第12回　留数積分とその応用（広義積分、フーリエ積分）

前回に引き続き、留数積分を応用して複雑な実積分を求める方法を紹介する。

積分路の形状や積分値の処理方法を工夫することで、非常に多種の実積分を手計算で求めることが可能となる。その中から、この講義では無限区間にわたる実積分である**広義積分**、応用上も重要となる**フーリエ積分**を中心に解説する。

12.1　広義積分

積分区間が無限の実積分[18]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{144}$$

を、複素関数の一周積分を活用して求められる場合がある。

図20のように、実軸の区間 $C_1 = \{x| - R \le x \le R\}$ と、半円 $C_2 = \{z|z = Re^{i\theta}\ (0 < \theta < \pi)\}$ から構成される経路 $C = C_1 + C_2$ を考える。

留数定理より、経路 C に沿った一周積分の値は、経路 C の内部に存在する特異点での留数の和に等しい：

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_n \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z).$$

一方で、この一周積分は経路 C_1 と C_2 それぞれについての線積分の結果の合計に等しい：

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_2} f(z)dz$$

この積分について、$R \to \infty$ とする極限を取ると

$$2\pi i \sum_n \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) = \oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)dz.$$

このうち、右辺第1項が求めたかった積分 (144) である。もし、**極限 $\lim_{R\to\infty}$** で**右辺第2項**がゼロになるならば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_n \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) \tag{145}$$

と実軸上の積分を留数の和で書き表せる。ここで、経路 C は $R \to \infty$ の極限で複素平面の上半分 (上半平面) の全体を覆うので、留数も上半平面に存在する極についてだけ和を取ることになる。

上記のように、実軸を含む複素一周積分を考え、積分経路を無限遠に飛ばす極限 $R \to \infty$ をとって不要な部分を消すという手法を今後よく使う。

例）不定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ を上記の手法で評価する。

まず、被積分関数が偶関数であることから

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}. \tag{146}$$

[18] この種の積分を総称して広義積分と呼ぶ。

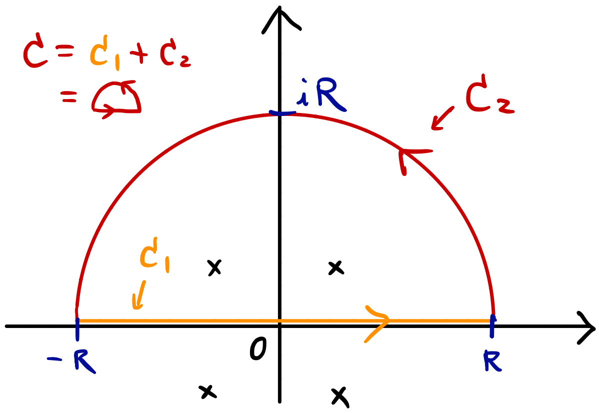

図 20: 無限区間にわたる実積分を求める際に使う積分路。

これを評価するために、図 20 の経路 C にわたる複素一周積分

$$\frac{1}{2}\int_C \frac{dz}{1+z^4} = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} + \frac{1}{2}\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4} \tag{147}$$

を考えて、積分経路を無限大にする極限 $R \to \infty$ をとる。このとき、右辺第 1 項は

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

と求めたかった実積分に帰着する。これに基づいて、以下では **(i) 式 (147) 左辺の複素一周積分の値を求め**、**(ii) 式 (147) 右辺第 2 項が** $\lim_{R\to\infty}$ **の極限でゼロになることを示すことで**、求めたかった積分 (146) の値を得る。

(i) 式 (147) 左辺の複素一周積分の値を求める。

被積分関数 $\frac{1}{1+z^4}$ の分母は

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-e^{\frac{i\pi}{4}})(z-e^{\frac{3i\pi}{4}})(z-e^{\frac{5i\pi}{4}})(z-e^{\frac{7i\pi}{4}})}$$

と因数分解できるので、被積分関数は $z = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$ で 1 位の極を持つ。[19]

このうち、経路 C に含まれるのは $z = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}$ のみである (図 20 参照)。これらの極について、前回導入した公式 (138) を用いて留数を求めると

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} f(z) = \left.\frac{1}{(z^4)'}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}} f(z) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{9\pi i}{4}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

したがって、求める積分値は

$$\frac{1}{2}\int_{C(R\to\infty)} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{1}{2}2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} f(z)\right) = \pi i\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)$$
$$= \pi i \cdot \frac{-i}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

[19]分母 $1+z^4$ が $z = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$ でゼロになる一方で、分母の微分 $(1+z^4)' = 4z^3$ がこれらの点で非ゼロになることから、分母は $z = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$ に 1 位の零点を持つ。このことから $\frac{1}{1+z^4}$ は $z = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$ に 1 位の極を持つ、と結論づけてもよい。

(ii) 式 (147) 右辺第 2 項が $\lim_{R\to\infty}$ の極限でゼロになることを示す。

まず、経路 C_2 上の点を $z = Re^{i\theta}$ $(0 < \theta < \pi)$ と表す。$dz = iRe^{i\theta}d\theta$ となることから

$$\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4} = \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{1+(Re^{i\theta})^4}d\theta = \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}}d\theta \tag{148}$$

この積分値が $R \to \infty$ の極限でゼロになることを示すために、その絶対値を不等式で評価してみよう。

$$\left|\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4}\right| \leq \int_{C_2} \left|\frac{dz}{1+z^4}\right| = \int_0^\pi \frac{|iRe^{i\theta}|}{|1+(Re^{i\theta})^4|}d\theta < \int_0^\pi \frac{R}{R^4-1}d\theta = \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

一つ目の不等号では | 積分 | の絶対値より | 被積分関数 | の絶対値の積分の方が大きくなること、二つ目の不等号では $|R^4 - e^{-4i\theta}| \geq R^4 - 1$ となることを用いている。したがって、$R \to \infty$ の極限で式 (148) の絶対値はゼロに収束し、そのため式 (148) の値自体もゼロに収束する。

以上の結果をまとめて、求めたかった積分 (146) の値が次のように得られる:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{C(R\to\infty)} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \tag{149}$$

12.2 フーリエ積分

任意の波形を三角関数の和に分解するフーリエ変換に必要となる積分

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(sx)dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(sx)dx,$$

を評価する。実数の積分としてこれらを計算することもできる場合があるが、複素積分の留数定理を使うことでいくらか計算がシンプルになる。

上記の実フーリエ変換は、以下の複素フーリエ変換の実部と虚部でそれぞれ与えられる。

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{isx}dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\left(\cos(sx) + i\sin(sx)\right)dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(sx)dx + i\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(sx)dx$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(sx)dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{isx}dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(sx)dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{isx}dx.$$

例）下記のフーリエ積分の結果を確認してみよう。

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(sx)}{k^2+x^2}dx = \frac{\pi}{k}e^{-ks}, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(sx)}{k^2+x^2}dx = 0 \qquad (s>0, k>0) \tag{150}$$

そのために、複素フーリエ積分 $\oint \frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz$ を、先ほどと同じ積分路を用いて以下を評価してみる。

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{isx}}{k^2+x^2}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dx \tag{151}$$

(i) 式 (151) 左辺の複素一周積分の値を求める。

被積分関数 $\dfrac{e^{isz}}{k^2+z^2} = \dfrac{e^{isz}}{(z-ik)(z+ik)}$ は $z=\pm ik$ の位置に一位の極を持つ。仮定 $k>0$ より、この内経路 C の内部に存在するのは上半平面に存在する $z=ik$ だけである。この極における留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2+x^2} = \left.\frac{e^{isx}}{(k^2+z^2)'}\right|_{z=ik} = \left.\frac{e^{isx}}{2z}\right|_{z=ik} = \frac{e^{is\cdot ik}}{2iz} = \frac{e^{-ks}}{2ik}.$$

したがって、式 (151) 左辺の複素一周積分の値は

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ik}\frac{e^{isz}}{k^2+x^2} = \frac{\pi e^{-ks}}{k}.$$

(ii) 式 (151) 右辺第 2 項が $\lim_{R\to\infty}$ の極限でゼロになることを示す。

積分路 C_2 上の点を $z=Re^{i\theta}$ $(0<\theta<\pi)$ と表す。このとき、積分要素が $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ となることも使うと、式 (151) 右辺第 2 項は

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{isRe^{i\theta}}}{k^2+(Re^{i\theta})^2}iRe^{i\theta}d\theta. \tag{152}$$

この式の被積分関数は

$$\frac{e^{isRe^{i\theta}}}{k^2+(Re^{i\theta})^2}iRe^{i\theta} = \frac{e^{is[\cos\theta+i\sin\theta]}}{k^2+(Re^{i\theta})^2}iRe^{i\theta} = \frac{e^{isR\cos\theta}e^{-sR\sin\theta}}{k^2+(Re^{i\theta})^2}iRe^{i\theta}.$$

したがって、この式の絶対値は以下の不等式を満たす。

$$\left|\frac{e^{isR\cos\theta}e^{-sR\sin\theta}}{k^2+(Re^{i\theta})^2}iRe^{i\theta}\right| = \frac{|e^{isR\cos\theta}e^{-sR\sin\theta}|}{|k^2+(Re^{i\theta})^2|}|iRe^{i\theta}| = \frac{e^{-sR\sin\theta}}{|k^2+Re^{2i\theta}|}\cdot R \le \frac{Re^{-sR\sin\theta}}{R^2-k^2}. \tag{153}$$

この式を示すにあたり、$|e^{isR\cos\theta}| = |e^{i\theta}| = 1$, $|k^2+Re^{2i\theta}| \le |R^2-k^2|$(等号は $e^{2i\theta}=-1$, $R>k$ のときに成立) を使った。したがって、式 (152) の絶対値は

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_2}\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dx\right| &= \lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{isRe^{i\theta}}}{k^2+(Re^{i\theta})^2}iRe^{i\theta}d\theta\right| \\ &\le \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{isRe^{i\theta}}}{k^2+(Re^{i\theta})^2}iRe^{i\theta}\right|d\theta \le \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{Re^{-sR\sin\theta}}{R^2-k^2}d\theta = \lim_{R\to\infty}\frac{2\pi Re^{-sR\sin\theta}}{R^2-k^2} = 0.\end{aligned}$$

一番最後の極限値を求める際に、現在考えている $s>0$, $0<\theta<\pi$ の場合には $s\sin\theta>0$ となり、そのため $\frac{Re^{-sR\sin\theta}}{R^2-k^2}\xrightarrow{R\to\infty}0$ となることを用いている。

以上の結果をまとめると、式 (151) から

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}}{k^2+x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz = \frac{\pi e^{-ks}}{k}$$

となることがわかる。この式の実部、虚部がそれぞれ式 (152) の cos, sin の式に相当する。