学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜２限]　第12回 (7/18)

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+16}$ の値を、次の複素積分

$$\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{dz}{z^4+16} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+16} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{dz}{z^4+16} \tag{1}$$

を用いて求めよ。ただし、C_2 は半円 $\{z|z = Re^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}$ を反時計回りに回る経路、C は C_2 と実軸上の経路 $\{z|z = x, -R < x < R\}$ を連結した左回りの経路である。

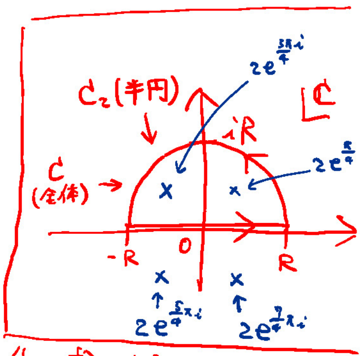
(i) 式 (1) の被積分関数がどの位置に何位の極を持つかを調べる。
(分母が $z^4 + 16 = 0$ を満たす位置が極。それぞれ何位の極か？)

(ii) 経路 C 内に含まれる極について留数を求め、式 (1) 左辺の積分値を求める。

(iii) 式 (1) の右辺第二項を $z = Re^{i\theta}$ とおいて θ 積分に書き換える。

(iv) θ 積分に直した右辺第二項が極限 $R \to \infty$ でゼロになることを示す。

(v) 以上の結果をまとめて $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+16}$ の値を求める。



(i) $z^4+16=0$ が満たされるのは $z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}, 2e^{\frac{3}{4}\pi i}, 2e^{\frac{5}{4}\pi i}, 2e^{\frac{7\pi i}{4}}$

したがって、(1)式左辺の被積分関数は次の様に因数分解できる

$$\frac{1}{z^4+16} = \frac{1}{(z-2e^{\frac{\pi}{4}i})(z-2e^{\frac{3}{4}\pi i})(z-2e^{\frac{5}{4}\pi i})(z-2e^{\frac{7}{4}\pi i})}$$

この式より、$z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}, 2e^{\frac{3}{4}\pi i}, 2e^{\frac{5}{4}\pi i}, 2e^{\frac{7}{4}\pi i}$ はどれも $\frac{1}{z^4+16}$ の1位の極である。

(ii) R が充分に大きいとき、経路 C 内に含まれる極は $z=2e^{\frac{\pi}{4}i}, 2e^{\frac{3\pi}{4}i}$ の2つである。
これらは1位の極なので、その留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=2e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{1}{z^4+16} = \left.\frac{1}{(z^4+16)'}\right|_{z=2e^{\frac{\pi}{4}i}} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=2e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{1}{4(2e^{\frac{\pi}{4}i})^3} = \frac{1}{32e^{\frac{3}{4}\pi i}} = \frac{1}{32}e^{-\frac{3}{4}\pi i} = -\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{32}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2e^{\frac{3\pi}{4}i}} \frac{1}{z^4+16} = \left.\frac{1}{(z^4+16)'}\right|_{z=2e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=2e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{1}{4(2e^{\frac{3\pi}{4}i})^3} = \frac{1}{32e^{\frac{9}{4}\pi i}} = \frac{1}{32e^{\frac{1}{4}\pi i}} = \frac{1}{32}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\therefore \lim_{R\to\infty} \oint \frac{dz}{z^4+16} = 2\pi i\left(\frac{1}{32}e^{-\frac{3}{4}\pi i} + \frac{1}{32}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{\pi i}{16}\left(-e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{\pi i}{16}\cdot 2i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi i}{8}\cdot i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

(iii) $z = Re^{i\theta} \Rightarrow dz = \frac{dz}{d\theta}d\theta = \frac{d}{d\theta}(Re^{i\theta})d\theta = iRe^{i\theta}d\theta$.

$$\therefore \int_{C_2} \frac{dz}{z^4+16} = \int_0^{\pi} \frac{1}{(Re^{i\theta})^4+16} \times iRe^{i\theta}d\theta.$$

(iv) 式(1)の右辺第2項の絶対値は次のように評価できる。

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{1}{(Re^{i\theta})^4+16} \times iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\pi} \frac{|iRe^{i\theta}|}{|R^4e^{4i\theta}+16|}d\theta \le \int_0^{\pi} \frac{R}{R^4-16}d\theta = \frac{\pi R}{R^4-16} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

よって、極限 $R\to\infty$ で式(1)の右辺第2項もゼロに収束。

(v) 以上より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+16} = \lim_{R\to\infty} \int_C \frac{dz}{z^4+16} = \underline{\underline{\frac{\pi}{8\sqrt{2}}}}.$$

2. フーリエ積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x^2+x+1}dx$ を、次の複素積分

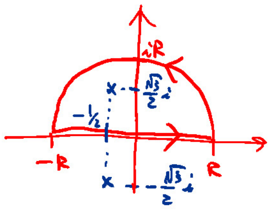
$$\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}dz \qquad (2)$$

を活用し、先程と同様の方法で求めよ。注意点は下記の通り。

- 分母が $z^2+z+1=0$ を満たす位置が極となる。この式を 2 次方程式として解けば極の位置がわかる。その解を $z_{1,2}$ とすると、被積分関数は $\frac{e^{2iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}$ と表される。$z=z_{1,2}$ はそれぞれ何位の極か？
- 式 (2) の右辺第一項の虚部が求める積分値である。

  $\left[\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)+i\sin(2x)}{x^2+x+1}dx \quad \therefore\ \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x^2+x+1}dx\right]$

  したがって、式 (2) の右辺第二項がゼロになるなら、式 (2) 左辺の値の虚部が求めたかった積分値に一致する。



(i) $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1-4}\right)=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$\therefore\ \frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}=\frac{e^{2iz}}{\left[z-\left(-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i\right)\right]\left[z-\left(-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)\right]}$. $z=-\frac12\pm\frac{\sqrt3 i}{2}$ はどちらも1位の極である。

(ii) 上記の極のうち、経路C内に存在するのは $z=-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$ だけである。

$$\underset{z=-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}{\mathrm{Res}}\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}=\lim_{z\to-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}\left[z-\left(-\tfrac12+\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right]\frac{e^{2iz}}{\left[z-\left(-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i\right)\right]\left[z-\left(-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)\right]}=\left.\frac{e^{2iz}}{z-\left(-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)}\right|_{z=-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}$$

$$=\frac{\exp\left[2i\left(-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i\right)\right]}{-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i-\left(-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)}=\frac{1}{\sqrt3 i}\cdot e^{-\sqrt3-i}$$

$$\therefore\ \lim_{R\to\infty}\oint\frac{e^{2iz}dz}{z^2+z+1}=2\pi i\times\frac{1}{\sqrt3 i}e^{-\sqrt3-i}=\frac{2\pi}{\sqrt3}e^{-\sqrt3-i}$$

(iii),(iv) $z=Re^{i\theta}\Rightarrow dz=iRe^{i\theta}d\theta$.

$$\therefore\ \int_{C_2}\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}dz=\int_{C_2}\frac{\exp(2i\cdot R\overbrace{e^{i\theta}}^{\cos\theta+i\sin\theta})}{(Re^{i\theta})^2+Re^{i\theta}+1}iRe^{i\theta}d\theta=\int_{C_2}\frac{iRe^{i\theta}\exp(2iR\cos\theta-2R\sin\theta)}{R^2e^{2i\theta}+Re^{i\theta}+1}d\theta$$

$$\Rightarrow\ \left|\int_{C_2}\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}dz\right|\le\int_{C_2}\frac{|iRe^{i\theta}\exp(2iR\cos\theta-2R\sin\theta)|}{|R^2e^{2i\theta}+Re^{i\theta}+1|}d\theta\le\int_{C_2}d\theta\,\frac{Re^{-2R\sin\theta}}{R^2-R-1}=\frac{2\pi Re^{-2R\sin\theta}}{R^2-R-1}\xrightarrow{R\to\infty}0.$$

よって式(2)の右辺第2項も極限 $R\to\infty$ でゼロになる。

(v) 以上より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx=\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}dz=\frac{2\pi}{\sqrt3}e^{-\sqrt3-i}$$

$$\therefore\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x^2+x+1}dx=\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx=\mathrm{Im}\left(\frac{4\pi}{\sqrt3}e^{-\sqrt3-i}\right)=\frac{2\pi e^{-\sqrt3}}{\sqrt3}\mathrm{Im}\,\underbrace{e^{-i}}=-\frac{2\pi e^{-\sqrt3}}{\sqrt3}\sin 1.$$

$= \cos(-1)+i\sin(-1)$
$= \cos 1 - i\sin 1$
$\therefore\ \mathrm{Im}\,e^{-i}=-\sin 1$