学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜２限]　第９回 (6/20)

1. 次の関数を与えられた点 $z = z_0$ の周りで最初の第３項目までテイラー展開し、級数の収束半径を述べよ。

(a) $\sin 2z^2,\ z_0 = 0$

$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots$

$\therefore \sin 2z^2 = 2z^2 - \frac{1}{3!}(2z^2)^3 + \frac{1}{5!}(2z^2)^5 + \cdots$

$= 2z^2 - \frac{1}{3\cdot\cancel{2}\cdot 1}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}z^6 + \frac{1}{5\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}\cdot 1}\overset{2}{\cancel{2^5}}z^{10} + \cdots$

$= 2z^2 - \frac{4}{3}z^6 + \frac{4}{15}z^{10} + \cdots$

収束半径 $R = \infty$.

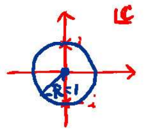
(b) $\dfrac{1}{1+z^2},\ z_0 = 0$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$

$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)}$

$= 1 + (-z^2) + (-z^2)^2 + \cdots$

$= 1 - z^2 + z^4 - \cdots$



$\frac{1}{1+z^2}$ は $z = \pm i$ に特異点を持つ.

$\therefore$ 収束半径は、展開の中心点 $z=0$ から 特異点 $z=\pm i$ までの距離である 1 となる.

(c) $e^z,\ z_0 = \dfrac{1}{2}$

定義通りテイラー展開する

$e^z = e^{\frac{1}{2}} + (e^z)'\big|_{z=\frac{1}{2}}(z-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2}(e^z)''\big|_{z=\frac{1}{2}}(z-\tfrac{1}{2})^2 + \cdots$

$= e^{\frac{1}{2}} + e^z\big|_{z=\frac{1}{2}}(z-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2}e^z\big|_{z=\frac{1}{2}}(z-\tfrac{1}{2})^2 + \cdots$

$= e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}}(z-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}(z-\tfrac{1}{2})^2 + \cdots$

$R = \infty$.

(d) $\mathrm{Ln}\, z,\ z_0 = -i$

定義通り展開する

$\mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Ln}(-i) + (\mathrm{Ln}\, z)'\big|_{z=-i}(z+i) + \frac{1}{2}(\mathrm{Ln}\, z)''\big|_{z=-i}(z+i)^2 + \cdots$

$= \overset{=0}{\ln|-i|} + i\overset{=-\frac{\pi}{2}}{\arg(-i)} + \frac{1}{z}\big|_{z=-i}(z+i) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z^2}\right)\big|_{z=-i}(z+i)^2 + \cdots$

$= -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{i}(z+i) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{-1}\right)(z+i)^2 + \cdots$

$= -\frac{\pi i}{2} + i(z+i) + \frac{1}{2}(z+i) + \cdots$

$\mathrm{Ln}\, z$ は $z=0$ に特異点を持つ.

$\therefore R = |0-(-i)| = 1$.

(e) $\dfrac{2}{z+2},\ z_0 = 0$

$= \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}$

$= 1 + \left(-\frac{z}{2}\right) + \left(-\frac{z}{2}\right)^2 + \cdots$

$= 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \cdots$

$\frac{2}{z+2}$ は $z = -2$ に特異点を持つ.

$\therefore R = |-2-0| = 2$.

2. 次の関数を与えられた点 $z = z_0$ の周りで最初の第 3 項目までローラン展開せよ。

(a) $\dfrac{1}{z}e^z,\ z_0 = 0$

$$\frac{1}{z}e^z = \frac{1}{z}\left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{2}z + \cdots$$

(b) $\dfrac{1}{z^2}\,\mathrm{Ln}(1+z),\ z_0 = 0$

$$\frac{1}{z^2}\,\mathrm{Ln}(1+z) = \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}z - \cdots$$

(c) $\dfrac{1}{z(z-i)}, z_0 = 0$

$$\frac{1}{z(z-i)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-i}$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(-i)\left(1 + \frac{z}{-i}\right)}$$

$$= \frac{1}{-i}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(-iz)}$$

$$= \frac{i}{z}\left(1 - iz + (-iz)^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{i}{z}\left(1 - iz - z^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{i}{z} + 1 - iz + \cdots$$

(d) $\dfrac{1}{z(z-i)}, z_0 = i$

$$\frac{1}{z(z-i)} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z}$$

$$= \frac{1}{z-i}\left[\frac{1}{i} + \left(\frac{1}{z}\right)'\bigg|_{z=i}(z-i) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right)''\bigg|_{z=i}(z-i)^2\right]$$

$$= \frac{1}{z-i}\left(-i - \frac{1}{z^2}\bigg|_{z=i}(z-i) + \frac{1}{2}\left(+\frac{2}{z^3}\right)\bigg|_{z=i}(z-i)^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{-i}{z-i} + 1 + i(z-i) + \cdots$$