第 3 回　様々な複素関数 (有理関数、指数関数、双曲線関数)

前回の授業で導入した解析関数の例を見ていく。今回は

- べき関数・有理関数
- 指数関数
- 三角関数・双曲線関数

を扱う。

簡単な場合には、単に微分可能な実関数 $f(x)$ の引数を $x \to z$ と置き換えるだけで解析関数 $f(z)$ が得られる。コーシー・リーマンの関係式を満たすように実部・虚部を構築することが必要になる場合もある。

3.1　べき関数・有理関数

- べき関数:

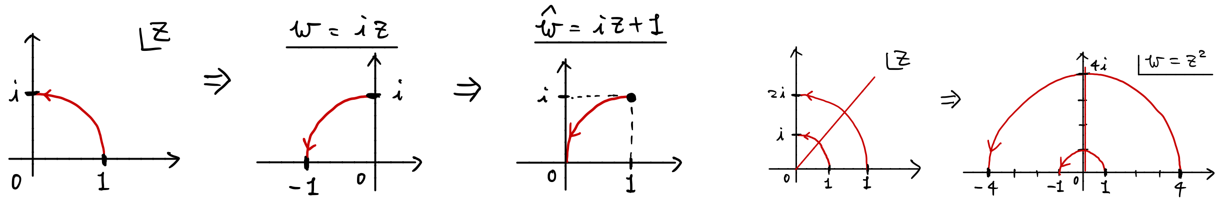
  べき関数 z^n を足して得られる**多項式関数**

  $$f(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m$$

  は、複素平面全体で解析関数となる。微分は実関数と同様で $f'(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n n z^{n-1}$。

  例)

  - 1 次変換 $f(z) = az + b \quad (a, b \in \mathbb{C})$: 複素平面上での**回転・拡大と平行移動**を表す。
  - $f(z) = z^2$: 極形式 $z = re^{i\theta}$ で表すと $f(z) = r^2 e^{2\theta}$ で、絶対値 r が 2 乗、偏角 θ が 2 倍。



(a) $f(z) = iz + 1$　　(b) $f(z) = z^2$

図 5: 多項式関数の例。

- 分数べき関数

  極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ で表すと、ド・モアブルの定理 (4) より

  $$f(z) = z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi mi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi mi}{n}\right)\right] \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

  偏角 $\frac{2\pi mi}{n}$ の分だけ、n 種類存在することに注意。

  ∗より一般的なべき関数は、対数関数を導入してから定義する。

- **有理関数**:

  2 つの多項式 $p(z)$, $q(z)$ の分数

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n}{d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \cdots + d_n z^m}$$

  は**有理関数**と呼ばれる。分母が非ゼロ $(q(z) \neq 0)$ のときに $f(z)$ は解析的となる。

  次回、**1 次分数関数** $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$ についてより詳しく説明する。

3.2 指数関数

実関数としての指数関数

$$f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

を複素関数に拡張することができる。そのためには、一般に下記の手順を踏む必要がある。

1. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおく
2. 実軸上で $f(z)$ が実関数 $f(x) = e^x$ と一致すると仮定する。すなわち、実軸 $y = 0$ 上で

$$u(x, 0) = e^x, \qquad v(x, 0) = 0 \tag{22}$$

   が満たされるとする。
3. コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   を解き、条件 (22) を満たすような関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ を構築する。

逆に、**複素関数 $f(z)$ の具体形の見当がついている場合には、それがコーシー・リーマンの関係式を満たしていることを確認する**だけでもよい。今回はこの方針で複素指数関数を作る。

式 (10) で、e^x のテイラー展開に基づくと $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ となることが示された。これをもとに、**(複素) 指数関数**を

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{23}$$

と定義する。この関数の実部・虚部がコーシー・リーマンの関係式を満たすことを確認できるので、式 (23) は解析関数となる。

$\because$ $e^z = u(x, y) + iv(x, y)$ の実部・虚部は

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y.$$

これらの偏微分を計算すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

この表式はコーシー・リーマンの関係式 (16) を満たしている。

コメント：

- 引数が純虚数の指数関数の式は**オイラーの公式**と呼ばれる。
$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{24}$$
絶対値が 1 の複素数を表す。複素平面上で、原点を中心とする単位円上の点に対応。
$(\because \quad |e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + i \sin^2 y} = 1.)$
$$\begin{aligned} y = \pi/2 \quad &\Rightarrow \quad \exp(i\pi/2) = i, \\ y = \pi \quad &\Rightarrow \quad \exp(i\pi) = -1 \end{aligned}$$
などが特徴的。

- e^z は $2\pi i$ の周期性を持つ。
$$e^{z+2\pi ni} = e^z \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$
$(\because \quad e^{z+2\pi ni} = e^z \times e^{2\pi ni} = e^z \times (\cos(2n\pi) + i \sin(2n\pi)) = e^z \times 1 = e^z.)$

例題: $e^z = 3$ の解を以下の手順で求めよ。

1. $z = x + iy$ として $e^z = 3$ を書き下し、実部・虚部を両辺で比較することで
$$e^x \cos y = 3, \qquad e^x \sin y = 0$$
を導出する。

2. 上式の一般解を求める。

解は $z = \log 3 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$ となる。

3.3 三角関数・双曲線関数

解析関数を組み合わせることで新たな解析関数を作れる。この方針で、三角関数 $\sin x$, $\cos x$ などを複素化する。実は双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ とも関係していることも観察する。

オイラーの公式 (24) より
$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \qquad e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y. \qquad (y \in \mathbb{R})$$
この二つの式を組み合わせて (実数) 三角関数 $\sin y$, $\cos y$ を構成できる。
$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \qquad \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{e^{iy} + e^{-iy}}.$$
この式の引数 $y \in \mathbb{R}$ を複素数 $z \in \mathbb{C}$ に置き換えることで、**(複素) 三角関数**を新たに定義する。

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}. \tag{25}$$

オイラーの公式 (24) を複素化した式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ を覚えることにしても便利。

性質：

- 通常の三角関数の公式や微分はそのまま成立する。

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{(e^{iz}+e^{-iz})^2-(e^{iz}-e^{-iz})^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\cos z &= \frac{d}{dz}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{ie^{iz}+(-i)e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z\\ \frac{d}{dz}\sin z &= \frac{d}{dz}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{ie^{iz}-(-i)e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z\end{aligned}$$

- $\cos z, \sin z$ は、実軸上では実数の三角関数 $\cos x, \sin x$ と一致する。
- 一方で、虚軸上 $z = iy$ $(y \in \mathbb{R})$ では (実数の) 双曲線関数になる。

$$\begin{aligned}\cos(iy) &= \frac{e^{i\cdot iy}+e^{-i\cdot iy}}{2} = \frac{e^{-y}+e^{+y}}{2} = \cosh y,\\ \sin(iy) &= \frac{e^{i\cdot iy}-e^{-i\cdot iy}}{2i} = \frac{e^{-y}-e^{+y}}{2i} = i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = i\sinh y.\end{aligned} \tag{26}$$

- 引数が一般の複素数 $z = x + iy$ の場合、(複素) 三角関数は以下のようにふるまう。

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^{y}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x)+e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2}\\ &= \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\cos x + i\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\sin x = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y\\ \sin(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x)-e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i}\\ &= \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\cos x + i\frac{e^{-y}+e^{y}}{2i}\sin x = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y\end{aligned}$$

上記と同様に、実数の双曲線関数 (26) で $y \to z$ とすることで (複素) 双曲線関数を定義する。

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}. \tag{27}$$