第 4 回　様々な複素関数 (対数関数、1 次分数変換)

前回の授業で複素指数関数を導入した。これをもとに

- **対数関数** $\ln z = \ln |z| + i \arg z$
- **一般のべき関数** $z^p = e^{p \ln z}$

を定義する。また、**1 次分数変換** $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ とその図形的な意味を説明する。

4.1　前回までの復習

- 複素数 z の極形式：

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r = |z| = \sqrt{x^2+y^2},\ x, y \in \mathbb{R})$$

  $|z|$ を z の絶対値、$\theta \equiv \arg z$ を z の偏角と言う。

- 複素関数としての指数関数:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{28}$$

  と定義する。特に、z が純虚数のときの式は**オイラーの公式**と呼ばれる。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- べき関数：

  $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ について、その整数べき z^n $(n \in \mathbb{Z})$ は

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]. \tag{29}$$

  ド・モアブルの定理と同じ式。

  z の分数べき $z^{1/n}$ は

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right] \qquad (m \in \mathbb{Z}). \tag{30}$$

$z^{1/n}$ は n 乗すると z になる数 $((z^{1/n})^n = z)$ として定義される。ド・モアブルの定理を使ってこれを実際に確認できる。

$$\begin{aligned}
\left(z^{1/n}\right)^n &= \left\{r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right]\right\}^n \\
&= \left(r^{\frac{1}{n}}\right)^n\left\{\cos\left[n \times \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right] + i\sin\left[n \times \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right]\right\} \\
&= r\left[\cos\left(\theta + 2m\pi\right) + i\sin\left(\theta + 2m\pi\right)\right] = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z.
\end{aligned} \tag{31}$$

$z^{1/n}$ の余分な偏角 $2m\pi/n$ は、三角関数の周期性 $\sin(\theta + 2m\pi) = \sin\theta$, $\cos(\theta + 2m\pi) = \cos\theta$ が起源。

4.2　対数関数

実数関数としての対数関数 $y = \ln x$ $(x, y \in \mathbb{R})$ は、指数関数 $y = e^x$ の**逆関数**として定義された。

$$y = e^x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \ln y \qquad (\because\ e^{\ln x} = x,\ \ln(e^x) = x) \tag{32}$$

$\ln x$ は e を底とする対数関数。

複素関数としての対数関数 $w = \ln w$ $(z, w \in \mathbb{C})$ も同じ方針で定義する。

$$z = e^w \qquad \Leftrightarrow \qquad w = \ln z \tag{33}$$

この式を満たす関数 $\ln z$ を作ることにする。

対数関数の実部・虚部を

$$w = \ln z = u + iv$$

とし、z を極形式 $z = re^{i\theta}$ で表したうえで $z = e^w$ に代入すると

$$z = e^w \qquad \Rightarrow \qquad z\ \left(= re^{i\theta}\right) = e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv}. \tag{34}$$

したがって、関数 $\ln z = u + iv$ の実部 u・虚部 v と、この関数の引数 $z = re^{i\theta}$ は次を満たす：

$$r = e^u, \quad e^{i\theta} = e^{iv}. \tag{35}$$

(35) の第 1 式から

$$r = e^u \quad \Rightarrow \quad u = \ln r, \tag{36}$$

(35) の第 2 式から

$$e^{i\theta} = e^{iv} \quad \Rightarrow \quad v = \theta + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{37}$$

指数関数の周期性 $e^{2n\pi} = 1$ $(n \in \mathbb{Z})$ のために、$e^{i\theta} = e^{iv}$ を満たす v には $2n\pi$ を足す不定性があることに注意。式 (36), (37) より、引数が $z = re^{i\theta}$ のときの **(複素) 対数関数** $\ln z$ の表式は

$$\begin{aligned} \ln z = \ln\!\left(re^{i\theta}\right) &= \ln r + i\,(\theta + 2n\pi) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \quad &(38) \\ &= \ln|z| + i \arg z + 2n\pi i \quad &(39) \end{aligned}$$

と与えられる。この式の性質をまとめると下記の通り。

- 対数関数 $\ln z$ の実部は、引数 z の実部の対数 $\ln|z|$
- 対数関数の虚部は、引数の偏角 $\arg z$

対数関数 (39) は、偏角 $2n\pi i$ のために**多価関数**となっている。これを避けるために、**対数関数の主値** $\mathrm{Ln}\, z$ を

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i \arg z \qquad (-\pi < \arg z \leq \pi) \tag{40}$$

と定義しておく。もともとの対数関数 $\ln z$ (39) の定義で、偏角 $\arg z$ を $-\pi \sim \pi$ に制限したもの。

例）　$\ln(-1) = (2n+1)\pi i = \ldots, -3\pi i, -\pi i, \pi i, 3\pi i, 5\pi i, \ldots,$ 　　$\mathrm{Ln}(-1) = \pi i.$

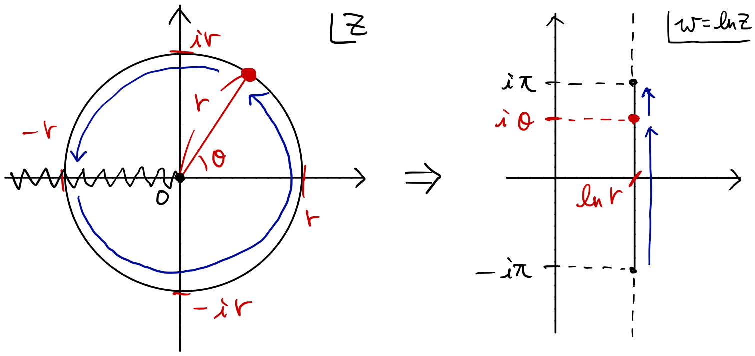


図 6: 複素対数関数 $w = \mathrm{Ln}\, z$ による z 平面上の半径 r の円 $z = re^{i\theta}$ の像。w 平面上では線分 $w = \ln r + i\theta$ $(-\pi < \theta \leq \pi)$ になっている。

対数関数の性質：

式 (39) で定義される (複素) 対数関数は、実数の対数関数とほぼ同じ性質を持つ。

- 積・商の対数は対数の和・差：

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \qquad \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2. \tag{41}$$

ただし、偏角の不定性の分ずれることがあるので注意が必要。

例）$z_1 = z_2 = -1$:

$$\ln(z_1) = \ln(z_2) = \ln(-1) = \pi i + 2n\pi i \qquad \therefore\ \ln(z_1) + \ln(z_2) = 2\pi i + 2n\pi i,$$
$$\ln(z_1 z_2) = \ln[(-1)\times(-1)] = \ln 1 = 0 + 2n\pi i. \quad (n \in \mathbb{Z})$$

偏角からくる不定性 $2n\pi i$ を無視すれば一致する。

- 対数関数の微分：

$$\boxed{\frac{d\ln z}{dz} = \frac{d\,\mathrm{Ln}\, z}{dz} = \frac{1}{z}.} \tag{42}$$

複素対数関数の定義式 (39) から導出可能。$\ln z$ は $z \neq 0$ を除けば解析的となる。

$\mathrm{Ln}\, z$ が解析関数となることは下記のように確認できる。$z = x + iy$ とすると

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\arctan\frac{y}{x} \equiv u + iv. \tag{43}$$

以下のとおり、$\mathrm{Ln}\, z$ の実部 u・虚部 v がコーシー・リーマンの関係式を満たすことを確認できる (計算の詳細は略)。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{44}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{45}$$

コーシー・リーマンの関係式が満たされるので、微分 $d\,\mathrm{Ln}\, z/dz$ の値は微分を取る方向に依存しない。そこで、実軸方向の微分をとることで $d\,\mathrm{Ln}\, z/dz$ を評価すると

$$\frac{d\,\mathrm{Ln}\, z}{dz} = \frac{\partial\,\mathrm{Ln}\, z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}. \tag{46}$$

4.3　一般のべき関数

これまでに z の整数べき z^n や分数べき $z^{1/n}$ を導入して調べてきた。対数関数を使ってこれを拡張する。

対数関数の定義式の p 乗を取ると

$$z = e^{\mathrm{Ln}\, z} \quad \Rightarrow \quad z^p = (e^{\ln z})^p = e^{p \ln z}. \tag{47}$$

この式を z^p の定義として採用する。べきの値 p は一般の複素数でよいことに注意。

$\ln z$ が多価関数であることに対応して z^p も多価関数になる。そこで、z^p の主値を

$$z^p = e^{p\, \mathrm{Ln}\, z} \tag{48}$$

と定義しておく。

例）i^i の値は

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i\left[\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}. \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{49}$$

上記の計算では $|i| = 1, \arg i = \pi/2$ より $\ln i = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i$ $(n \in \mathbb{Z})$ となることを使っている。$\ln i$ 由来の不定性 $2n\pi$ が出ていることに注意。一方で、i^i の主値は

$$i^i = e^{i\, \mathrm{Ln}\, i} = e^{i \frac{\pi i}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \tag{50}$$

となる。$\mathrm{Ln}\, z = \frac{\pi i}{2}$ となることを使っている。

4.4　1 次分数変換

前回導入した有理関数 (多項式関数の分数) のうち、分子と分母がともに 1 次関数で与えられるもの

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0) \tag{51}$$

について、その図形的な意味を調べておく。この変換は**メビウス変換**とも呼ばれる。$ad - bc = 0$ のとき $w =$ (定数) となるので、その場合を除くために $ad - bc \neq 0$ を仮定している。

- **特別な場合**:

  1 次分数変換 (51) は、以下の特別な場合を含む。

  - **平行移動** $w = z + b$: 複素数 $b = x + iy$ に対応した平行移動。
  - **回転・拡大** $w = az$: $a = re^{i\theta}$ として、原点を中心とした r 倍の拡大、角度 θ の回転。
  - **反転** $w = 1/z$: 単位円 $|z| = 1$ を基準とする反転を表す。

    この変換 $w = 1/z$ は、$z = re^{i\theta}$ とすると

    $$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \tag{52}$$

    となり、絶対値 $|w| = r^{-1} = |z|^{-1}$ は元の絶対値 $|z|$ の逆数、偏角 $\arg w = -\theta = -\arg z$ は元の偏角 $\arg z$ のマイナスの値となる。

    この反転で、**元の変数 z での直線・円は、変換後の変数 w での直線・円に移る。**

$z = x + iy$ とすると、z 平面における円は次の方程式

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R}) \tag{53}$$

で表される。$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ で式を書き換え、変換 $w = 1/z$ をかけると

$$\begin{aligned} & Az\bar{z} + B\frac{z+\bar{z}}{2} + C\frac{z-\bar{z}}{2i} + D = 0 \\ \Rightarrow \quad & A\frac{1}{w\bar{w}} + B\frac{w^{-1}+\bar{w}^{-1}}{2} + C\frac{w^{-1}-\bar{w}^{-1}}{2i} + D = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & A + B\frac{\bar{w}+w}{2} + C\frac{\bar{w}-w}{2i} + Dw\bar{w} = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

この式を $w = \hat{x} + i\hat{y}$ ($\hat{x} = \frac{w+\bar{w}}{2}, \hat{y} = \frac{w-\bar{w}}{2i}$) で書き換えると

$$A + B\hat{x} - C\hat{y} + D\left(\hat{x}^w + \hat{y}^2\right) = 0. \tag{55}$$

この方程式を満たす図形は、w 平面上の円か直線となる。

例) 直線 $z = x + i$ ($x \in \mathbb{R}$) は、反転 $w = \frac{1}{z}$ によって w 平面上の円 $\hat{x}^2 + \left(\hat{y} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ に写される。

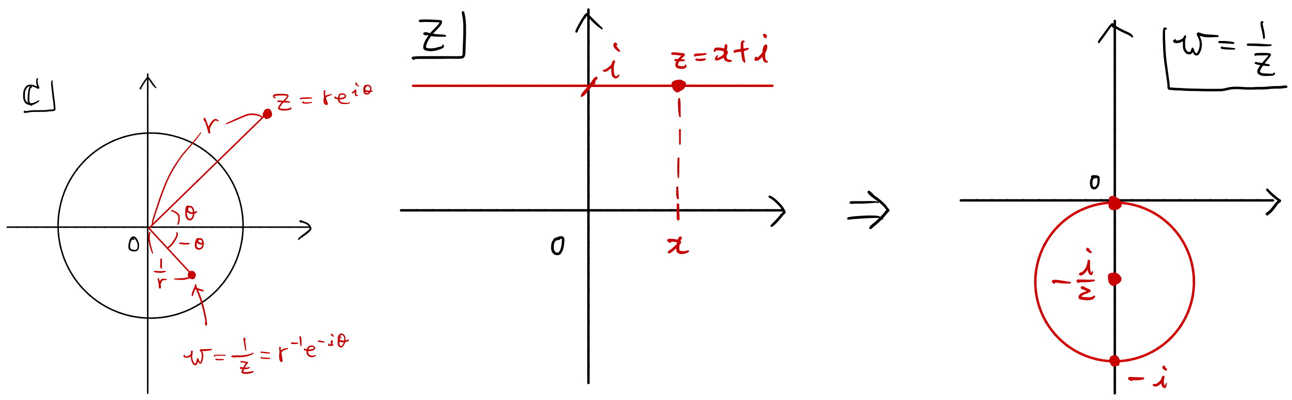
$\because$

$$z = x + i \ (x \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad y - 1 = 0 \tag{56}$$

これは、式 (53) で $A = B = 0, C = 1, D = -1$ としたものに相当する。これを変換 $w = 1/z$ で写したものは、式 (55) より

$$-\hat{y} - \left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x}^2 + \left(\hat{y} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2. \tag{57}$$

これは、w 平面上における中心 $-\frac{i}{2}$、半径 $\frac{1}{2}$ の円に相当する。



(a) 点 $z = re^{i\theta}$ の像

(b) 直線 $z = x + i$ ($x \in \mathbb{R}$) の像

図 7: 単位円を基準とする反転 $w = 1/z$ による写像。(a) 点 $z = re^{i\theta}$ の像 $w = r^{-1}e^{-i\theta}$。絶対値は元の値の逆数 r^{-1}、偏角はもとの値のマイナス $-\theta$ になる。(b) 直線 $z = x + i$ ($x \in \mathbb{R}$) の像 $|w + i/2| = 1/2$。中心 $-i/2$、半径 $1/2$ の円に写る。

- **一般の場合**:

  一般的な1次分数変換 (51) は、上記の平行移動・回転・拡大と単位円を基準とする反転の組み合わせとして表せる。

∵

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a\left(z+\frac{d}{c}\right)-\frac{ad}{c}+b}{cz+d}=\frac{-\frac{ad}{c}+b}{cz+d}+\frac{a}{c}\equiv\frac{K}{cz+d}+\frac{a}{c}.\quad\left(K\equiv-\frac{ad-bc}{c}\right)\tag{58}$$

この変換は、以下の変換を順次組み合わせたものとして得られる。

1. $f_1(z)=cz+d$ (c による回転・拡大と d による平行移動)
2. $f_2(z)=\frac{1}{z}$ (反転)
3. $f_3(z)=Kz+\frac{a}{c}$ (K による回転・拡大と a/c による平行移動)

これらの関数を使って、式 (58) を下記のように合成関数として表せる。

$$w=f_3\left(f_2\left(f_1\left(z\right)\right)\right)\equiv f_3\circ f_2\circ f_1(z)\tag{59}$$

図形的にも、式 (58) の変換は関数 $f_{1,2,3}(z)$ に相当する操作を z 平面上の図形について順次行ったものになっている。

- **1 次分数変換の決定**:

  式 (51) は 4 つの係数 a,b,c,d を含むが、そのうち 1 つは全ての係数の定数倍 $a,b,c,d\mapsto\alpha a,\alpha b,\alpha c,\alpha d$ ($\alpha\in\mathbb{C}$) によって任意の値にセットできる。このように変換しても w の値には影響が生じない。

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\alpha az+\alpha b}{\alpha cz+\alpha d}\tag{60}$$

  したがって、残り 3 つ分の係数の値を決めることができれば1次分数変換は一意に定まる。

  係数3つ分の値を確定するためには、z 平面上のある 3 点が w 平面上のどの点に写されるかを指定すればよい。

  例）$z=0,1,2$ のそれぞれを $w=2,5,8$ に写す1次分数変換は以下のように求まる。まず、求める1次分数変換を式 (51) のとおりにおくと、$z=0,1,2$ が $w=2,5,8$ に写されるので

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad\Rightarrow\quad 2=\frac{b}{d},\quad 5=\frac{a+b}{c+d},\quad 8=\frac{2a+b}{2c+d}\tag{61}$$

$$\Rightarrow\quad a=3d,b=2d,c=0.\tag{62}$$

  この表式を w の式に代入すると

$$w=\frac{3dz+2d}{0z+d}=3z+2.\tag{63}$$

- **無限遠点** ∞:

  式 (51) は、分母がゼロとなる $z=-d/c$ の場合には w は定義されない。ここで、$z=-d/c$ に対応する w の値を無限遠点 $w=\infty$ であると定義しておくと、あたかも複素平面上の1点であるかのように扱うことができる。変換 $w=1/z$ で、z 平面の原点 $z=0$ は $w=\infty$ に、z 平面上の無限遠点 $z=\infty$ は w 平面上の原点 $z=0$ に写る。