数定理を使って複素積分を計算するためには、関数 $f(z)$ から留数の値を求める必要がある。その計算法をまとめる。ローラン級数の $\frac{1}{z - z_0}$ 項の係数 $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$ を求めることになるわけだが、極の次数によって b_1 の導出法が異なるので注意が必要。

● 1位の極（単純極）の場合

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ に1位の極（単純極と呼ばれる）を持つ場合、そのローラン展開は

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

となる。この表式から b_1 を求めるためには、式全体に $(z - z_0)$ をかけた後に、 $z \rightarrow z_0$ という極限を取って余分な項をゼロにすればよい。

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \left[\frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} [b_1 + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots] \\ &= b_1. \end{aligned}$$

¹⁷式 (128) は、積分経路の内部に極が一つだけ存在する場合の式である。複数の極が存在する場合については次回解説する。

したがって、単純極の留数を求めるための式は次で与えられる：

単純極の留数

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (129)$$

• m 位の極 ($m > 1$) の場合

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ に m 位の極 ($m > 1$) を持つ場合、そのローラン展開は

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \quad (b_m \neq 0)$$

となる。この場合には、式 (129) の通りに計算すると $\frac{1}{(z - z_0)^{n>1}}$ 項が発散してしまうため、 b_1 をうまく取り出すことができない。そこで、式全体に $(z - z_0)^m$ をかけて、 $m - 1$ 回微分すると、ちょうど余分な項を取り除くことができる。そのようにしてから極限 $z \rightarrow z_0$ をとると

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m \left[\frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m+1} + \cdots] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(m-1)! b_1 + m! a_0(z - z_0) + \frac{(m+1)!}{2} a_1(z - z_0)^2 + \cdots \right] \\ &= (m-1)! b_1. \end{aligned} \quad (130)$$

したがって、 m 位の極における留数を求めるための式は以下で与えられる。

m 位の極の留数

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \quad (131)$$

留数さえ求まれば、関数 $f(z)$ の極 $z = z_0$ を囲む経路 C に沿った一周積分は、式 (128) より

(C 内に極が一つだけ存在する場合の) 留数積分

$$\oint_C f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \quad (132)$$

で求められる。

10.2.2 留数積分の例

- 関数 $f(z) = \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2}$ は、 $z = -4$ に 1 位の極、 $z = 1$ に 2 位の極を持つ。

まず、 $z = -4$ における留数は、式 (129) より

$$\operatorname{Res}_{z=-4} f(z) = \lim_{z \rightarrow -4} (z+4)f(z) = \lim_{z \rightarrow -4} \frac{50z}{(z-1)^2} = \frac{50 \cdot (-4)}{(-4-1)^2} = -8. \quad (133)$$

したがって、 $z = -4$ だけを囲む経路 C に沿った $f(z)$ の一周積分の値は、式 (132) より

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-4} f(z) = -16\pi i. \quad (134)$$

- 上と同じ関数 $f(z) = \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2}$ の $z = 1$ における留数は、式 (131) で $m = 2$ とした場合の式より

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (z-z_0)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \frac{50z}{z+4} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{50}{z+4} - \frac{50z}{(z+4)^2} = \frac{50}{5} - \frac{50}{25} = 8.$$

したがって、 $z = 1$ だけを囲む経路 C に沿った $f(z)$ の一周積分の値は

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 16\pi i. \quad (135)$$

- 関数 $f(z) = \frac{1}{z} \cos z$ の原点 $z = 0$ 付近の振る舞いを調べる。

$z = 0$ では $\cos z$ は有限であることから、この関数は原点付近で $\frac{1}{z} \cos z \sim (\text{定数}) \times \frac{1}{z}$ のように振る舞う。したがって、この関数は原点に 1 位の極を持つことがわかる。式 (129) より

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z} \cos z = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1. \quad (136)$$

したがって、原点を取り囲む経路 C に沿った $f(z)$ の一周積分の値は、式 (132) より

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i. \quad (137)$$

第11回 留数積分とその応用

[教科書 4.3 章、4.4 章]

前回は、関数の極における留数の求め方を解説し、極が一つだけある場合について留数積分の方法を解説した。今回は、複数の極が存在する場合の留数積分を導入した上で、実数積分への応用法を解説する。

11.1 復習：留数と留数積分

11.1.1 留数積分

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で特異点を持つとする。このとき、 $f(z)$ の $z = z_0$ の周りでのローラン展開は

$$f(z) = \cdots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

と与えられる。この $\frac{1}{z - z_0}$ 項の係数 b_1 を関数 $f(z)$ の特異点 $z = z_0$ における留数 $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$ と呼ぶ。このとき、 $z = z_0$ を取り囲む右回りの経路 C 上で $f(z)$ を一周積分すると

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C dz \left[\cdots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \right] = 2\pi i b_1 = 2\pi i \text{Res}_{z=z_0} f(z).$$

ただし、この式を示すために分数関数の一周積分の性質

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = 1) \\ 0 & (n \text{ が } 1 \text{ 以外の整数}) \end{cases}$$

を使った。この性質は、コーシーの積分定理

$$\oint_{C: \text{経路内部で } f(z) \text{ は解析的}} f(z) dz = 0$$

を用いて図 18 の左側のような経路を考えることで

$$0 = \oint_{C, \odot} f(z) dz + \oint_{C', \odot} f(z) dz = \oint_{C, \odot} f(z) dz - \oint_{C', \odot} f(z) dz \quad \therefore \oint_{C, \odot} f(z) dz = \oint_{C', \odot} f(z) dz$$

と、積分経路を $z = z_0$ 周りの半径 ϵ の円 C' に変形し、 $z = \epsilon e^{i\theta} + z_0$ において θ 積分に直すことで示せる。

積分経路内に複数の特異点 $z = z_1, z_2, \dots$ が存在する場合、図 18 右側のような経路を考えて

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{C, \odot} f(z) dz + \oint_{C_1, \odot} f(z) dz + \oint_{C_2, \odot} f(z) dz + \cdots = \oint_{C, \odot} f(z) dz - \oint_{C_1, \odot} f(z) dz - \oint_{C_2, \odot} f(z) dz - \cdots \\ &\therefore \oint_{C, \odot} f(z) dz = \oint_{C_1, \odot} f(z) dz + \oint_{C_2, \odot} f(z) dz + \cdots \end{aligned}$$

とすることで、経路 C を各特異点を囲む半径 ϵ の円 $C_1, C_2, \dots$ に変形する。各経路 C_n に沿った積分からは積分値 $2\pi i \text{Res}_{z=z_n} f(z)$ が得られるので、合計の積分値は

$$\oint_{C, \odot} f(z) dz = \oint_{C_1, \odot} f(z) dz + \oint_{C_2, \odot} f(z) dz + \cdots = 2\pi i \left(\text{Res}_{z=z_1} f(z) + \text{Res}_{z=z_2} f(z) + \cdots \right) = 2\pi i \sum_n \text{Res}_{z=z_n} f(z)$$

となる。したがって、特異点が複数存在する場合の留数積分は

留数積分

$$\oint_C f(z) = 2\pi i \sum_n \operatorname{Res}_{z=z_n} f(z)$$

ただし、 $z = z_n$ は経路 C で囲まれる領域に存在する $f(z)$ の特異点である。

右辺の和には経路 C で囲まれる領域の外部の特異点は含めないため、経路がどの特異点を囲むかによって積分値が変化することに注意。

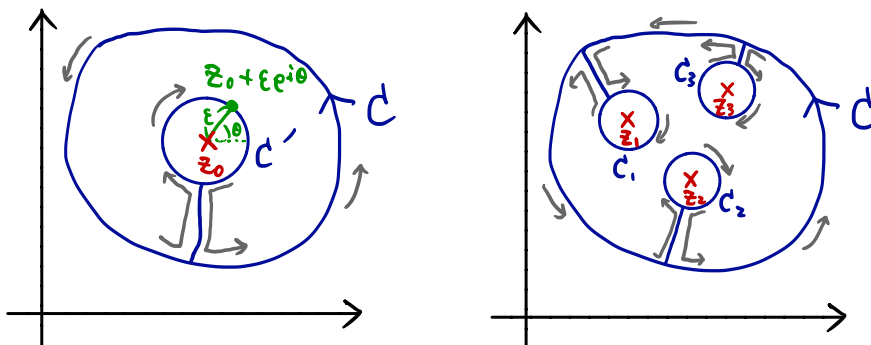


図 18: 左図：経路 C 上の一周積分を特異点 z_0 周りの経路 C' 上の一周積分に変形する際に用いる経路。右図：経路 C 内に複数の特異点 $z_{1,2,3}$ が存在する場合に、積分経路を各特異点を囲む経路 $C_{1,2,3}$ に変更する際に用いる経路。

11.1.2 留数の求め方

留数の求め方は下記の 3 通り。

- 特異点が一位の極（単純極）の場合：

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

このとき、 $z = z_0$ における留数は

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

単純極の留数の求め方はもう一つある。関数が

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (p(z), q(z) : \text{解析関数}, q(z_0) = 0, p(z_0) \neq 0)$$

この場合、 $z = z_0$ は関数 $f(z)$ の単純極になる。分子 $q(z)$ を $z = z_0$ の周りでテイラー展開すると

$$q(z) = q(z_0) + q'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}q''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots = q'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}q''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots$$

となるため、 $f(z)$ の留数は

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}q''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{q'(z_0) + \frac{1}{2}q''(z_0)(z - z_0) + \cdots} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.\end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (138)$$

分母だけ微分した式になっているのが特徴。

- 特異点が m 位の極の場合：

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \quad (b_m \neq 0)$$

この場合の留数は

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

右辺の計算が、**高次の負べき部分** $\frac{1}{(z - z_0)^{2, \dots, m}}$ を消し、ちょうど $\frac{b_1}{z - z_0}$ 項だけを取り出す計算になっている。

- 特異点が真性特異点の場合

$$f(z) = \cdots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

この場合でも、関数 $f(z)$ のローラン展開の表式がわかっているならば、その $\frac{1}{z - z_0}$ 項の係数 b_1 が留数になっている。

例： $f(z) = e^{1/z}$ は $z = z_0$ に真性特異点を持つが、そこでの留数は

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \cdots \quad \therefore \operatorname{Res}_{z=0} e^{1/z} = 1.$$

11.1.3 留数積分の例

1. $\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z} dz$ の被積分関数は、 $z = 0$ と $z = 1$ に特異点を持つ。この積分値を次の場合に求める。

その準備として、被積分関数の留数を求めておくと

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=0} \frac{4-3z}{z^2-z} &= \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{4-3z}{z^2-z} = \frac{4-3z}{z-1} \Big|_{z=0} = -4, \\ \operatorname{Res}_{z=1} \frac{4-3z}{z^2-z} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{4-3z}{z^2-z} = \frac{4-3z}{z} \Big|_{z=1} = 1.\end{aligned}$$

(a) 経路 C が $z = 0, 1$ を両方取り囲む場合

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \frac{4-3z}{z^2-z} + \operatorname{Res}_{z=1} \frac{4-3z}{z^2-z} \right) = 2\pi i (-4+1) = -6\pi i.$$

(b) 経路 C が $z = 0$ を囲み、 $z = 1$ は囲まない場合

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{4-3z}{z^2-z} = 2\pi i (-4) = -8\pi i.$$

その他の場合 (経路 C が $z = 0, 1$ のどちらも囲まない場合など) も同様である。

2. $\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ の被積分関数は

$$\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \frac{ze^{\pi z}}{(z-2)(z+2)(z+2i)(z-2i)}$$

と変形できることから、 $z = \pm 2, \pm 2i$ に単純極を持つことがわかる。 $z = \pm 2i$ での留数は、公式 (138) を使って

$$\operatorname{Res}_{z=2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{ze^{\pi z}}{(z^4-16)'} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{ze^{\pi z}}{4z^3} = \frac{2ie^{2\pi i}}{4(2i)^3} = -\frac{1}{16}, \quad (139)$$

$$\operatorname{Res}_{z=-2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{ze^{\pi z}}{(z^4-16)'} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{ze^{\pi z}}{4z^3} = \frac{-2ie^{-2\pi i}}{4(-2i)^3} = -\frac{1}{16} \quad (140)$$

と求められる。したがって、この2つの特異点だけを含む積分経路 C についての一周積分は

$$\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = 2\pi i \sum_{z=\pm 2i} \operatorname{Res}_{z=\pm 2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = 2\pi i \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right) = -\frac{\pi i}{4}.$$

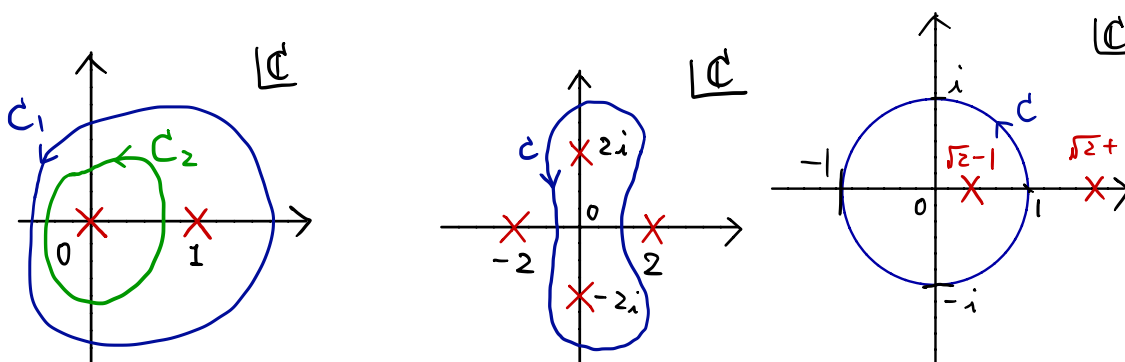


図 19: 左 : 11.1.3 節の例 1 の留数積分における特異点の位置と積分路。中央 : 11.1.3 節の例 2 の留数積分における特異点の位置と積分路。右 : 11.2.1 節の例における積分路と極の位置。

11.2 実数積分への応用

複素積分を応用することで、実数の積分を求めることができる。今回と次回の授業でその代表例を紹介する。

11.2.1 三角関数を含む積分

三角関数 $\cos \theta, \sin \theta$ の任意関数 $F(\cos \theta, \sin \theta)$ の $0 \leq \theta \leq 2\pi$ にわたる積分

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \quad (141)$$

を、複素積分を利用して評価してみよう。

$z = e^{i\theta}$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 積分は単位円上の複素一周積分になる。また、各三角関数は

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

積分要素 $d\theta$ は

$$dz = \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta = \frac{de^{i\theta}}{d\theta} d\theta = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \quad \therefore d\theta = \frac{dz}{iz}$$

と変形できる。以上より、積分 (141) は

$$I = \oint_{\text{単位円}} F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} \quad (142)$$

と変形できる。これを複素積分として評価すればよい。

例) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos \theta}$ を求める。

上記の手順にしたがって複素積分に書き換えると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos \theta} &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{-\frac{1}{2}i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} \\ &= 2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\{z - (\sqrt{2} + 1)\} \{z - (\sqrt{2} - 1)\}}. \end{aligned} \quad (143)$$

最後の等号における式変形では、方程式 (分母)=0 の解を求めることで

$$\begin{aligned} z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4}}{2} \sqrt{2} \pm 1 \\ \therefore z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 &= \{z - (\sqrt{2} + 1)\} \{z - (\sqrt{2} - 1)\} \end{aligned}$$

と分母を因数分解している。

式 (143) の値を留数定理で求めよう。被積分関数は $z = \sqrt{2} \pm 1$ に単純極を持つが、このうち単位円 $|z| = 1$ の内部に入るのは $z = \sqrt{2} - 1$ だけである。したがって、留数定理より式 (143) の積分値は

$$\begin{aligned} 2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\{z - (\sqrt{2} + 1)\} \{z - (\sqrt{2} - 1)\}} &= 2\pi i \cdot 2i \operatorname{Res}_{z=\sqrt{2}-1} \frac{1}{\{z - (\sqrt{2} + 1)\} \{z - (\sqrt{2} - 1)\}} \\ &= -4\pi \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}-1} \frac{1}{z - (\sqrt{2} + 1)} = -4\pi \frac{1}{\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2} + 1)} = 2\pi. \end{aligned}$$

第12回 留数積分とその応用（広義積分、フーリエ積分）

前回に引き続き、留数積分を応用して複雑な実積分を求める方法を紹介する。

積分路の形状や積分値の処理方法を工夫することで、非常に多種の実積分を手計算で求めることが可能となる。その中から、この講義では無限区間にわたる実積分である**広義積分**、応用上も重要となる**フーリエ積分**を中心に解説する。

12.1 広義積分

積分区間が無限の実積分¹⁸

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (144)$$

を、複素関数の一周積分を活用して求められる場合がある。

図20のように、実軸の区間 $C_1 = \{x | -R \leq x \leq R\}$ と、半円 $C_2 = \{z | z = Re^{i\theta} (0 < \theta < \pi)\}$ から構成される経路 $C = C_1 + C_2$ を考える。

留数定理より、経路 C に沿った一周積分の値は、経路 C の内部に存在する特異点での留数の和に等しい：

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_n \text{Res } f(z).$$

一方で、この一周積分は経路 C_1 と C_2 それぞれについての線積分の結果の合計に等しい：

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_2} f(z) dz$$

この積分について、 $R \rightarrow \infty$ とする極限を取ると

$$2\pi i \sum_n \text{Res } f(z) = \oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z) dz.$$

このうち、**右辺第1項**が求めたかった積分(144)である。もし、極限 $\lim_{R \rightarrow \infty}$ で**右辺第2項**がゼロになるならば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_n \text{Res } f(z) \quad (145)$$

と実軸上の積分を留数の和で書き表せる。ここで、経路 C は $R \rightarrow \infty$ の極限で複素平面の上半分(上半平面)の全体を覆うので、留数も上半平面に存在する極についてだけ和を取ることになる。

上記のように、実軸を含む複素一周積分を考え、積分経路を無限遠に飛ばす極限 $R \rightarrow \infty$ をとって不要な部分を消すという手法を今後よく使う。

例) 不定積分 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ を上記の手法で評価する。

まず、被積分関数が偶関数であることから

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}. \quad (146)$$

¹⁸ この種の積分を総称して広義積分と呼ぶ。

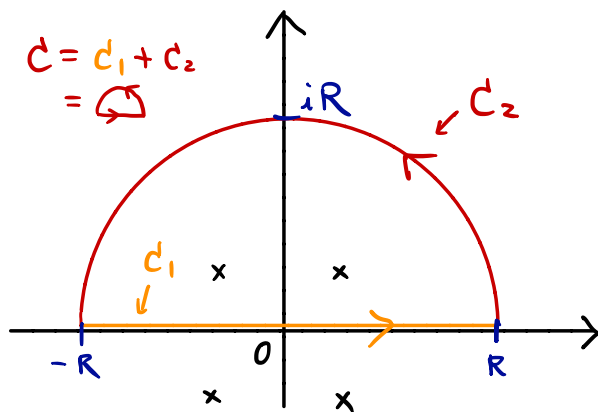


図 20: 無限区間にわたる実積分を求める際に使う積分路。

これを評価するために、図 20 の経路 C にわたる複素一周積分

$$\frac{1}{2} \int_C \frac{dz}{1+z^4} = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} + \frac{1}{2} \int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4} \quad (147)$$

を考えて、積分経路を無限大にする極限 $R \rightarrow \infty$ をとる。このとき、右辺第 1 項は

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

と求めたかった実積分に帰着する。これに基づいて、以下では (i) 式 (147) 左辺の複素一周積分の値を求め、(ii) 式 (147) 右辺第 2 項が $\lim_{R \rightarrow \infty}$ の極限でゼロになることを示すことで、求めたかった積分 (146) の値を得る。

(i) 式 (147) 左辺の複素一周積分の値を求める。

被積分関数 $\frac{1}{1+z^4}$ の分母は

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z - e^{\frac{i\pi}{4}})(z - e^{\frac{3i\pi}{4}})(z - e^{\frac{5i\pi}{4}})(z - e^{\frac{7i\pi}{4}})}$$

と因数分解できるので、被積分関数は $z = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$ で 1 位の極を持つ。¹⁹

このうち、経路 C に含まれるのは $z = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}$ のみである (図 20 参照)。これらの極について、前回導入した公式 (138) を用いて留数を求めると

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} f(z) &= \frac{1}{(z^4)'} \Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{4}}, \\ \operatorname{Res}_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} f(z) &= \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{9\pi i}{4}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}}. \end{aligned}$$

したがって、求める積分値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{C(R \rightarrow \infty)} \frac{dz}{1+z^4} &= \frac{1}{2} 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} f(z) + \operatorname{Res}_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} f(z) \right) = \pi i \left(-\frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{4}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}} \right) \\ &= \pi i \cdot \frac{-i}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

¹⁹ 分母 $1+z^4$ が $z = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$ でゼロになる一方で、分母の微分 $(1+z^4)' = 4z^3$ がこれらの点で非ゼロになることから、分母は $z = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$ に 1 位の零点を持つ。このことから $\frac{1}{1+z^4}$ は $z = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$ に 1 位の極を持つ、と結論づけてもよい。

(ii) 式 (147) 右辺第 2 項が $\lim_{R \rightarrow \infty}$ の極限でゼロになることを示す。

まず、経路 C_2 上の点を $z = Re^{i\theta}$ ($0 < \theta < \pi$) と表す。 $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ となることから

$$\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4} = \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{1+(Re^{i\theta})^4} d\theta = \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}} d\theta \quad (148)$$

この積分値が $R \rightarrow \infty$ の極限でゼロになることを示すために、その絶対値を不等式で評価してみよう。

$$\left| \int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4} \right| \leq \int_{C_2} \left| \frac{dz}{1+z^4} \right| = \int_0^\pi \frac{|iRe^{i\theta}|}{|1+(Re^{i\theta})^4|} d\theta < \int_0^\pi \frac{R}{R^4-1} d\theta = \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

一つ目の不等号では |積分| の絶対値より |被積分関数| の絶対値の積分の方が大きくなること、二つ目の不等号では $|R^4 - e^{-4i\theta}| \geq R^4 - 1$ となることを用いている。したがって、 $R \rightarrow \infty$ の極限で式 (148) の絶対値はゼロに収束し、そのため式 (148) の値自体もゼロに収束する。

以上の結果をまとめて、求めたかった積分 (146) の値が次のように得られる：

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{C(R \rightarrow \infty)} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad (149)$$

12.2 フーリエ積分

任意の波形を三角関数の和に分解するフーリエ変換に必要な積分

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \cos(sx) dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin(sx) dx,$$

を評価する。実数の積分としてこれらを計算することもできる場合があるが、複素積分の留数定理を使うことでいくらか計算がシンプルになる。

上記の実フーリエ変換は、以下の複素フーリエ変換の実部と虚部でそれぞれ与えられる。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{isx} dx &= \int_{-\infty}^\infty f(x) (\cos(sx) + i \sin(sx)) dx = \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos(sx) dx + i \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin(sx) dx \\ \therefore \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos(sx) dx &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{isx} dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin(sx) dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{isx} dx. \end{aligned}$$

例) 下記のフーリエ積分の結果を確認してみよう。

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(sx)}{k^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{k} e^{-ks}, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(sx)}{k^2 + x^2} dx = 0 \quad (s > 0, k > 0) \quad (150)$$

そのために、複素フーリエ積分 $\oint \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz$ を、先ほどと同じ積分路を用いて以下を評価してみる。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{isx}}{k^2 + x^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz \quad (151)$$

(i) 式 (151) 左辺の複素一周積分の値を求める。

被積分関数 $\frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} = \frac{e^{isz}}{(z - ik)(z + ik)}$ は $z = \pm ik$ の位置に一位の極を持つ。仮定 $k > 0$ より、この内経路 C の内部に存在するのは上半平面に存在する $z = ik$ だけである。この極における留数は

$$\operatorname{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} = \frac{e^{isx}}{(k^2 + z^2)'} \Big|_{z=ik} = \frac{e^{isx}}{2z} \Big|_{z=ik} = \frac{e^{is \cdot ik}}{2iz} = \frac{e^{-ks}}{2ik}.$$

したがって、式 (151) 左辺の複素一周積分の値は

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} = \frac{\pi e^{-ks}}{k}.$$

(ii) 式 (151) 右辺第 2 項が $\lim_{R \rightarrow \infty}$ の極限でゼロになることを示す。

積分路 C_2 上の点を $z = Re^{i\theta}$ ($0 < \theta < \pi$) と表す。このとき、積分要素が $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ となることも使うと、式 (151) 右辺第 2 項は

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{isRe^{i\theta}}}{k^2 + (Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta} d\theta. \quad (152)$$

この式の被積分関数は

$$\frac{e^{isRe^{i\theta}}}{k^2 + (Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta} = \frac{e^{is[\cos\theta + i\sin\theta]}}{k^2 + (Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta} = \frac{e^{isR\cos\theta} e^{-sR\sin\theta}}{k^2 + (Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta}.$$

したがって、この式の絶対値は以下の不等式を満たす。

$$\left| \frac{e^{isR\cos\theta} e^{-sR\sin\theta}}{k^2 + (Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta} \right| = \frac{|e^{isR\cos\theta} e^{-sR\sin\theta}|}{|k^2 + (Re^{i\theta})^2|} |iRe^{i\theta}| = \frac{e^{-sR\sin\theta}}{|k^2 + Re^{2i\theta}|} \cdot R \leq \frac{Re^{-sR\sin\theta}}{R^2 - k^2}. \quad (153)$$

この式を示すにあたり、 $|e^{isR\cos\theta}| = |e^{i\theta}| = 1$, $|k^2 + Re^{2i\theta}| \leq |R^2 - k^2|$ (等号は $e^{2i\theta} = -1$, $R > k$ のときに成立) を使った。したがって、式 (152) の絶対値は

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_2} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz \right| &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi \frac{e^{isRe^{i\theta}}}{k^2 + (Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left| \frac{e^{isRe^{i\theta}}}{k^2 + (Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta} \right| d\theta \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{Re^{-sR\sin\theta}}{R^2 - k^2} d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2\pi Re^{-sR\sin\theta}}{R^2 - k^2} = 0. \end{aligned}$$

一番最後の極限值を求める際に、現在考えている $s > 0$, $0 < \theta < \pi$ の場合には $s \sin \theta > 0$ となり、そのため $\frac{Re^{-sR\sin\theta}}{R^2 - k^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ となることを用いている。

以上の結果をまとめると、式 (151) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{k^2 + x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz = \frac{\pi e^{-ks}}{k}$$

となることがわかる。この式の実部、虚部がそれぞれ式 (152) の $\cos$, $\sin$ の式に相当する。