

第 11 回 水面の波：浅水波

これまでの講義では、圧縮性流体の密度変化が音速で伝わる音波について解説してきた。今回は再び非圧縮性の（完全）流体に注目し、その表面に伝わる波について解説する。普通の水が大気に接している場合について、その水面を伝わる波について調べるとしてもよい。

水面を伝わる波は、波の波長と水面から水底までの距離（水深）のどちらが長いかによってその性質が大きく異なる。今回は、波の波長に比べて水深が短い場合（浅水波と呼ぶ）について解説する。浅い水路を伝わる波や、波打ち際の浅瀬の波などがこの浅水波におおよそ対応する。

11.1 設定

以下の設定を考える。図 (18) 参照。

- 流体は非圧縮的で、密度 ρ は一定である。
- x 方向に伸びる深さ h_0 の水路があり、波がないときの水面が $z = 0$ 、水底が $z = -h_0$ にある。
- x, z 方向の流体の動きだけを考え、 y 方向には流体は常に一様である。すなわち

$$\mathbf{v}(t, x, z) = (v_x(t, x, z), 0, v_z(t, x, z)) . \quad (11.1)$$

- 波によって水面の位置は $z = 0$ から $z = h(t, x)$ にずれる。
- 微小な波を考える。すなわち、 $v_x, v_z, h(t, x)$ はどれも微小である。
- 水底と流体は摩擦なく滑る。そのため、水底 $z = -h$ では $v_z = 0$ となる一方 v_x は制限されず

$$\mathbf{v}(t, x, z = -h) = (v_x(t, x, -h), 0, 0) . \quad (11.2)$$

- 水面における圧力は大気圧 P_0 に等しく、いたるところで $P(t, x, z = h(t, x)) = P_0$ (定数)。
- 流体全体に下向きの重力がかかっている。すなわち、単位体積あたり $\rho \mathbf{g}$ ($\mathbf{g} = (0, 0, -g)$) の力が流体にかかり、この項がオイラーの方程式の右辺に入る。

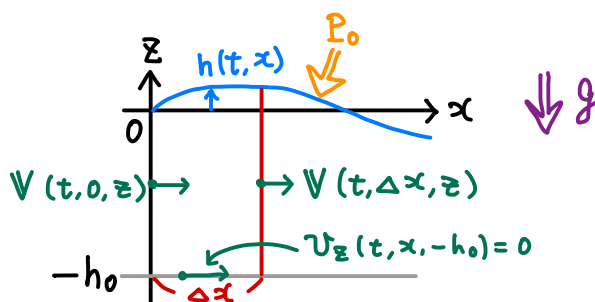


図 18: x 方向に伸びる水路の水面の波。水底で $v_z = 0$ となる。下向きに重力 g がかかっており、また水面 $z = h(t, x)$ の位置での圧力はいたるところ大気圧 P_0 に等しい。

11.2 波動方程式の導出

音波についての波動方程式を導出した場合と同様に、流体の基礎方程式である連続の式とオイラーの方程式を使って、水面の波が従う方程式を導出する。

[流体柱] 流体の $x = 0 \sim \Delta x, y = 0 \sim \Delta y$ の部分を考える。この領域は十分微小であるとして、水面の高さ $z = h(t, x)$ を $x = 0$ における値で近似する:

$$z = h(t, x) = h(t, 0) + \frac{\partial h}{\partial x}(t, 0)x + \dots = \underbrace{h(t, 0)}_{\equiv h(t)} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (11.3)$$

以下では $h(t, x = 0)$ を単に $h(t)$ と書くことにする。

11.2.1 連続の式

連続の式を直接考える代わりに、先ほど導入した流体柱の質量 $M(t)$ がどのように時間変化するかを考えてみる。まず、今回の設定では流体中の質量 $M(t)$ は

$$M(t) = \Delta y \times \int_0^{\Delta x} dx \int_{-h}^{h(t)} dz \rho = \rho (h_0 + h(t)) \Delta x \Delta y. \quad (11.4)$$

この $M(t)$ は、 $x = 0$ および $x = \Delta x$ の位置での流体の流入・流出により変化する。この流入量は $x = 0, \Delta x$ での (流速)×(密度) を高さ $z \in [-h_0, h(t)]$ と横幅 Δy にわたって積分すると得られる:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \rho \Delta y \int_{-h_0}^{h(t)} \left[\underbrace{v_x(t, x = 0, z)}_{\text{流入}} - \underbrace{v_x(t, x = \Delta x, z)}_{\text{流出}} \right] dz. \quad (11.5)$$

ここで、水深が浅い場合には、 v_x はどの高さ z でもほぼ一定であるという近似を使う。すなわち、 x 方向の速度 $v_x(t, x, z)$ について

$$v_x(t, x, z) = v_x(t, x, z = 0) + \frac{\partial v_x}{\partial z}(t, x, z = 0)\Delta z + \dots \simeq v_x(t, x, z = 0) \quad (11.6)$$

と、右辺第二項 (赤字部分) を第一項 $v_x(t, x, 0)$ に対して無視する³⁷。このようにすると、 $M(t)$ の変化の式 (11.5) は

$$\frac{1}{\rho \Delta y} \frac{dM(t)}{dt} = \int_{-h_0}^{h(t)} [v_x(t, x = 0, z) - v_x(t, x = \Delta x, z)] dz \quad (11.7)$$

$$\simeq \int_{-h_0}^{h(t)} [v_x(t, 0, 0) - v_x(t, \Delta x, 0)] dz \quad (11.8)$$

$$= [v_x(t, 0, 0) - v_x(t, \Delta x, 0)] \times (h_0 + h(t)). \quad (11.9)$$

さらに、 $v_x(t, \Delta x, 0)$ を微小量 Δx についてテイラー展開すると

$$[v_x(t, 0, 0) - v_x(t, \Delta x, 0)] (h_0 + h(t)) = \left[\cancel{v_x(t, 0, 0)} - \left(\cancel{v_x(t, 0, 0)} + \frac{\partial v_x}{\partial x}(t, 0, 0) \Delta x + \dots \right) \right] (h_0 + h(t)) \quad (11.10)$$

$$= -\frac{\partial v_x}{\partial x}(t, 0, 0) \times (h_0 \Delta x + \cancel{h(t) \Delta x}) + \dots. \quad (11.11)$$

$h_0 \Delta x$ (一次の微小量) に対して $h(t) \Delta x$ は二次の微小量となるので無視した。結局、流体中の質量 $M(t)$ の変化の式 (11.5) は

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x}(t, 0, 0) h_0 \Delta x \Delta y. \quad (11.12)$$

ここで、 $M(t)$ が式 (11.4) と与えられていたことを思い出すと、式 (11.12) は

$$\frac{dM(t)}{dt} = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x}(t, 0, 0) h_0 \Delta x \Delta y \quad \therefore \quad \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -h_0 \frac{\partial v_x}{\partial x}(t, 0, 0) \quad (11.13)$$

となり、水面の高さ $h(t)$ の時間変化を表す式が得られた。

³⁷ この近似の妥当性をきちんと示すには、この近似を使わない場合の流体の流れを求めたうえで、深さ h_0 が波の波長に比べて十分小さい場合に $v_x(t, x, z) \simeq v_x(t, x, 0)$ となることを示す必要がある。本講義では導出を省略するが、このようなステップを踏むとたしかに $v_x(t, x, z) \simeq v_x(t, x, 0)$ となっていることが示される。詳細については巽友正著「流体力学」(培風館)などを参照のこと。

11.2.2 オイラーの方程式

今回の設定におけるオイラーの方程式は、二次の微小量となる $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ 項を無視すると

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \cancel{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}} \right) \simeq \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \rho \mathbf{g}. \quad (11.14)$$

ここで、流体の流れに伴い、圧力も波がない場合の値 $\bar{P}(z)$ から微小に変化する：

$$P(t, x, z) = \bar{P}(z) + \Delta P(t, x, z). \quad (11.15)$$

波がない場合には流体は静水圧平衡の状態にあり、その圧力 $\bar{P}(z)$ は高さ z だけに依存する。

式 (11.14) の x, y, z 各成分を書き下すと

$$x: \quad \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{P}(z) + \Delta P(t, x, z)) = -\frac{\partial \Delta P}{\partial x} \quad (11.16)$$

$$y: \quad \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} (\bar{P}(z) + \Delta P(t, x, z)) = 0 \quad (11.17)$$

$$z: \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} (\bar{P}(z) + \Delta P(t, x, z)) - \rho g = -\frac{d\bar{P}(z)}{dz} - \frac{\partial \Delta P}{\partial z} - \rho g \quad (11.18)$$

y 成分の式 (11.17) は、今回の場合 $v_y = 0$ なので自明に満たされる。また、 z 成分の式 (11.18) は、波がない場合にも存在する 0 次の項 (青字部分) と、波によって生じた 1 次の微小量の項 (赤字部分) のそれぞれが個別に満たされる：

$$0 \text{ 次: } \quad \frac{d\bar{P}(z)}{dz} = -\rho g \quad (11.19)$$

$$1 \text{ 次: } \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta P}{\partial z}. \quad (11.20)$$

- z 成分の 0 次: 式 (11.19) は波のない状態の流体についての式で、圧力 $\bar{P}(z)$ は z だけの関数となり t, x には依存しないことに注意する。この式を z について積分すると

$$\bar{P}(z) = C - \rho g z \quad (C: \text{定数}). \quad (11.21)$$

波がない状態では、水面はいたるところ $z = 0$ の位置にあり、その地点における圧力は大気圧 P_0 に等しくなる。すなわち

$$\bar{P}(z) = P_0 - \rho g z. \quad (11.22)$$

式 (11.22) を踏まえて、圧力 P の表式 (11.15) を改めて書き下すと

$$P(t, x, z) = \bar{P}(z) + \Delta P(t, x, z) = P_0 - \rho g z + \Delta P(t, x, z). \quad (11.23)$$

この圧力 $P(t, x, z)$ は、水面の位置 $z = h(t, x)$ の位置で大気圧 P_0 に等しくなる。この条件から ΔP が満たすべき式を書き下すと

$$P(t, x, h(t, x)) = P_0 - \rho g h(t, x) + \Delta P(t, x, h(t, x)) = P_0 \quad (11.24)$$

$$\therefore \underbrace{\Delta P(t, x, h(t, x))}_{=\Delta P(t, x, 0) + \mathcal{O}(h(t, x))} = \rho g h(t, x). \quad (11.25)$$

今回の設定では水面のずれ $h(t, x)$ は微小だとしているので、この式の左辺で $z = h(t, x) \rightarrow 0$ とした式が近似的に成立して

$$\Delta P(t, x, 0) \simeq \rho g h(t, x). \quad (11.26)$$

- x 成分: 引き続いて、式 (11.16) を $z = 0$ で評価する。 ΔP の式 (11.26) を代入すると

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t}(t, x, 0) = -\frac{\partial \Delta P}{\partial x}(t, x, 0) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x}(t, x) \quad \therefore \quad \frac{\partial v_x}{\partial t}(t, x, 0) = -g \frac{\partial h}{\partial x}(t, x). \quad (11.27)$$

この式は v_x の時間変化を h によって与える式で、 h の時間変化を v_x で与える式 (11.13) と対になるものである。これら 2 つの式から水面の位置 $h(t, x)$ の運動を定める波動方程式を後ほど導出する。

なお、 z 成分の 1 次の式 (11.20) については 11.4 節で再訪する。

11.2.3 波動方程式の導出

連続の式とオイラーの方程式から得られた $h(t, x)$, $v_x(t, x, z = 0)$ についての方程式をまとめると

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = -h_0 \frac{\partial v_x}{\partial x}(t, x, 0), \quad \frac{\partial v_x}{\partial t}(t, x, 0) = -g \frac{\partial h}{\partial x}(t, x). \quad (11.28)$$

連続の式から得られた第一式 (11.13) は位置を $x = 0$ に固定して導出したが、注目する位置をどの x に変更しても同じ式が得られるので、第一式で h, v_x の x 依存性を復活させて書き表している。

音波の場合と同様、式 (11.28) を変形することで $h(t, x)$ (ないし $v_x(t, x, 0)$) についての波動方程式を導出できる。第一式について時間微分 $\partial/\partial t$ をとり、第二式をつかって整理すると

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -h_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_x}{\partial x}}_{= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial t}} = -h_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \frac{\partial h}{\partial x} \right) = gh_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (11.29)$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h = 0 \quad (c^2 \equiv gh_0). \quad (11.30)$$

式 (11.30) は波面の位置 $h(t, x)$ についての波動方程式であり、その一般解は速度 $c = \sqrt{gh_0}$ で x 軸方向に伝搬する波動解で与えられる：

$$h(t, x) = f(ct - x) + g(ct + x) \quad (f(y), g(y) : y \text{ の任意関数}). \quad (11.31)$$

この解があらわす波動は速度 $c = \sqrt{gh_0}$ で伝搬する。浅水波の速さは水底が深いほど速く $c \propto \sqrt{h_0}$ となる、というのが特徴である。

11.3 波の変形

浅水波の伝搬速度 $c = \sqrt{gh_0}$ は水底の深さ h_0 が深くなるほど大きくなる。この性質を踏まえて、波打ち際 (波が進行するにつれて水底が浅くなる場合) について考えてみることにする。なお、今回は水底の深さ h_0 は一定であるとして導出したが、深さがゆっくりと変化する場合にも同様の結果 ($c = \sqrt{gh_0}$) が成立すると仮定して話を進める。

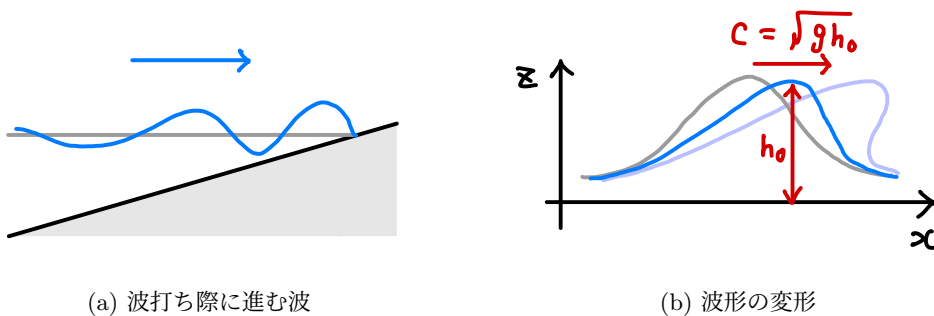


図 19: (a) 波打ち際に進む波の変形の概念図。波打ち際に近づくにつれて、波長が短くなり、振幅は大きくなる。(b) 波の速さ $c = \sqrt{gh_0}$ の深さ h_0 への依存性からくる波形の変形。波の先端部分は水底までの距離が長いので進行速度も大きくなり、そのために波形は寄り切り立った形状へ変形する (図中の灰色線→青線)。最終的には多価関数のような波形となるが (図中の薄青線)、そうなる前に波は自重で崩れることになる。

- 波が沖合から波打ち際に近づくにつれて、水深 h_0 は徐々に浅くなる。これに対応して、波の速度 $c = \sqrt{gh_0}$ は徐々に遅くなる。

- 波の速度が遅くなるにつれて、波同士の間隔（1周期の長さ）は短くなり、振幅は大きくなる。図 19a 参照。なお、振幅が水底までの距離 h_0 と同程度に大きくなると、今回の講義で行った摂動解析は破綻する。
- 波の先端（高い位置の部分）は、水底までの距離（＝「深さ」）がより長い。波の速度は深さ h_0 が大きいほど速いので、波の先端は波の下部に比べて速く進むことになる。そのため、波の波形は進行方向寄りに切り立った形状に変化していく。図 19b 参照。
- 波形の変形が進むと最終的には波の先端が波の下部よりも前方に突き出た多価関数のような形状になる。実際には、ここまで変形する前に、波が自重を支えきれずに崩れることになる。波打ち際で波が崩れて白い波飛沫を上げるのはこれが原因の一つ。

11.4 正弦波

波動方程式の解 (11.31) の任意関数 f, g を適切に選ぶことで、一方向に進む**正弦波**を表す解を作ることできる。

[波面の位置 $h(t, x, z)$] 定常波の例として、振動数 ω , 波数 k を持つ波で $x = 0$ に節を持つものと考え

$$h(t, x) = A \sin(\omega t + kx) . \quad (11.32)$$

この $h(t, x)$ も波動方程式 (11.30) を満たしている必要があるわけだが、方程式に代入してみると

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A \sin(\omega t + kx) = (-\omega^2 + c^2 k^2) A \sin(\omega t + kx) \quad \therefore \omega = \pm ck \quad (11.33)$$

となり、振動数 ω が波数 k と関係づけられることがわかる。 $\omega = +ck$ を式 (11.32) に代入すると

$$h(t, x) = A \sin[k(ct + x)] \quad (11.34)$$

という定常波を表す解が得られる。なお、 $\omega = -ck$ を使った場合でも、波動の位相が変化するだけで本質的には同じ解が得られる。

[水平方向の速度 $v_x(t, x, z)$] 引き続き、水平方向の速度 $v_x(t, x, z)$ がどう与えられるかを見ておく。式 (11.28) の第二式に $h(t, x)$ の解 (11.34) を代入すると

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}(t, x, 0) = -g \frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = -gkA \cos(\omega t + kx) . \quad (11.35)$$

これを t について積分し、 x 方向の平均速度に相当する積分定数をゼロとおくと

$$v_x(t, x, 0) = -gkA \int dt \cos[k(ct + x)] = -\frac{g}{c} A \sin[k(ct + x)] . \quad (11.36)$$

なお、今回は水深 h_0 が浅いため v_x がどの深さ z でも一定という近似を使っているために、この式は任意の z でも成立する。すなわち

$$v_x(t, x, z) \simeq -\frac{g}{c} A \sin[k(ct + x)] . \quad (11.37)$$

[垂直方向の速度 $v_z(t, x, z)$] 引き続き垂直方向の速度 $v_z(t, x, z)$ について調べるが、結論としては浅水波の場合には v_z は水平方向の速度 v_x に比べて非常に小さくなる。

今回取り扱っている流体は非圧縮的なので、以前 6.3 節でも解説した通り、連続の式から $\text{div } \mathbf{v} = 0$ となることが示される。今回の場合は $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$ となっていることから

$$0 = \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} . \quad (11.38)$$

したがって、定常波 (11.37) がある場合には

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{g}{c} A \sin [k(ct+x)] \right) = \frac{gk}{c} A \cos [k(ct+x)] . \quad (11.39)$$

水底 $z = -h_0$ では $v_z = 0$ であることを踏まえて、この式を z について積分すると

$$v_z(t, x, z) = \int_{-h_0}^z dz' \frac{gk}{c} A \cos [k(ct+x)] = \frac{gk}{c} (z+h_0) A \cos [k(ct+x)] . \quad (11.40)$$

特に、 $|v_z|$ が最大となる水面付近 $z = 0$ で v_x, v_z の振幅を比較すると

$$v_z(t, x, 0) = \frac{gkh_0}{c} A \cos [k(ct+x)] , \quad v_x(t, x, 0) = -\frac{g}{c} A \sin [k(ct+x)] . \quad (11.41)$$

$$\Rightarrow |v_z(t, x, 0)| \sim kh_0 \times |v_x(t, x, 0)| . \quad (11.42)$$

この式の特徴は下記の通り。

- $|v_z|$ の大きさは $|v_x|$ の大きさに係数 kh_0 をかけた程度である。水深 h_0 よりも波長 $\lambda = 1/k$ が長いという今回の設定では $\frac{1}{k} \gg h_0$ となり、そのためこの係数は $kh_0 \ll 1$ となる。そのため $|v_z| \ll |v_x|$ となり、流体はほぼ水平方向 (x 方向) だけに運動する。
- 流体の水面 $z = h(t, x)$ は流体の流れとともに動くので、 $v_z(t, x, h(t, x)) \simeq v_z(t, x, 0)$ は水面の位置 $z = h(t, x)$ の時間微分と一致するべきである。実際、式 (11.42) で求めた $v_z(t, x, 0)$ は、単に定常波解の $h(t, x)$ の式 (11.34) を時間微分したものと一致する：

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} A \sin [k(ct+x)] = kcA \cos [k(ct+x)] = \frac{gkh_0}{c} A \cos [k(ct+x)] = v_z(t, x, 0) . \quad (11.43)$$

なお、計算の途中で $kc = \frac{kc^2}{c} = \frac{gkh_0}{c}$ となることを使った。

[圧力変化 $\Delta P(t, x, z)$ の z 依存性] オイラーの方程式の z 成分のうち、摂動について1次の式 (11.20) に改めて注目する。この式は $v_z(t, x, z)$ によって圧力変化 $\Delta P(t, x, z)$ の z 依存性を $v_z(t, x, z)$ の値に基づいて定める式である。水面 $z = 0$ における $\Delta P(t, x, 0)$ の値は式 (11.26) で求めていたが、そのほかの深さ z でどのような値を取るかを念のため調べておく。結論としては、 ΔP は深さ z に依らずほぼ一定となる。

v_z の表式 (11.40) をオイラーの方程式 z 成分の1次の式 (11.20) に代入すると

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial z} = -\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = +\rho \frac{gk}{c} (z+h_0) kcA \sin [k(ct+x)] \quad \therefore \quad \frac{\partial \Delta P}{\partial z} = \rho gk^2 (z+h_0) A \sin [k(ct+x)] . \quad (11.44)$$

この式を水底 $z = -h_0$ から水面 $z = 0$ まで積分すると、 $\Delta P(t, x, z)$ の水面と水底の各位置における値の差を求めることができる：

$$\Delta P(t, x, 0) - \Delta P(t, x, -h_0) = \int_{-h_0}^0 \frac{\partial \Delta P}{\partial z} dz = \rho gk^2 \left[\frac{1}{2} (z+h_0)^2 \right]_{z=-h_0}^{z=0} A \sin [k(ct+x)] \quad (11.45)$$

$$= \frac{1}{2} \rho g (k^2 h_0^2) A \sin [k(ct+x)] \quad (11.46)$$

この表式には、浅水波については非常に小さくなる係数 $(kh_0)^2 \ll 1$ がかかっていることに注意する。

これに対して、水面 $z = 0$ における ΔP の式 (11.26) は $\Delta P(t, x, 0) = \rho gh = \rho g A \sin [k(ct+x)]$ となるのであった。これと比べると、 ΔP の値の水面・水底間の差は $(kh_0)^2$ 倍小さい。したがって、 $\Delta P(t, x, z)$ は深さ z 全体にわたってほぼ一定で、式 (11.26) で与えられるとみなしてよい。