

学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜2限] 第11回 (7/11)

1. 積分  $\oint_C \frac{z-23}{z^2-4z-5} dz$  ( $C: |z-2|=4$ ) を次の手順で評価せよ。

- (a) 被積分関数  $\frac{z-23}{z^2-4z-5}$  の特異点の位置と、円  $|z-2|=4$  を複素平面上に図示せよ。
- (b) 積分路  $C: |z-2|=4$  の内部に含まれる特異点について留数を求めよ。
- (c) 留数定理を使って積分値を評価せよ。

2. 問題1で積分路を変更して  $\oint_C \frac{z-23}{z^2-4z-5} dz$  ( $C: |z|=4$ ) とした場合、積分値はいくらか？

3.  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k + \cos \theta}$  ( $k > 1$ ) を次の手順で評価せよ。

(a)  $z = e^{i\theta}$  とおいたとき、 $d\theta = \frac{dz}{iz}$  と表せることを示せ。

(b) 与えられた積分を、単位円上の一周積分

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{k + \frac{1}{2}(z + z^{-1})} \frac{dz}{iz} = -2i \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2kz + 1} dz$$

に書き換えられることを示せ。

(c) 分母が  $z^2 + 2kz + 1 = 0$  となり、被積分関数  $\frac{1}{z^2 + 2kz + 1}$  が極を持つ点を求めよ。

(d) 積分路  $|z| = 1$  内に含まれる極について留数を求めよ。

(e) 留数定理を使って積分値を求めよ。