第6回　複素積分 (コーシーの積分公式とその応用)

前回解説したコーシーの積分定理 $\oint_C f(z)dz = 0$ ($f(z)$: C 内で解析的な関数) や $\oint \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i$ をもとに、

- コーシーの積分公式 $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$
- 解析関数の微分の公式 $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$

を示し、複素積分の計算に応用する。

6.1　準備：積分路の変形

コーシーの積分定理や様々な複素積分を行うにあたり、積分路を適切に変形することが必要となる。今回は特に周積分の経路を変形することが重要となるので、その方法を解説する。

復習：複素積分の性質

- 線積分の向きを反転すると積分値はマイナスになる。

  複素平面上の点 a から b にいたる積分路を逆向き (b から a) にたどって積分すると

$$\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz.$$

- ある複素線積分の積分路を分割すると、分割した各積分路の積分値の合計は元の積分値と等しい。

  複素平面上の点 a から b にいたる積分路を系路上の点 c で分割すると

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^c f(z)dz + \int_c^b f(z)dz.$$

復習: コーシーの積分定理

複素関数 $f(z)$ の閉路 C に沿った一周積分は、C で囲まれる範囲全体で $f(z)$ が解析的ならゼロになる。

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad [f(z): \text{経路 } C \text{ 内で解析的}]$$

復習：線積分の経路の変形

- 複素平面上で点 a から b にいたる 2 つの異なる経路 A, B があったとする。
- A と B で囲まれる領域で、関数 $f(z)$ は解析的であるとする。

このとき、経路 A に沿った $f(z)$ の積分値は、経路 B にそった積分値と等しい。
$\Rightarrow$ 関数 $f(z)$ が解析的な範囲で、積分路を変形しても積分値は不変。

(∵) 始点 a から経路 A に沿って終点 b に行き、経路 B に沿って点 a に戻ってくる閉路 C を考える。上記の 2 つ目の仮定より、C 内で $f(z)$ は解析的であるので、コーシーの定理より

$$0 = \oint_C f(z)dz = \underset{A}{\int_a^b} f(z)dz + \underset{B}{\int_b^a} f(z)dz = \underset{A}{\int_a^b} f(z)dz - \underset{B}{\int_a^b} f(z)dz.$$

$$\therefore \quad \underset{A}{\int_a^b} f(z)dz = \underset{B}{\int_a^b} f(z)dz$$

以上を踏まえて、一周積分の積分路の変形を行う。

- 2 つの閉路 C_1, C_2 があったとする。
- C_1 と C_2 に囲まれる領域で、関数 $f(z)$ は解析的であるとする。

このとき、閉路 C_1, C_2 に沿った同じ向きの一周積分値は、互いに一致する。
⇒ $f(z)$ が解析的な範囲で一周積分の経路を変形しても、積分値は変わらない。

今後、様々な複素積分を評価する際にこの種の経路の変形を多用する。今回はコーシーの積分定理の証明と練習問題で用いる。

(∵) 図 (12) のように 2 つの閉路 C_1, C_2 をつなぐ経路を一本用意し、それを通じて

1. C_1 を反時計回りに回る
2. C_1 と C_2 をつなぐ経路を $C_1 \to C_2$ と移動
3. C_2 を時計回りに回る
4. C_1 と C_2 をつなぐ経路を $C_2 \to C_1$ と移動

と一筆書きする経路を C' とする。
経路 C' は一つの閉路であり、その内側の全体で $f(z)$ は解析的である（図 (12) 参照)。したがって、コーシーの積分定理より C' に沿った一周積分の値はゼロになる。さらに、その積分経路を上記の通り分割すると

$$0 = \oint_{C'} f(z)dz = \int_1 f(z)dz + \int_2 f(z)dz + \int_3 f(z)dz + \int_4 f(z)dz. \tag{88}$$

このうち、1 番目の積分は経路 C_1 に沿った反時計回りの積分に、3 番目の積分は、積分経路の向きまで考えると経路 C_2 に沿った反時計回りの積分のマイナスに一致する。

$$\int_1 f(z)dz = \oint_{C_1,\circlearrowleft} f(z)dz, \qquad \int_3 f(z)dz = \oint_{C_2,\circlearrowright} f(z)dz = -\oint_{C_2,\circlearrowleft} f(z)dz. \tag{89}$$

また、4 番目の積分は、2 番目の積分と同じ経路を逆向きにたどるので、2 番目の積分値のマイナスになる。

$$\int_4 f(z)dz = -\int_2 f(z)dz. \tag{90}$$

以上を用いて式 (88) を書き換えると

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_1 f(z)dz + \int_2 f(z)dz + \int_3 f(z)dz + \int_4 f(z)dz \\
&= \oint_{C_1,\circlearrowleft} f(z)dz + \int_2 f(z)dz - \oint_{C_2,\circlearrowleft} f(z)dz - \int_2 f(z)dz \\
&= \oint_{C_1,\circlearrowleft} f(z)dz - \oint_{C_2,\circlearrowleft} f(z)dz
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \qquad \oint_{C_1,\circlearrowleft} f(z)dz = \oint_{C_2,\circlearrowleft} f(z)dz.
$$

すなわち、閉路 C_1 と C_2 の間で $f(z)$ が解析的ならば、積分路を C_1 から C_2 に変更しても積分値は変わらない。

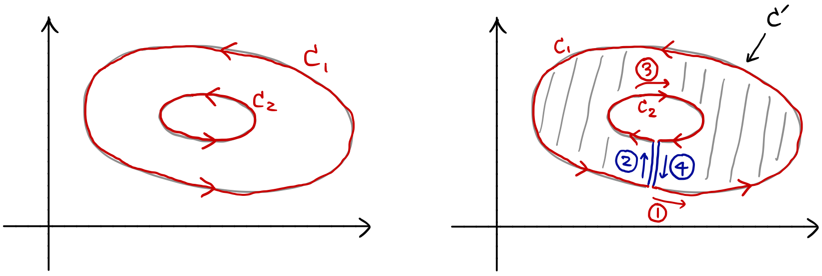

図 12: 閉路 C_1 を C_2 に変形する際に考える経路。C_1 と C_2 をつないで作った経路 C' も一つの閉路で、かつその内側で $f(z)$ は解析的であることに注意。

6.2 コーシーの積分公式

複素平面上のある一点 $z = z_0$ における複素関数の値 $f(z_0)$ を、その点を囲む一周積分として表すのがいかに述べるコーシーの積分公式である。

コーシーの積分公式

単連結領域 D において解析的な関数 $f(z)$ について

$$
2\pi i f(z_0) = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{91}
$$

ただし、z_0 は D 内の任意の点、C は z_0 を取り囲む D 内の任意の単純閉曲線。

コメント：前回、$z = z_0$ を囲む経路 C 上で $1/(z - z_0)$ を一周積分すると $2\pi i$ になることを示した:

$$
\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.
$$

この被積分関数に、経路 C の内部で解析的な関数 $f(z)$ をかけてから積分すると

$$
\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \times f(z_0)
$$

と、**分母がゼロになる地点** $z = z_0$ **における** $f(z_0)$ が結果として出てくる、という公式である。

(∵) 公式 (91) の被積分関数を $f(z) = f(z_0) + (f(z) - f(z_0))$ のように z_0 における値 $f(z_0)$ とその値からのずれ $f(z) - f(z_0)$ に分離して書くと

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \tag{92}$$

被積分関数は、経路 C 内で $z = z_0$ を除くすべての点で解析的である。[1]
したがって、積分路 C を、$z = z_0$ を中心とする半径 ρ の円 $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に変形しても積分値は変わらない。
この積分路を用いて、式 (92) の右辺第一項が $2\pi i f(z_0)$ に、第二項がゼロになることを以下で示す。

- 右辺第一項に $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ を代入すると

$$\oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = f(z_0) \cdot i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0). \tag{93}$$

  θ 積分に書き換える際に、$z(\theta) = z_0 + \rho e^{i\theta}$ に対して

$$dz = \frac{dz}{d\theta} d\theta = i\rho e^{i\theta} d\theta$$

  となることを用いている。

- 右辺第二項の被積分関数 $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ は、積分路の半径 ρ をゼロに近づける極限で分子も分母もゼロに近づき、それらの比 $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ はある定数 ϵ/ρ よりも小さくなると示せる。[2] したがって、右辺第二項の積分は以下のように評価される：

$$\left| \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \oint_C \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| |dz| < \frac{\epsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0.$$

  不等式の変形には複素数の三角不等式 $|ab| < |a||b|$ $(a, b \in \mathbb{C})$ を用いている。この式より

$$\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

  が結論される。

[1] $\frac{1}{z-z_0}$ が $z = z_0$ で解析的ではないことに対応して、$\frac{f(z)}{z-z_0}$ も $z = z_0$ で解析的ではなくなる。

[2] 右辺第二項の被積分関数 $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ が積分路 $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 上でどう振る舞うかを調べる。まず、$f(z) - f(z_0)$ は、$f(z)$ が連続関数であることから、$\epsilon > 0$ をある値に取ったとき、それに対応してある数 $\delta > 0$ で $|z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ を満たすものが存在する。ここで、積分路の半径を $\rho < \delta$ が満たされるように取ると $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\rho}$ が積分路 $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 上の全体で満たされる。

6.2.1 コーシーの積分定理の応用

コーシーの積分公式 (91)、およびコーシーの積分定理 (78) を用いて

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \quad (f(z)\text{: } C \text{ 内で解析的})$$

の形の積分を簡単に評価できる。

- **点 $z=z_0$ が閉路 C 内に含まれる**なら、コーシーの積分定理より
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$
- **点 $z=z_0$ が閉路 C 内に含まれない**なら、被積分関数 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ は C 内全体で解析的となる。このとき、コーシーの積分定理 (閉路 C 内で $f(z)$ が解析的なら $\oint_C f(z)dz=0$) より
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0.$$

[例題] 関数 $\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ を、以下の点を中心とする半径 1 の円に沿って反時計回りに積分せよ。

(a) $z=1$　　(b) $z=\dfrac{1}{2}$　　(c) $z=-1$　　(d) $z=i$

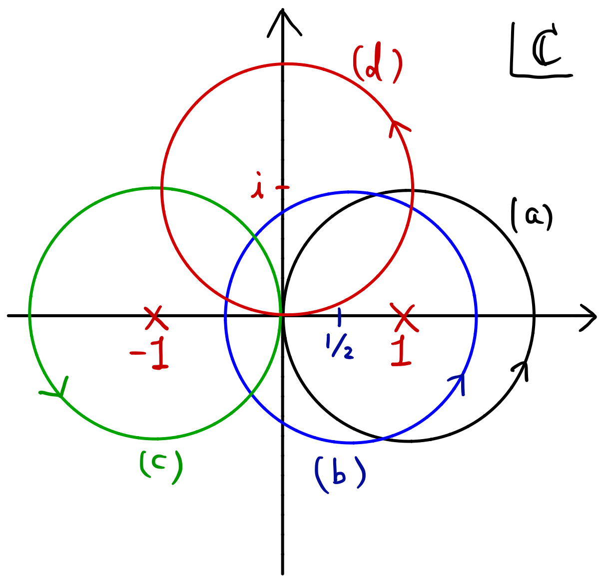

図 13: 今回の例題で用いる積分経路。複素平面上の (a) $z=1$, (b) $z=\dfrac{1}{2}$, (c) $z=-1$, (d) $z=i$ のそれぞれを中心とする半径 1 の円である。

[解答例]
被積分関数は

$$\frac{z^2+1}{z^2-1} = \frac{z^2+1}{(z+1)(z-1)}$$

と変形でき、特に分母は $z=1,\ z=-1$ でゼロになる。

- (a), (b) は、その内側に点 $z=1$ を含み、$z=-1$ は含まない。したがって、被積分関数の分母の因子のうち $z-1$ だけが経路内でゼロになる。これにコーシーの積分公式を適用すると

$$\oint_{\text{(a), (b)}} \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_{\text{(a), (b)}} \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{z^2+1}{z+1}\right|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{1^2+1}{1+1} = 2\pi i.$$

- (c) は、その内側に点 $z=-1$ だけを含むので、被積分関数の分母のうち $z+1$ だけがゼロになる。したがって

$$\oint_{\text{(c)}} \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_{\text{(c)}} \frac{1}{z+1} \cdot \frac{z^2+1}{z-1}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{z^2+1}{z-1}\right|_{z=-1} = 2\pi i \cdot \frac{(-1)^2+1}{-1-1} = -2\pi i.$$

- 円 (d) は、その内側に $z=\pm 1$ を含まないため、被積分関数 $\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ はその内側全体で解析的となる。したがって、コーシーの積分定理より

$$\oint_{\text{(d)}} \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 0.$$

6.3 解析関数の微分の公式

コーシーの積分公式では、ある地点 $z=z_0$ における関数値 $f(z_0)$ を一周積分として表した。これと類似したものとして、その地点における関数の微分値 $\dfrac{d^n f}{dz^n}(z_0) \equiv f^{(n)}(z_0)$ を一周積分として表す公式もある。

解析関数の微分の公式

単連結領域 D において関数 $f(z)$ が解析的なとき、D 内では $f(z)$ のすべての階数の微分が存在する。
さらに、D 内の点 $z=z_0$ における微分の値 $f^{(n)}(z_0)$ は以下のように表せる：

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{94}$$

ただし、z_0 は D 内の任意の点、C は z_0 を取り囲む D 内の任意の単純閉曲線。

コメント：

- **複素関数 $f(z)$ が解析的 (1 階微分 $f'(z_0)$ が存在する) ならば、$f(z)$ は無限に微分可能である**ことを示す定理である。一般の関数 $f(x)$ には 1 階微分可能だが 2 階微分が存在しないものなどが存在する。こうしたものと比べて、解析関数は単純な性質を持つということを意味している。

- 公式の覚え方：

もし、点 $z=z_0$ における関数 $f(z)$ のテイラー展開

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(z_0)(z-z_0)^3+\cdots \tag{95}$$

と、分数関数の一周積分の性質

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz=\begin{cases}2\pi i & (n=1)\\ 0 & (n\neq 1)\end{cases} \tag{96}$$

を覚えていれば、公式 (94) を以下のように導くことができる。

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
&=\oint_C \frac{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(z_0)(z-z_0)^3+\cdots}{(z-z_0)^{n+1}}dz\\
&=\oint_C dz\left[\frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}}+\frac{f(z_0)(z-z_0)}{(z-z_0)^{n+1}}+\frac{1}{2}\frac{f''(z_0)(z-z_0)^2}{(z-z_0)^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}+\cdots\right]\\
&=\oint_C dz\left[\frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}}+\frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n}}+\frac{1}{2}\frac{f''(z_0)}{(z-z_0)^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{f^{(n)}(z_0)}{z-z_0}+\cdots\right]\\
&=2\pi i\cdot\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).
\end{aligned} \tag{98}$$

最後の等式では、式 (96) のように一周積分で $\dfrac{1}{z-z_0}$ は $2\pi i$ に、その他の項 $\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ $(n\neq 1)$ はゼロになることを用いた。

実際には、公式 (94) をもとにしてテイラー展開の式 (95) を示すことになる。今後の授業でまた説明する。

[公式 (94) の証明概要]
$n=1$ の場合の公式

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{99}$$

を証明する。
関数の微分 $f'(z_0)$ の定義式から出発して、それをコーシーの積分公式で書きなおすと

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\right]=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\Delta z}\oint_C\left[\frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}-\frac{f(z)}{z-z_0}\right]$$

この式の右辺の積分をさらに変形すると

$$\frac{1}{\Delta z}\oint_C\left[\frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}-\frac{f(z)}{z-z_0}\right]=\oint_C\left[\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}+\Delta z\cdot\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\right]dz.$$

このうち、右辺第 2 項が極限 $\Delta z\to 0$ でゼロになっていれば公式 (94) が示される。点 z_0 から最も近い積分経路 C 上の点までの距離を d とすると、Δz が十分小さい時には

$$\left|\frac{1}{z-z_0}\right|\sim\left|\frac{1}{z-(z_0+\Delta z)}\right|\lesssim\frac{1}{d}$$

となる。

$$\left|\Delta z \cdot \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2} dz\right| < |\Delta z| \cdot \oint_C \left|\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\right| |dz| < |\Delta z| \cdot \frac{L}{d^3} \max_C f(z). \tag{100}$$

ただし、$L = \oint_C |dz|$ は積分経路の長さ。$\max_C f(z)$ は経路 C 上における $f(z)$ の最大値で、$f(z)$ が解析的であることからこれは有限の値となる。したがって、$\Delta z \to 0$ の極限で式 (100) はゼロとなり、公式 (94) が示された。
より正確な証明については教科書 3.6 節を参照のこと。

[例題] 関数 $\dfrac{\cos(\pi z)}{(z-1)^3}$ を円 $|z| = 2$ に沿って積分せよ。

[解答例] 点 $z = 1$ で被積分関数 $\dfrac{\cos(\pi z)}{(z-1)^3}$ の分母はゼロとなる。また、この点は円 $|z| = 2$ の内側に存在するので、微分公式 (94) で $n = 2$, $z_0 = 1$ としたものを適用することにより

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left[\cos(\pi z)\right]'' \Big|_{z=1} = \pi i \left[-\pi^2 \cos(\pi z)\right] \Big|_{z=1} = -\pi^3 i \cos(\pi) = \pi^3 i.$$