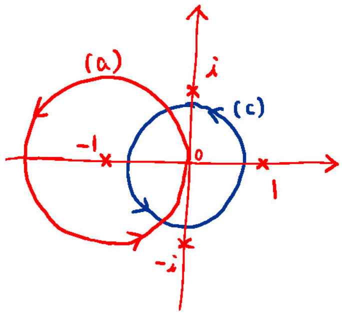
学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜２限]　第６回 (5/23)

1. まず、$\dfrac{z^2}{z^4-1}$ を $\dfrac{z^2}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$ (a,b,c,d は定数) の形に因数分解せよ。

   その関数を次の円に沿って反時計回りに積分せよ。

   (a) $|z+1|=1$　　　　(b) $|z|=0.9$



$$\frac{z^2}{z^4-1}=\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2-1)}=\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)}$$

[$z=\pm 1, \pm i$ で解析的でない。その他の点では解析的]

(a) 円 $|z+1|=1$ の内部では、$z+1$ だけがゼロになる。
よって、コーシーの積分公式より

$$\oint_{(a)}\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)}dz=\oint_{(a)}\frac{\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z-1)}}{z+1}dz$$

$$=2\pi i\times\left.\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z-1)}\right|_{z=-1}=2\pi i\times\frac{(-1)^2}{(-1+i)(-1-i)(-1-1)}=\frac{2\pi i}{\underbrace{[(-1)^2-i^2]}_{1+1=2}(-2)}=-\frac{\pi i}{2}$$

(b) 円 $|z|=0.9$ 内で $\dfrac{z^2}{z^4-1}$ は解析的である。
したがって、コーシーの積分定理より

$$\oint_{(b)}\frac{z^2}{z^4-1}dz=0.$$

2. 単位円に沿って反時計回りに次の関数を積分せよ。

   (a) $\dfrac{z^3}{2z-i}$　　　　(b) $\dfrac{e^{-z}\sin z}{z^2}$

(a) $$\oint_{|z|=1}\frac{z^3}{2z-i}dz=\frac{1}{2}\oint\frac{z^3}{z-\frac{i}{2}}dz=\frac{2\pi i}{2}\left.z^3\right|_{z=\frac{i}{2}}=\frac{2\pi i}{2}\left(\frac{i}{2}\right)^3=\underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}.$$

コーシーの積分公式
$$\oint\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\,f(z_0)$$

(b) $$\oint_{|z|=1}\frac{e^{-z}\sin z}{z^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left.(e^{-z}\sin z)'\right|_{z=0}$$

$$=2\pi i\left.(-e^{-z}\sin z+e^{-z}\cos z)\right|_{z=0}$$

$$=2\pi i(-e^{-0}\underbrace{\sin 0}_{0}+\underbrace{e^{-0}}_{1}\underbrace{\cos 0}_{1})$$

$$=\underline{\underline{2\pi i.}}$$