

第14回 非線形波動

これまでの講義で扱ってきた波動については、振幅などが十分に小さく、高次の微小量が無視できるという近似（線形近似）を使って解析してきた。その結果、波動は線形微分方程式に従い、それを解析的に解くことも比較的容易にできた。今回の講義では、この近似が使えない場合、すなわち**有限振幅の波動**（微小ではない振幅の波動）について解説する⁴³。

波動の非線形性が原因で起こる現象としては**波形の変形**や**衝撃波形成**などがあり、現実的な流体でも実際に起こるような重要なものとなっている。一方、有限振幅の波動が従う微分方程式は密度・流速などの動変数について**非線形**の微分方程式となり、それを解くことも一般には難しくなる。

比較的単純な場合についてはある程度解析的に調べることができるので、以下では最も単純な場合である**一変数の移流方程式**についてまず解説し、同様の解析が流体の運動方程式（連続の式・オイラーの方程式）についても使えることを順次説明する。

14.1 移流方程式

非線形波動を調べるための例として、1方向に伝搬する波動 $\rho(t, x)$ についての**移流方程式**：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (14.1)$$

を考える。この式に含まれる c が定数であれば、この式は線形の移流方程式であり、その一般解は

$$\rho(t, x) = f(ct - x) \quad (f: \text{任意関数}) \quad (14.2)$$

と簡単に求まる。この解は、初期時刻 $t = 0$ における波動が、形を変えないまま x の正の方向に一定の速度 c で移動する様子を表している。

より一般的な場合として、 c が**変数 ρ に依存する関数**になっている場合が考えられる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (14.3)$$

$c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}$ 項は変数 ρ について非線形（ ρ の1次関数でない）なので、この方程式は**非線形の移流方程式**に分類される。

先ほど見たように、 c は波動の伝搬速度と対応している。 c が ρ に依存する場合には、**波動の振幅に応じて伝搬速度が変化すると期待**できる。しかし、式(14.2)で $c \rightarrow c(\rho)$ と単純に置き換えたものは解になっておらず、少し工夫しないとこの方程式を解くことはできない。

[**移流方程式の線形化**] 非線形の移流方程式(14.3)についても、振幅が微小な場合には伝搬速度が一定の式(14.1)を得ることができる。 $\rho(t, x) = \rho_0 + \delta\rho(t, x)$ (ρ_0 : 定数)を式(14.3)に代入し、 $c(\rho)$ を

$$c(\rho) = c(\rho_0) + \frac{dc}{d\rho}(\rho_0)\delta\rho + \dots \quad (14.4)$$

とテイラー展開した上で、式(14.3)中で $\delta\rho$ の二次以上となる高次項を無視すると

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + c(\rho_0) \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} = 0 \quad (14.5)$$

となる。 $c(\rho_0)$ は定数なので、線形の移流方程式(14.1)と同じ形の方程式となっている。

⁴³非線形波動については非常に多くの話題があり、今回の講義ではそのごく一部分しか開設できない。より詳細については G. B. Whitham “Linear and Nonlinear Waves” (John Wiley & Sons), 巽友正「流体力学」(裳華房)などの資料を参照のこと。

[移流方程式の例] 移流方程式は一方向に何かが流れる現象を記述する方程式で、現実の様々な現象を再現しうるものである。流体・波動のうちある一方向に伝搬する成分だけに注目した場合のほか、交通流（ ρ が車の密度。 ρ が大きく渋滞している場合には速度 $c(\rho)$ が下がる）、氷河の運動（ ρ が氷河の厚みで、厚い箇所ほど流れる速度 $c(\rho)$ が上がる）など、様々な現象がこのタイプの方程式でモデル化できる。また、流体の運動方程式からもこの型の方程式が出てくることを後ほど示す。

14.2 特性曲線法

非線形の移流方程式 (14.3) を解くための手法が、**各流体素辺が描く軌道**に注目することで方程式を単純化する**特性曲線法**である。 $c(\rho)$ は波動の伝搬速度に対応する、という前節で説明した期待を踏まえ、

$$\frac{dx(t)}{dt} = c(\rho(t, x(t))) \quad (14.6)$$

を満たす曲線 $x = x(t)$ を導入し、これを**特性曲線**と呼ぶ。 $\rho(t, x)$ は時間・空間に依存するため、伝搬速度 $c(\rho)$ も場所によって異なる値をとる。特性曲線は、各地点を速度 $c(\rho(t, x))$ で移動する点が描く軌道である。

特性曲線の定義式 (14.6) を移流方程式 (14.3) に代入して変形すると

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{dx(t)}{dt} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} = \frac{d\rho(t, x(t))}{dt} \quad (14.7)$$

$$\therefore \frac{d\rho(t, x(t))}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(t, x(t)) = (\text{定数}) . \quad (14.8)$$

この式は、**特性曲線 $x = x(t)$ に沿って $\rho(t, x)$ の値は変化しない**ことを意味する。さらに、特性曲線の傾き $c(\rho)$ は ρ の値だけで決まるのだから、 ρ が一定ということは**特性曲線は傾き $c(\rho)$ が一定の直線**となる。ただし、ある一本の特性曲線上では傾き $c(\rho)$ が一定となるが、この傾きは各地点から延びる特性曲線ごとに異なっていてよい。

この**特性曲線法**で波動 $\rho(t, x)$ の時間発展を決める手順は下記の通り。

1. 初期時刻 $t = 0$ の波形を $\rho(t = 0, x) = \rho_0(x)$ と与える。
2. $t = 0$ 面の各地点 $x = \xi$ から傾きが $c(\rho(t = 0, \xi)) = c(\rho_0(\xi))$ の直線（特性曲線）

$$x = \xi + c(\rho_0(\xi))t \quad (14.9)$$

を (t, x) 空間に伸ばす。起点の位置 $x = \xi$ ごとに異なる特性曲線が得られ、 ξ を動かしていくことで (t, x) 平面が特性曲線の族で埋まることになる。

3. 各特性曲線に沿って、 ρ の値は初期時刻 $t = 0$ での値 $\rho(t = 0, x = \xi) = \rho_0(\xi)$ のままで一定となる。したがって、時刻 t における波動 $\rho(t, x)$ の分布は、各特性曲線の位置 $x = \xi + c(\rho_0(\xi))t$ と、その特性曲線についての ρ の値 $\rho = \rho_0(\xi)$ から再現できる。すなわち、

$$\rho(t, x = \xi + c(\rho_0(\xi))t) = \rho_0(\xi) . \quad (14.10)$$

各時刻 t について $-\infty < \xi < \infty$ を動かしていけば、各位置 $x = \xi + c(\rho_0(\xi))t$ における $\rho(t, x)$ の値がこの式より得られる。

[具体例： $c = (\text{定数})$ の場合] 式 (14.1) のように伝搬速度 c が ρ に依らない定数の場合、特性曲線は

$$x = \xi + ct \quad (14.11)$$

で与えられる平行な直線群となる。図 26 参照。初期時刻における波形 $\rho(t = 0, x) = \rho_0(x)$ が特性曲線に沿って移動するので、時刻 t における波形は初期波形 $\rho(x)$ を平行移動したもので与えられる：

$$\rho(t, x = \xi + ct) = \rho_0(\xi) . \quad (14.12)$$

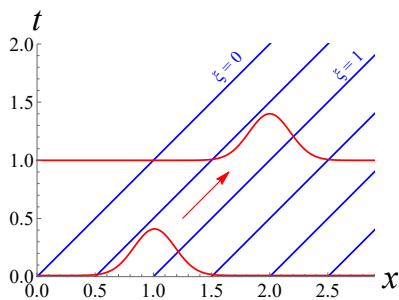


図 26: $c = 1$ (定数) の場合の特性曲線 (青線) と波動 $\rho(t, x)$ の伝搬 (赤線)。特性曲線は傾き 1 の直線群で、 $\rho(t, x)$ は初期波形が速度 1 で平行移動したもので与えられる。各特性曲線上で ξ の値は一定で、その特性曲線の $t = 0$ における x の位置がその値となる。

[具体例: $c(\rho) = \rho$ の場合] 式 (14.3) のように伝搬速度 c が波動の値 ρ に依存して変化する場合の簡単な例として、伝搬速度が ρ に等しい場合 $c(\rho) = \rho$ を考える。この場合の特性曲線と $\rho(t, x)$ の値は (図 27 参照)

$$x = \xi + \rho_0(\xi)t, \quad \rho(t, x = \xi + \rho_0(\xi)t) = \rho_0(\xi). \quad (14.13)$$

ρ の値が大きい点ほど移動速度 ($c(\rho) = \rho$) が大きいので、波動の山の頂点付近が最も速く進む。この効果のため、時間とともに波形は変形し、最終的には多価関数状の形状となる。特性曲線の傾き ($c(\rho) = \rho_0(\xi)$) は起点の位置 $x = \xi$ ごとに異なり、そのために特性曲線同士の間隔が場所によって変化することがこの波形の変形と対応している。

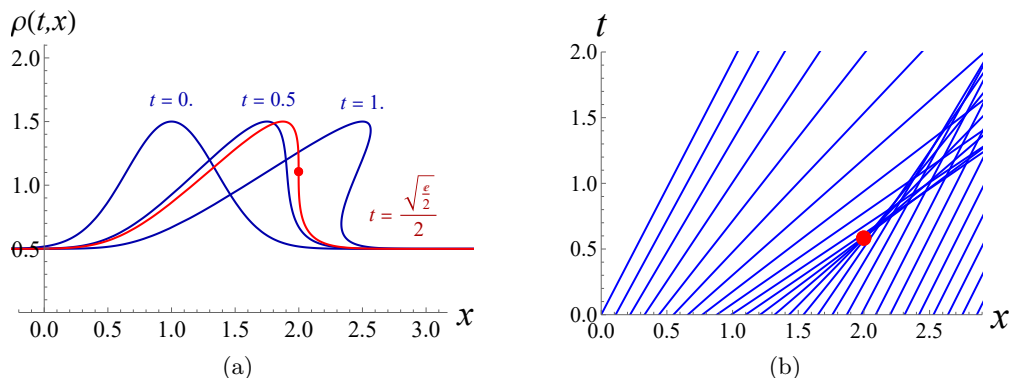


図 27: (a) $c(\rho) = \rho$, $\rho_0(x) = \frac{1}{2} + e^{-\left(\frac{x-1}{1/2}\right)^2}$ の場合の波動伝搬。時刻 $t = 0$ における初期波形から時間経過とともに波形が変形する。時刻 $t = \sqrt{e/8}$ で波形の傾き $\partial\rho/\partial x$ が無限大になる点が表れ (赤線)、その後の時刻では $\rho(t, x)$ は x の多価関数となる。(b) この場合の特性曲線。各特性曲線の傾きは初期時刻 $t = 0$ における波形 $\rho = \rho_0(x)$ の大きさに等しい。波形のピーク付近で傾き (伝搬速度) が大きくなるため、その右側の領域で特性曲線の間隔が狭くなる。時刻 $t = \sqrt{e/8} \simeq 0.58$ 以降には特性曲線同士が交わる領域 (赤点とその右上の領域) が生じる。これが図 (a) で見られる $\rho(t, x)$ が x の多価関数に変形する現象と対応している。

14.3 衝撃波形成

移流方程式 (14.3) に従う $\rho(t, x)$ を前節で求めたが、その性質をもう少し詳しく調べてみる。特に、伝搬速度 c が振幅 ρ に依存する場合は、図 27 で見た通り波形が切り立った形状に変形するという現

象が見られた。この現象について解析を行う。

前節で説明した通り、各特性曲線上で ξ の値は一定（その特性曲線の $t = 0$ における位置 x の値が ξ ）となる。逆に、 (t, x) 空間のある点に対して、その点を通る特性曲線とそれに付随する ξ を対応付けることができる。この対応関係に基づくと、 ξ を (t, x) の関数とみなせる。その定義式は式 (14.9):

$$x = \xi + c(\rho_0(\xi))t \equiv \xi + c(\xi)t \quad (14.14)$$

で、ある (t, x) の値に対する ξ の値はこの式を満たすように定められる。ただし、以下の解析を簡単化するため $c(\xi) \equiv c(\rho_0(\xi))$ と再定義した。

後ほど必要になるので、式 (14.14) から $\xi(t, x)$ の t, x 微分を求めておく。 ξ が (t, x) の関数であると思って式 (14.14) の t, x 微分を計算すると

$$\frac{\partial}{\partial t} (14.14) : 0 = \frac{\partial \xi}{\partial t} + c'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t} t + c(\xi) \quad \therefore \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{c(\xi)}{1 + c'(\xi)t}, \quad (14.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (14.14) : 1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + c'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} t \quad \therefore \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{1 + c'(\xi)t}. \quad (14.16)$$

ただし $c'(\xi) = dc(\xi)/d\xi$.

さらに、各特性曲線上で ρ の値は一定となり、その値は $t = 0$ における初期値 $\rho_0(x)$ で与えられるのだった。ある特性曲線の $t = 0$ における位置が $x = \xi$, という定義を思い出すと

$$\rho(t, x) = \rho_0(\xi(t, x)) \quad (14.17)$$

という関係式が成立することがわかる。式 (14.10) で ξ を (t, x) の関数と思ったものに相当する。この $\rho(t, x)$ の t, x 微分をそれぞれ計算すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho'_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\rho'_0(\xi)c(\xi)}{1 + c'(\xi)t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho'_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\rho'_0(\xi)}{1 + c'(\xi)t}, \quad (14.18)$$

式 (14.18) で求めた $\rho(t, x)$ の微分の分母には $1 + c'(\xi)t$ という因子が入っている。 $c'(\xi) = c'(\rho)\rho'_0(\xi)$ は $c(\rho), \rho_0(\xi)$ の関数形だけで決まる定数である。ここで、 $c'(\xi) < 0$ となっている場合には、分母 $1 + c'(\xi)t$ は有限の時刻

$$1 + c'(\xi)t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{c'(\xi)} \equiv t_s(\xi) \quad (14.19)$$

でゼロになり、そのためこの瞬間に式 (14.18) に示した $\partial\rho/\partial t, \partial\rho/\partial x$ は無限大に発散する。

式 (14.19) に示した時刻 $t_s(\xi) = 1/(-c'(\xi))$ は ξ の関数であるが、ある ξ で $t_x(\xi)$ は最小値を取る。その最小値を $t_s^{(\min)}$ としよう。 $0 < t < t_s^{(\min)}$ の時間帯には、式 (14.18) の分母がゼロとならず ρ の微分が有限となるので、波形はいたるところ滑らかである。時刻 $t = t_s^{(\min)}$ の瞬間の波形 $\rho(t, x)$ は、傾き $\partial\rho/\partial x$ が発散していることに対応して垂直に切り立った形状をとる。なお、この瞬間に対応する点 $(t_*, x = \xi + c(\xi)t_*)$ を書いたのが図 27b の赤点で、それに対応する波形と ρ の微分が発散する点が図 27a の赤線・赤点である。この時刻以降にはさらに波形の変形が進み、多価関数のような折り返しがある波形に変化する。

$\rho(t, x)$ の定義（物理的起源）にもよるが、多くの場合波形 $\rho(x)$ が x の多価関数になることは物理的に許されず、その場合には $\rho(t, x)$ の不連続面（衝撃波）が形成されて伝搬する。上記の $t = t_x^{(\min)}$ は流体・気体における衝撃波形成の瞬間に相当する。衝撃波面が形成後どのように運動するかは式 (14.3) だけからは決まらず、別の解析を行う必要がある。今回の講義では時間の都合上割愛する。

14.4 理想気体の非線形波動

以上では単純な移流方程式 (14.3) について調べてきたが、本講義で主に取り扱ってきた流体の運動方程式（連続の式・オイラーの方程式）も同様の形に変更でき、今回の講義で説明した非線形波動や衝撃波形成などの議論をそれに基づいて行うことができる。

完全流体の連続の式・オイラーの方程式（外力なし）を1次元流の場合に書き下すと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \rho = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (14.20)$$

$$= \frac{dP}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

今回は、理想気体の状態方程式 $P = K\rho^\gamma$ を使うことにする。この場合、音速 $c = \sqrt{dP/d\rho}$ は

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \gamma K \rho^{\gamma-1} \quad (14.21)$$

のように ρ の関数となる。また、式 (14.21) の微分をとると

$$2cdc = \gamma(\gamma-1)K\rho^{\gamma-2}d\rho = (\gamma-1) \frac{c^2}{\rho} d\rho \quad \therefore \frac{2}{\gamma-1} \frac{dc}{c} = \frac{d\rho}{\rho}. \quad (14.22)$$

この式から、

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (14.23)$$

が導かれる。これを使って式 (14.20) の ρ を c で書き換えると

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c^2 \left(\frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0. \quad (14.24)$$

この式の線形結合を (第一式) $\times c \pm$ (第二式) のようにとり、式を整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{\pm} + (v \pm c) \frac{\partial}{\partial x} J_{\pm} = 0, \quad J_{\pm} \equiv \frac{2}{\gamma-1} c \pm v \quad (14.25)$$

という (\pm の符号の分、計 2 本の) 式が得られる。

式 (14.25) はちょうど式 (14.3) で $\rho \rightarrow J_{\pm}$, $c(\rho) \rightarrow v \pm c$ と置き換えた式になっており、14.2 節で解説した特性曲線法を適用できる。なお、速度 $v \pm c$ は x の正・負の方向に伝搬する音速であり、流速 v の分だけ変化している。これに対応して、特性曲線も x の正・負の方向に伸びる 2 種類が出てくる (図 28 の赤線・青線)。

$J_{\pm} \equiv \frac{2}{\gamma-1} c \pm v$ は速度 $\frac{dx}{dt} = v \pm c$ の特性曲線上で一定となる量で、**リーマン不変量**と呼ばれる。初期時刻における $c(\rho)$, v の値から J_{\pm} の値が定まり、特性曲線に沿ってその値が一定になることを使えば (t, x) 空間全域で $J_{\pm}(t, x)$ の分布を定められる (図 28 参照)。その $J_{\pm}(t, x)$ の値から (t, x) 空間の各地点における $c(\rho)$, v の値も定めることができる。

式 (14.25) では伝搬速度 $v \pm c$ が場の値 (ρ, v) に依存するため、一般には衝撃波形成がこの流体についても起こり、14.3 節で説明した方法でその性質をある程度解析できる。衝撃波面における物理量の不連続性などを調べるためにはより詳細な解析が必要となるが、今回の講義では割愛する。

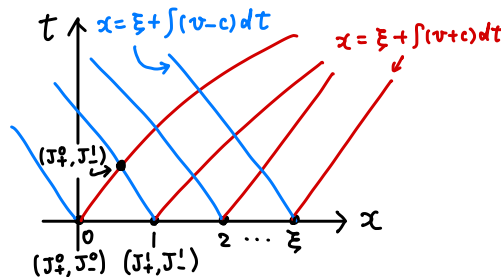


図 28: 理想気体の方程式 (14.25) に対する特性曲線の模式図。 J_{\pm} は速度 $\frac{dx}{dt} = v \pm c$ の特性曲線上で一定値をとる。そのため、初期時刻 $t = 0$ における J_{\pm} の値がわかっているならば、その後の時刻における J_{\pm} がすべて決定される。