学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018 年度前期 水曜２限]　第２回 (4/18)

1. 関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ が $z = z_0$ で微分可能のときに、以下を示せ。

(a) $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ としたときの微分の定義式

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x + i\Delta y} \tag{$\star$}$$

を、$\Delta z = \Delta x$ $(\Delta y = 0)$ のときに評価せよ。

(b) 同じ式を $\Delta z = i\Delta y$ $(\Delta x = 0)$ のときに評価せよ。

(c) (a) と (b) が等しいとおいて、コーシー・リーマンの関係式を導出せよ。

(a) $\Delta y = 0$ のとき

$$(\ast) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

(b) $\Delta x = 0$ のとき

$$(\ast) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \right]$$

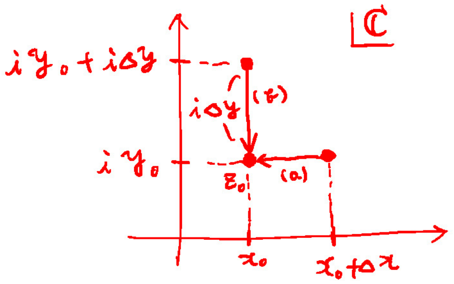
$$= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

(c) $$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

両辺の実部・虚部がそれぞれ等しいとして

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

が得られる。」



2. 関数 $f = \bar{z} = x - iy$ が微分不可能であることを以下の手順で示せ。

(a) $z = z_0$ における微分の定義式 $(\star)$ を用いて、$f = \bar{z} = x - iy$ の微分を $\Delta z = \Delta x$ $(\Delta y = 0)$ のときに評価する。

(b) 同じ式を $\Delta z = i\Delta y$ $(\Delta x = 0)$ のときに評価する。

(c) (a) と (b) が等しくないことを確認する。

$f = \bar{z} = x - iy = u + iv$ $\therefore \begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases}$ となる.

問1の結果を用いると

(a) $(\ast) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = 1$ — Ⓐ

(b) $(\ast) = -i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = -1$ — Ⓑ

(c)

Ⓐ $\neq$ Ⓑ なので、全ての $z = z_0$ について $f = \bar{z}$ は微分不可能である。