学籍番号	氏名	

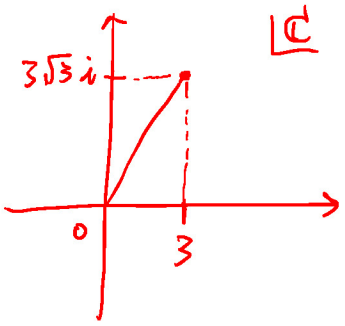
複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜２限]

第1回 (4/11)

1. 絶対値 6, 偏角 $\pi/3$ の複素数を $x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ の形で書け。その複素数を複素平面上に図示せよ。

$6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3+3\sqrt{3}i$

($\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$)



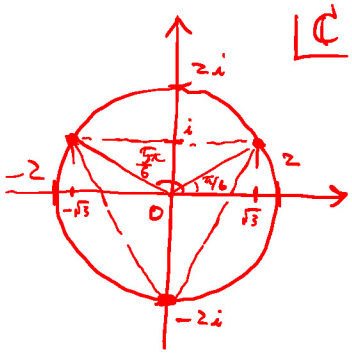
2. 3乗根 $\sqrt[3]{8i}$ を全て求めよ。それらを複素平面上に図示せよ。

$\sqrt[3]{8i}=\sqrt[3]{2^3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$

$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3}\right)\right]$ $(n\in\mathbb{Z})$

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$, $\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}=\frac{9\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$

60° 150° 270°



3. ド・モアブルの定理を用いて三角関数の三倍角の公式を証明せよ。

(a) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(b) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

ド・モアブルの定理： $\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ $(n\in\mathbb{Z})$

$n=3$ とすると

$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$

$=\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$

$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)$

両辺の実部・虚部を比較して

$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)$
$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta$
$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$