学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜２限]　第8回 (6/13)

1. 次の関数を与えられた点 $z = z_0$ の周りで最初の第３項目までテイラー展開し、級数の収束半径を述べよ。

(a) $\cos 2z^2,\ z_0 = 0$

$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots$

$z \mapsto 2z^2$ と置き換えて

$\cos 2z^2 = 1 - \frac{1}{2!}(2z^2)^2 + \frac{1}{4!}(2z^2)^4 + \cdots$

$= 1 - 2z^4 + \frac{2}{3}z^8 + \cdots$

収束半径は無限大である.

(b) $\dfrac{1}{1-z^4},\ z_0 = 0$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$

$z \mapsto z^4$ と置き換えて

$\frac{1}{1-z^4} = 1 + z^4 + z^8 + \cdots$

$\frac{1}{1-z^4}$ の特異点は $z^4 = 1$ $(z = \pm 1, \pm i)$ に存在し、収束半径は点 $z = z_0 = 0$ からそれらの点までの距離である 1 となる.

(c) $\cos \pi z,\ z_0 = \dfrac{1}{2}$

テイラー展開の定義式 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$ を使う.

$f(z) = \cos \pi z,\ z_0 = \frac{1}{2}$ として

$f(z_0) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$f'(z_0) = -\pi \sin \pi z \big|_{z=\frac{1}{2}} = -\pi \sin \frac{\pi}{2} = -\pi$

$f''(z_0) = -\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0,\ f'''(z_0) = +\pi^3 \sin \frac{\pi}{2} = \pi^3$

$f^{(4)}(z_0) = \pi^4 \cos \frac{\pi}{2} = 0,\ f^{(5)}(z_0) = -\pi^5 \sin \frac{\pi}{2} = -\pi^5$

$\therefore \cos \pi z = -\pi(z - \frac{1}{2}) + \frac{\pi^3}{3!}(z - \frac{1}{2})^3 - \frac{\pi^5}{5!}(z - \frac{1}{2})^5 + \cdots$

収束半径 $R = \infty$.

(d) $\mathrm{Ln}\, z,\ z_0 = i$

$f(z) = \mathrm{Ln}\, z,\ z_0 = i$ として

$f(z_0) = \mathrm{Ln}\, i = \frac{\pi}{2} i$

$f'(z_0) = (\mathrm{Ln}\, z)' \big|_{z=i} = \frac{1}{i} = -i$

$f''(z_0) = (\mathrm{Ln}\, z)'' \big|_{z=i} = -\frac{1}{z^2}\big|_{z=i} = +1$

$\therefore \mathrm{Ln}\, z = \frac{\pi}{2} i - i(z-i) + (z-i)^2 + \cdots$

$\mathrm{Ln}\, z$ の特異点は $z = 0$ に存在するので、収束半径は $z = z_0 = i$ から $z = 0$ までの距離である 1 である.

2. 下記の手順に従って、誤差関数 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\, z \equiv \displaystyle\int_0^z e^{-t^2} dt$ を $z = 0$ の周りで最初の第３項目までテイラー展開せよ。また、その収束半径を述べよ。

(※ 得られた式に $z = 1$ を代入した値は、正しい値と相対誤差 3% で一致する。sqrt(pi)/2 erf(1) と google 検索すると真値を確認可能。)

(a) e^{-t^2} を $t = 0$ の周りで最初の第３項目までテイラー展開する。

(b) 得られた展開式を t について積分 $(\int_0^z dt)$ し、$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\, z \equiv \int_0^z e^{-t^2} dt$ の展開形を得る。

(c) 収束半径は積分する前の関数 e^{-t^2} の収束半径と同じだが、その大きさはどれだけか。

(a) $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \cdots$

(b) $\int_0^z e^{-t^2} dt = \int_0^z dt \left(1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \cdots\right) = \underline{z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{10}z^5 - \cdots}$ (*)

(c) 収束半径は無限大である.

(※ 式(*)の $z=1$ における値は $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{23}{30} = \frac{1}{10} \times \frac{23}{3} = 0.1 \times (7 + \frac{2}{3}) = 0.76666\cdots$
これと真の値 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(1) = 0.746824\cdots$ との相対誤差は 2.7% 程度である.)