第 3 回　流体の運動の例 / 運動量保存則

前回は、粘性のない**完全流体**の運動方程式である**オイラーの方程式**を導出し、これと**連続の式**および**状態方程式**を組み合わせることで流体の運動の時間発展が定められることを説明した。今回は、流体の運動方程式の復讐と、これらの方程式を解く練習を兼ねて、簡単な**流体の運動の例**を紹介する。また、前回の講義でも一部説明したが、流体についての**運動量保存則**がどのように与えられるかを見る。

3.1　流体の運動の例: 回転流体柱

図 6 のように、一定の角速度 Ω で全体が回転（**剛体回転**）している流体の柱で、回転軸が重力の向きに沿っているものを考える。また、簡単のため、この流体は**非圧縮性**で密度が常に一定であると仮定する[13]。例えば、円筒の容器に水を入れ、容器と水の全体が一定の角速度で回っている場合がこのようなセットアップに相当する。

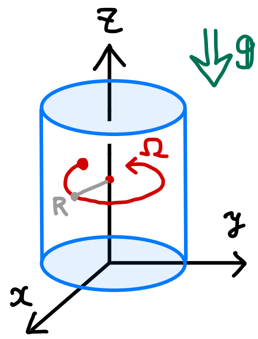

図 6: 重力場中で円柱状の容器とともに剛体回転する流体柱。

3.1.1　復習：流体の運動方程式

今回は非圧縮性流体で粘性の影響を無視できる場合について考えるので、流体の運動は以下の方程式系に従う:

$$\textbf{連続の式}:\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{3.1}$$

$$\textbf{オイラーの方程式}:\quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \mathbf{g} \tag{3.2}$$

$$\textbf{状態方程式}:\quad \rho = \rho_0\ (\text{一定}) \tag{3.3}$$

[**流体の位置**] 流体柱が角速度 Ω で回転するので、その中の流体素辺の位置 $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\Omega t + \phi_0) \\ R\sin(\Omega t + \phi_0) \\ z_0 \end{pmatrix} . \tag{3.4}$$

ただし、R は回転軸から測った半径で、ϕ_0, z_0 は流体素辺の初期位置に対応する定数。

[13] このセットアップでは、流体が変形しないまま運動するため、流体に粘性がある（完全流体でない）場合でも粘性は流体の運動に影響を与えない。そのため、完全流体について成立するオイラーの方程式を使っても正しい結果が得られる。

[流体の速度] 式 (3.4) を時間微分すれば流体素辺の速度が得られる。

$$\mathbf{v}(t)=\frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t}=\begin{pmatrix}-R\,\Omega\sin(\Omega t+\phi_0)\\ R\,\Omega\cos(\Omega t+\phi_0)\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\Omega y(t)\\ \Omega x(t)\\ 0\end{pmatrix}\ . \tag{3.5}$$

したがって、（流体素辺の集合全体が作る）流体の速度場 $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v}=(-\Omega y,\Omega x,0)\ . \tag{3.6}$$

この速度場は位置 $x, y(, z)$ だけに依存し、時間 t には依存しない[14]。

[連続の式]

では、流体の運動方程式 (3.1), (3.2) が上記の速度場 $\mathbf{v}$ に対してどのような式になるかを順次見ていく。まず、**連続の式** (3.1) は、密度 $\rho=\rho_0$ が定数であることから

$$\rho_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}=0 \tag{3.7}$$

と、**速度場の発散** $\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ **がゼロ**という式になる。実際、式 (3.6) の速度場 $\mathbf{v}$ はこの式を満たす[15]。

物理的には、$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0 \Leftrightarrow$ **（流体を注入する蛇口のような）流体の湧き出しがない** ということを意味する。実際、今回考えている流体中は剛体回転しているだけで、流体はいたるところ増加も減少もしていない。

[オイラーの方程式]

次に、オイラーの方程式 (3.2) について調べる。まず、$\mathbf{v}$ が時間に依存せず、また密度が一定で $\rho=\rho_0$ という設定に留意して式を整理すると

$$(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}P+\mathbf{g}\ . \tag{3.8}$$

この式の左辺を式 (3.6) の速度場について評価すると（ただし $\partial_x\equiv\partial/\partial x,\ldots$ と略記する）

$$(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}=(v_x\partial_x+v_y\partial_y+v_z\partial_z)\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix}=\Omega\,(-y\,\partial_x+x\,\partial_y)\begin{pmatrix}-\Omega y\\ \Omega x\\ 0\end{pmatrix}=\Omega^2\begin{pmatrix}-x\\ -y\\ 0\end{pmatrix}\ . \tag{3.9}$$

特に、この x, y 成分は単に $-\Omega^2\,R$ (R: 回転半径) と書くことができ、回転軸方向を向く大きさ $\Omega^2 R$ のベクトルとなっている。これは、**単位質量当たりの向心力**（回転運動に伴う加速度）そのものである。

式 (3.9) を使うと、式 (3.8) を圧力 P についての式に書き換えられる。鉛直下向きにかかる重力加速度のベクトルを $\mathbf{g}=(0,0,-g)$ と書くと

$$\boldsymbol{\nabla}P=\begin{pmatrix}\partial_x P\\ \partial_y P\\ \partial_z P\end{pmatrix}=\rho_0\left[-(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}+\mathbf{g}\right]=\rho_0\begin{pmatrix}\Omega^2 x\\ \Omega^2 y\\ -g\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=\rho_0\Omega^2 x\ ,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\rho_0\Omega^2 y\ ,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-\rho_0 g\ . \tag{3.11}$$

式 (3.11) は式 (3.10) の x, y, z 成分をそれぞれ書き下したもの。これらを微分方程式として解くことで P の関数形を定めることができる。今回は、系の軸対称性があらわにあらわに見えるようにするため**円筒座標系** (r,ϕ,z):

$$x=r\cos\phi\ ,\quad y=r\sin\phi\ ,\quad z=z\qquad\Leftrightarrow\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad \tan\phi=\frac{y}{x} \tag{3.12}$$

[14] 式 (3.6) のような速度場が時間的に一定である流れのことを**定常流**と呼ぶのであった。

[15] 式 (3.6) の $\mathbf{v}$ について $\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0$ となることは以下の通り示される。

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial\,(-\Omega y)}{\partial x}+\frac{\partial\,(\Omega x)}{\partial y}=0\ .$$

を使ってこれらの式を解いてみる。

式 (3.11) について (第 1 式) $\times x +$ (第 2 式) $\times y$ を書き下すと

$$x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = \rho_0\Omega^2\left(x^2+y^2\right) = \rho_0\Omega^2 r^2\ . \tag{3.13}$$

ここで、左辺は実は以下のように書き換えられる：

$$x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = r\frac{\partial P}{\partial r}\ . \tag{3.14}$$

($\because$) 左辺を書き換えて右辺を作ろうとすると若干難儀するが、右辺が左辺に等しいことを確認するのは比較的簡単である。円筒座標系の定義式 (3.12) と微分の連鎖律を使うと

$$\begin{aligned}
r\frac{\partial P}{\partial r} &= r\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial z}{\partial r}}\frac{\partial P}{\partial z}\right) && (3.15)\\
&= r\left(\frac{\partial(r\cos\phi)}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial(r\sin\phi)}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial y}\right) && (3.16)\\
&= r\left(\cos\phi\frac{\partial P}{\partial x} + \sin\phi\frac{\partial P}{\partial y}\right) && (3.17)\\
&= x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\ . && (3.18)
\end{aligned}$$

したがって、式 (3.13) は

$$r\frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0\Omega^2 r^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0\Omega^2 r\ . \tag{3.19}$$

この式を r について積分することで

$$P(r,\phi,z) = \frac{1}{2}\rho_0\Omega^2 r^2 + C(\phi,z)\ . \tag{3.20}$$

ただし $C(\phi,z)$ は r 積分した際に生じた積分定数。ここで、今考えている系は軸対称性を持つので、圧力 P も角度座標 ϕ には依存せず、したがって $C(\phi,z)=C(z)$ となる[16]。また、式 (3.13) の第 3 式にこれを代入すると

$$\frac{\partial P(r,\phi,z)}{\partial z} = \frac{\partial C(z)}{\partial z} = -\rho_0 g \quad \Leftrightarrow \quad C(z) = -\rho_0 g z + P_0\ . \tag{3.21}$$

ただし、P_0 は積分定数。結局、圧力 $P(r,\phi,z)$ は

$$P(r,\phi,z) = \rho_0\Omega^2 r - \rho_0 g z + P_0 \tag{3.22}$$

流体の**遠心力**がかかるため**外側 (r が大) の方が圧力が大きく** ($\rho_0\Omega^2 r$ 項の寄与)、また**重力**のために**深い地点 (z が小) ほど水圧が大きくなっている** ($-\rho_0 g z$ 項の寄与)。

3.2 運動量保存則

前回の講義でも軽く説明したが、ニュートンの運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \qquad (\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}) \tag{3.23}$$

[16] 式 (3.13) を組み合わせて円筒座標系で書き直すことで

$$\frac{\partial P}{\partial \phi} = \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)P = 0$$

となり、この式から $P(r,\phi,z)$ が ϕ に依存しないことを見ることもできる。

のように運動量の時間変化を表す式 (運動量の流出入も考慮に入れた場合の**運動量保存則**) と見ることができる。これと同様に、流体についての**オイラーの方程式も運動量保存則**であることがあらわになるように書き直すことができる。

この書き直しを行う際に、**連続の式**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{3.24}$$

を参考にする。この式の各項の物理的な意味は

- 第 1 項 $\partial_t \rho$: 現在注目している領域 V の流体の密度の時間変化。
- 第 2 項 $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v})$: **質量密度の流れ**を表すベクトル $\rho \mathbf{v}$ の発散 $\mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v})$。
  ガウスの定理を通じて、この項は V の表面 S を通じた**質量密度の流出** $\int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ の形に書ける。

質量密度が勝手に増大・減少せず**質量保存則が成立**する場合は、これら 2 つの和は常にゼロに等しくなる。この意味で、**連続の式は質量保存則を書き換えたもの**とみなすことができる。オイラーの方程式を書き換える際も、式 (3.24) のように

$$\partial_t(\text{運動量密度}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\text{運動量流}) = 0 \tag{3.25}$$

の形に表すことを目指す[17]。

3.2.1 オイラーの方程式の再導出

前回の講義のある運動する流体素辺に注目して（ラグランジュ描像で）オイラーの方程式を導出したが、今回は空間に固定された領域中の流体に注目して（オイラー描像で）導出する。特に、その領域中に含まれる**流体の運動量**とその変化に注目する。

まず、**流体の運動量密度**を表すベクトル $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$:

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \equiv \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \tag{3.26}$$

を使うと、ある領域 V 中に含まれる**全運動量** $\mathbf{J}(t)$ は

$$\mathbf{J}(t) = \int_V \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) dV\ . \tag{3.27}$$

この**全運動量の時間変化** $d\mathbf{J}(t)/dt$ は、以下の要因によって引き起こされる：

1. 領域 V の表面 S を通じた**流体の流出入**
2. 表面 S にかかる**圧力**
3. 流体そのものにかかる**体積力**（重力など）

このそれぞれの表式を以下で導出する。

1. 領域 V の表面 S を通じた**流体の流出**:
まず、表面 S の微小部分 dS を通じて流出する流体の量は $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ である。この流出分の流体に含まれる運動量は

$$\mathbf{j}\,(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S})\ . \tag{3.28}$$

したがって、単位時間あたりに表面 S 全体から流出する運動量の合計は

$$\int_S \mathbf{j}\,(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_S j_i\,(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) \quad (i = x, y, z)\ . \tag{3.29}$$

[17]ただし、後述するように流体に外力（体積力）がかかる場合には右辺にその寄与が入ってくる。

この式の $i=x,y,z$ 各成分についてガウスの定理を適用すると

$$\int_S j_i\left(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}\right)=\int_V \mathrm{div}\left(j_i\mathbf{v}\right)dV=\int_V\sum_{j=x,y,z}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(j_iv_j\right)dV\quad(i=x,y,z)\ . \tag{3.30}$$

この式が正（負）のとき、領域 V から運動量密度が流出（流入）している。

2. 表面 S にかかる**圧力**、3. 流体そのものにかかる**体積力**（重力など）:
今回は、簡単のため体積力として**重力 $\mathbf{g}$** だけ考える[18]。前回の講義で、ある流体素辺にかかる圧力と重力の合計値を計算し、その結果として

$$\int_V\left(-\boldsymbol{\nabla}P+\rho\,\mathbf{g}\right)dV\qquad\Leftrightarrow\qquad\int_V\left(-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho\,g_i\right)dV\quad(i=x,y,z) \tag{3.31}$$

となることを示した。領域 V 中の運動量は単位時間あたりこの値の分だけ変化する。

以上の結果を踏まえて運動量 $\int_V j_i\,dV\ (i=x,y,z)$ の時間変化を表す式を書き下すと、以下のようになる：

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V j_i\,dV}_{\text{運動量の時間変化}}=\int_V\frac{\partial j_i}{\partial t}\,dV=-\underbrace{\int_V \mathrm{div}\left(j_i\mathbf{v}\right)\,dV}_{\text{運動量流出}}+\underbrace{\int_V\left(-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho\,g_i\right)dV}_{\text{流体にかかる力}}\qquad(i=x,y,z) \tag{3.32}$$

この式が任意の領域 V について成立するので、結局

$$\frac{\partial j_i}{\partial t}=-\mathrm{div}\left(j_i\mathbf{v}\right)-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho\,g_i \tag{3.33}$$

$$=-\sum_{j=x,y,z}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(j_iv_j\right)-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho\,g_i\qquad(i=x,y,z)\ . \tag{3.34}$$

計算は省略するが、**連続の式 (3.1) を使ってこの式を整理するとオイラーの方程式 (3.2)（に ρ をかけた式）が得られる**。

3.2.2 運動量保存則の式

式 (3.34) の右辺第 2 項を $\partial/\partial x_i$ ではなく $\partial/\partial x_j$ で表すように書き換えると

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}=\sum_{j=x,y,z}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(P\delta_{ij}\right)\ . \tag{3.35}$$

ただし、δ_{ij} は**クロネッカーのデルタ記号**で

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\ . \tag{3.36}$$

この書き換えを行った後、$\mathbf{g}$ 項以外を左辺に移行し式を整理すると

$$\frac{\partial j_i}{\partial t}+\sum_{j=x,y,z}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(j_iv_j+P\delta_{ij}\right)=\rho\,g_i\ . \tag{3.37}$$

ここで、**運動量流テンソル** Π_{ij} を[19]

$$\Pi_{ij}=j_iv_j+P\delta_{ij}=\rho v_iv_j+P\delta_{ij}\qquad(i,j=x,y,z) \tag{3.38}$$

[18] 重力だけでなく、一般の体積力についてもまったく同じ式が成立する。
[19] 運動量**密度**の流れのテンソルと呼ぶ方が本当はより正確だが、簡単のためこのように呼ぶことにする。

と定義すると、式 (3.37) は

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij} = \rho\, g_i \tag{3.39}$$

となる。この式の特徴は下記の通り。

- **運動量流テンソル Π_{ij} の物理的解釈：**

  Π_{ij} の ij 成分は、**単位時間あたりに第 j 方向に流れる運動量の第 i 成分 p_i の量**を表す。
  例えば、Π_{ij} の第一項 $\rho v_i v_j = j_i v_j$ はちょうど運動量密度 $\rho v_i = j_i$ が速度 v_j で流れている状態を表している。
  また、圧力はある面について垂直方向に働くため、その面を通じて流れる運動量の向きは面の垂直方向で、なおかつ運動量の流れる向きも同じく面の垂直方向になるという性質がある。この性質に対応して、Π_{ij} の圧力項はクロネッカーデルタ δ_{ij}（単位行列に相当）に比例している[20]。

- **保存形の式：**

  式 (3.37) の左辺は、本節冒頭で予告した通り

  $$\partial_t(\text{運動量密度}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\text{運動量流}) \tag{3.41}$$

  という形をしており、特に外力（今回の場合は重力 $\mathbf{g}$）がゼロの時は (左辺)=0 という式になる。第 2 項（div(運動量流)）が運動量密度の流出量に対応することなどから、この式は**運動量保存則**を表すものと解釈できる。
  式 (3.37) を含め、式 (3.41) のような形を持つ方程式を**保存形**（もしくは**流束形式**）の式と呼ぶ。流体にかかる $\mathbf{g}$ などの外力（体積力）がある場合には式 (3.37) の右辺に入ってくるが、これはその外力による運動量の注入量を表している。

[20] 流体が粘性を持つ場合（で、特に流体が Newton 流体という種類の場合）には、流体に粘性由来の力がかかるために Π_{ij} に追加の項が生じて

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + P\delta_{ij} - \lambda\,(\mathrm{div}\cdot\mathbf{v})\,\delta_{ij} - \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.40}$$

となる。μ は粘性率、λ は第二粘性率と呼ばれる。この Π_{ij} を式 (3.39) に代入したものは、**粘性流体についての運動方程式**である**ナヴィエ–ストークス方程式**と呼ばれる。