学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜２限]　第３回 (4/25)

1. 次の式の値を求めよ。

(a) $e^{-\frac{\pi}{4}i}$ $= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

(b) $e^{2+5\pi i}$ $= e^2 e^{5\pi i}$

$= e^2 (\underbrace{\cos 5\pi}_{=-1} + i \underbrace{\sin 5\pi}_{=0})$

$= -e^2.$

2. 関数 e^{-3z} の実部 $\mathrm{Re}\, e^{-3z}$ と虚部 $\mathrm{Im}\, e^{-3z}$ を求めよ。

(ヒント: $z = x + iy$ として、複素指数関数の定義に従い e^{-3z} を書き下し、実部･虚部に分ける。)

$z = x + iy$ とおくと　$(x, y \in \mathbb{R})$

$e^{-3z} = e^{-3(x+iy)} = e^{-3x} e^{-3iy}$

$= e^{-3x}\left[\cos(-3y) + i\sin(-3y)\right]$

$= e^{-3x}(\cos 3y - i\sin 3y)$

$\therefore \mathrm{Re}\, e^{-3z} = e^{-3x}\cos 3y,\ \mathrm{Im}\, e^{-3z} = -e^{-3x}\sin 3y.$

3. 次の式の値を求めよ。

(a) $\sin \frac{\pi i}{3}$

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

$\therefore \sin \frac{\pi i}{3} = \frac{1}{2i}\left(e^{i \cdot \frac{\pi i}{3}} - e^{-i \cdot \frac{\pi i}{3}}\right)$

$= \frac{1}{2i}\left(e^{-\pi/3} - e^{\frac{\pi}{3}}\right)$

$= \frac{i}{2}\left(e^{\pi/3} - e^{-\pi/3}\right)$

$= i \sinh \frac{\pi}{3}$.

(b) $\sinh \frac{\pi i}{3}$

$\sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$.

$\therefore \sinh \frac{\pi i}{3} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi i}{3}} - e^{-\frac{\pi}{3} i}\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{ \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} - \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{ \cancel{\cos\frac{\pi}{3}} + i \sin\frac{\pi}{3} - \left(\cancel{\cos\frac{\pi}{3}} - i \sin\frac{\pi}{3}\right) \right\}$

$= i \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\, i}{2}$.

4. 方程式 $\cos z = 2$ の解を次の手順で求めよ。

(a) $z = x + iy$ として $\cos z = 2$ を書き下し、実部・虚部を両辺で比較することで

$$\cos x \cosh y = \cancel{1}\ 2, \qquad \sin x \sinh y = 0$$

を導出する。

(b) 上式の一般解を求める。

(a) $z = x + iy \ (x, y \in \mathbb{R})$ とすると

$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix-y} + e^{-ix+y}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)\right]$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right)}_{= \cosh y} \cos x + i \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{-y} - e^{y}\right)}_{= -\sinh y} \sin x = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

これが 2 に等しいので $\cos x \cosh y = 2$, ① $\sin x \sinh y = 0$ ② を得る。

(b) 式②が満たされるのは

$\begin{cases} \sin x = 0 \iff x = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ \sinh y = 0 \iff y = 0 \end{cases}$ のどちらかのとき。

$y = 0$ のとき、① $\Rightarrow \cos x = 2$ となり、解なし。

$x = n\pi$ のとき、$\cos x = \cos n\pi = (-1)^n$. ①の左辺が正になるためには n は偶数であることが必要。

$\therefore x = 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$.

このとき ① $\iff \cos(2n\pi)\cosh y = \cosh y = \frac{1}{2}\left(e^{y} + e^{-y}\right) = 2$

$\iff e^{2y} - 4e^{y} + 1 = 0 \iff e^{y} = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{4^2 - 4}\right) = 2 \pm \sqrt{3}$.

$\therefore y = \log(2 \pm \sqrt{3})$

$\therefore z = 2n\pi + i \log(2 \pm \sqrt{3}) \quad (n \in \mathbb{Z})$