

第10回 特異点、極と零点／留数積分

[教科書 4.1 章、4.2 章]

前回導入したローラン級数に基づいて、複素関数の特異点を分類する。特に、比較的性質の良い特異点である極に注目する。

複素関数 $f(z)$ を極 $z = z_0$ でローラン展開したとき、その $\frac{1}{z-z_0}$ 項の係数を留数 $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$ といふ。その計算法をまずまとめる。次に、留数を用いて複素関数の一周積分を留数で書き表す留数積分:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \text{Res}_{z=z_0} f(z)$$

を導入する。これを活用すれば、複素積分の計算を大幅に簡単化することが可能となる。

10.1 特異点の分類

複素関数 $f(z)$ を $z = z_0$ の周りでローラン展開したときには

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

のように、負べきの項が現れるのが特徴だった。

この負べきの項は、 $z = z_0$ で発散する関数 $f(z)$ をその点の周りで展開したときに生じる。その点 $z = z_0$ は関数 $f(z)$ の特異点となるが、ローラン級数の負べき部分の性質に基づいて、特異点を下記の3種に分類できる。¹⁵

1. 真性特異点

関数 $f(z)$ の $z = z_0$ におけるローラン級数の負べきの項が無限次まで現れる場合に、 $z = z_0$ を関数 $f(z)$ の真性特異点と呼ぶ。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

2. (m 位の) 極

$f(z)$ の $z = z_0$ におけるローラン展開に負べきの項が有限次までしか現れない場合に、 $z = z_0$ を関数 $f(z)$ の極であるという。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^m \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

ただし、最高次の負べきの項の係数は非ゼロ ($b_m \neq 0$) であるとする。このように、ローラン級数に $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ 項までが現れるとき、 $z = z_0$ を m 位の極と呼ぶ。

¹⁵ここでは、 $f(z)$ がある特異点の近傍で解析的となり別の特異点が存在しないような場合、すなわち $f(z)$ が孤立特異点を持つ場合だけについてここでは解説する。

3. 除去可能特異点

関数 $\frac{1}{z} \sin z$ は、原点 $z = 0$ の近くで $\frac{0}{0}$ のように振る舞うため関数の値が定義されず、そのため $z = 0$ はこの関数の特異点となる。しかし、 $\frac{1}{z} \sin z$ を $z = 0$ の周りでローラン展開すると

$$\frac{1}{z} \sin z = \frac{1}{z} \left(z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 + \dots$$

となり、原点 $z = 0$ 付近では有限値 1 に漸近する。そこで、 $\frac{1}{z} \sin z$ は $z = 0$ のときに 1 という値を取ると定義すれば、この関数を全ての z で解析的な関数に格上げすることができる。

この例のように、 $z = z_0$ における関数値 $f(z_0)$ を指定することで取り除くことのできる特異点を除去可能特異点と呼ぶ。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

のように、 $f(z)$ の $z = z_0$ におけるローラン級数に負べきの項が現れないのが特徴。

極と真性特異点の例：

- $\frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2}$ は、 $z = 0$ に 1 位の極、 $z = 2$ に 5 位の極を持つ。実際、 $z = 0$ の周りでこの関数をローラン展開すると、分母に含まれる z がゼロになることなどから

$$\frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2} = -\frac{1}{32z} + \frac{11}{64} + \dots,$$

同じく $z = 2$ の周りでローラン展開すると、分母に含まれる $(z-2)$ がゼロになることなどから

$$\frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2} = \frac{1}{2(z-2)^5} - \frac{1}{4(z-2)^4} + \dots$$

となる。

- $e^{\frac{1}{z}}$ は原点 $z = 0$ に真性特異点を持つ。

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z} \right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z} \right)^3 + \dots$$

z を 0 に近づけると、実軸の正の部分に沿って近づける ($z = x$ としてから $x \rightarrow \infty$) と $e^{1/z} = e^{1/x} \rightarrow \infty$, 実軸の負の部分に沿って近づける ($z = -x$ としてから $x \rightarrow \infty$) と $e^{1/z} = e^{-1/x} \rightarrow 0$ となる。

さらに、 $e^{1/z}$ は 0 を除くあらゆる複素数値を真性特異点 $z = 0$ の近傍で取ることができることを示せる。これは真性特異点について一般に成り立つ特徴の一つとなっている。¹⁶

¹⁶この性質を示す定理はピカールの定理と呼ばれる。詳細については教科書を参照のこと。

10.1.1 零点

特異点の場合とは逆に、 $f(z)$ の $z = z_0$ におけるローラン展開が正べきの部分しか持たない場合、 $z = z_0$ における関数値は $f(z_0) = 0$ となる。このとき、 $z = z_0$ は関数 $f(z)$ の零点であると呼ぶ。特に、ローラン展開したときに

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots$$

のように m 次の項から級数が始まる場合、 $z = z_0$ を $f(z)$ の m 次の零点と呼ぶ。

10.1.2 無限遠点

複素平面で $|z| \rightarrow \infty$ となる領域を調べる場合には、変数変換 $z \rightarrow \frac{1}{w}$ を適用し、新変数における原点 $w = 0$ 付近に注目すると便利である。この変換 $z \rightarrow \frac{1}{w}$ は z 平面における原点と無限遠を入れ替える写像になっている。特に、 $|z| \rightarrow \infty$ に相当する点は、新変数の原点 $w = 0$ ただ一点に写される。

この性質に基づいて、 $w = 0$ に相当する点を無限遠点 $z = \infty$ と新たに定義することにする。また、複素平面 $\{z \in C\}$ に無限遠点 $z = \infty$ 一点を付け加えたものを拡張された複素平面と呼び、元の複素平面と(一応)区別する。

無限遠点における関数の振る舞いの例：

- 関数 $f(z) = \frac{1}{z}$ は、変数変換 $z \rightarrow \frac{1}{w}$ で $f(z) = \frac{1}{z} = w$ となり、新変数の原点 $w = 0$ 付近で1位の零点を持つことがわかる。このとき、変換前の関数 $f(z) = \frac{1}{z}$ は無限遠点 $z = \infty$ で1位の零点を持つ、と言う。逆に、関数 $f(z) = z$ は、 $f(z) = 1/w$ と振る舞うことから、元の変数の無限遠点 $z = \infty$ に1位の極を持つことになる。
- 関数 e^z は変数変換 $z \rightarrow \frac{1}{w}$ で $f(z) = e^{1/w}$ となり、新変数の原点 $w = 0$ に真性特異点を持つ。このとき、関数 e^z は無限遠点 $z = \infty$ に真性特異点を持つ、と言う。

図17のように、複素平面上の点を立体射影によって球面に写し、無限遠点 $z = \infty$ を球面上の「北極点」と同一視すると便利である。この球面はリーマン球面と呼ばれ、拡張された複素平面全体が球の表面全体に対応している。

10.2 留数積分

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ に m 位の極を持つときに、それを囲む積分経路 C に沿って $f(z)$ を一周積分することを考える。ここでは、経路 C 内には $z = z_0$ 以外の特異点が存在しないと仮定する。

仮定により、 $f(z)$ は $z = z_0$ の周りで

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

とローラン展開される。以前も導入した分数関数 $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ の一周積分の性質

$$\oint_{C: z_0 \text{ を囲む経路}} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = 1) \\ 0 & (n \text{ が } 1 \text{ 以外の整数}) \end{cases}$$

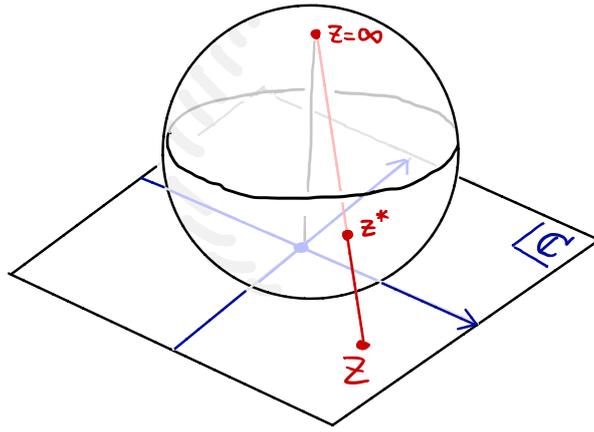


図 17: リーマン球面の模式図。複素平面 $\{z \in \mathbb{C}\}$ の原点の直上に球を置き、その北極点から複素平面上のある点 z まで直線を引き、それと球面との交点 z^* を複素平面上の点 z と同一視する。この写像を立体射影と呼ぶ。この写像で、拡張された複素平面上の無限遠点 $z = \infty$ はリーマン球上の北極点と対応付けられる。

を思い出すと、 $f(z)$ を経路 C に沿って一周積分した結果は

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C dz \left[\frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \right] = 2\pi i b_1 \quad (128)$$

と、積分値は $\frac{1}{z - z_0}$ 項の係数 b_1 だけで決まることがわかる。

この $\frac{1}{z - z_0}$ 項の係数を関数 $f(z)$ の $z = z_0$ における留数 $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$ 、留数の値で積分値を表す式 (128) のことを留数積分と呼ぶ。¹⁷

10.2.1 留数の計算法

実際に留数定理を使って複素積分を計算するためには、関数 $f(z)$ から留数の値を求める必要がある。その計算法をまとめる。ローラン級数の $\frac{1}{z - z_0}$ 項の係数 $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$ を求めることになるわけだが、極の次数によって b_1 の導出法が異なるので注意が必要。

- 1位の極（単純極）の場合

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ に1位の極（単純極と呼ばれる）を持つ場合、そのローラン展開は

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

となる。この表式から b_1 を求めるためには、式全体に $(z - z_0)$ をかけた後に、 $z \rightarrow z_0$ という極限を取って余分な項をゼロにすればよい。

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \left[\frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} [b_1 + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots] \\ &= b_1. \end{aligned}$$

¹⁷式 (128) は、積分経路の内部に極が一つだけ存在する場合の式である。複数の極が存在する場合については次回解説する。

したがって、単純極の留数を求めるための式は次で与えられる：

単純極の留数

$$\operatorname{Res} f(z) = b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (129)$$

• m 位の極 ($m > 1$) の場合

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ に m 位の極 ($m > 1$) を持つ場合、そのローラン展開は

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \quad (b_m \neq 0)$$

となる。この場合には、式 (129) の通りに計算すると $\frac{1}{(z - z_0)^{n>1}}$ 項が発散してしまうため、 b_1 をうまく取り出すことができない。そこで、式全体に $(z - z_0)^m$ をかけて、 $m - 1$ 回微分すると、ちょうど余分な項を取り除くことができる。そのようにしてから極限 $z \rightarrow z_0$ をとると

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m \left[\frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m+1} + \cdots] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(m-1)! b_1 + m! a_0(z - z_0) + \frac{(m+1)!}{2} a_1(z - z_0)^2 + \cdots \right] \\ &= (m-1)! b_1. \end{aligned} \quad (130)$$

したがって、 m 位の極における留数を求めるための式は以下で与えられる。

m 位の極の留数

$$\operatorname{Res} f(z) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \quad (131)$$

留数さえ求まれば、関数 $f(z)$ の極 $z = z_0$ を囲む経路 C に沿った一周積分は、式 (128) より

(C 内に極が一つだけ存在する場合の) 留数積分

$$\oint_C f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \quad (132)$$

で求められる。

10.2.2 留数積分の例

- 関数 $f(z) = \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2}$ は、 $z = -4$ に 1 位の極、 $z = 1$ に 2 位の極を持つ。

まず、 $z = -4$ における留数は、式 (129) より

$$\operatorname{Res}_{z=-4} f(z) = \lim_{z \rightarrow -4} (z+4)f(z) = \lim_{z \rightarrow -4} \frac{50z}{(z-1)^2} = \frac{50 \cdot (-4)}{(-4-1)^2} = -8. \quad (133)$$

したがって、 $z = -4$ だけを囲む経路 C に沿った $f(z)$ の一周積分の値は、式 (132) より

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-4} f(z) = -16\pi i. \quad (134)$$

- 上と同じ関数 $f(z) = \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2}$ の $z = 1$ における留数は、式 (131) で $m = 2$ とした場合の式より

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (z-z_0)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \frac{50z}{z+4} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{50}{z+4} - \frac{50z}{(z+4)^2} = \frac{50}{5} - \frac{50}{25} = 8.$$

したがって、 $z = 1$ だけを囲む経路 C に沿った $f(z)$ の一周積分の値は

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 16\pi i. \quad (135)$$

- 関数 $f(z) = \frac{1}{z} \cos z$ の原点 $z = 0$ 付近の振る舞いを調べる。

$z = 0$ では $\cos z$ は有限であることから、この関数は原点付近で $\frac{1}{z} \cos z \sim (\text{定数}) \times \frac{1}{z}$ のように振る舞う。したがって、この関数は原点に 1 位の極を持つことがわかる。式 (129) より

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z} \cos z = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1. \quad (136)$$

したがって、原点を取り囲む経路 C に沿った $f(z)$ の一周積分の値は、式 (132) より

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i. \quad (137)$$