

第5回 循環のある流れ

これまでの講義では、流体力学の基礎方程式とその性質についてまとめてきた。今後、実際の流体の運動の解析を行うための準備を徐々に進める。そのための第一歩として、流体の流れの渦の基本的性質について今回は解説する。

5.1 循環

5.1.1 定義

日常的な現象でもよく見られる「渦」が、これまでに導入してきた流体の特徴量を使うとどのように表されるのかを改めて考えてみる。

渦の基本的な特徴はある点を中心に**流れの回転**があることで、「回転」があるということは円環状の経路に沿った速度分布が存在しているはずである。この考えに基づき、ある時刻 t における速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ について、ある閉曲線 C に沿った**循環** κ_C を

$$\kappa_C \equiv \oint_C \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5.1)$$

と定義する。ただし、 $d\mathbf{l}$ は曲線 C の微小部分で、 $\oint_C \dots d\mathbf{l}$ は閉曲線 C (の、事前に決めた方向) に沿った一周積分である。図 7a のとおり、**循環** κ_C は速度場 \mathbf{v} を経路 C に射影した成分の大きさを C の一周にわたって積分したものである。

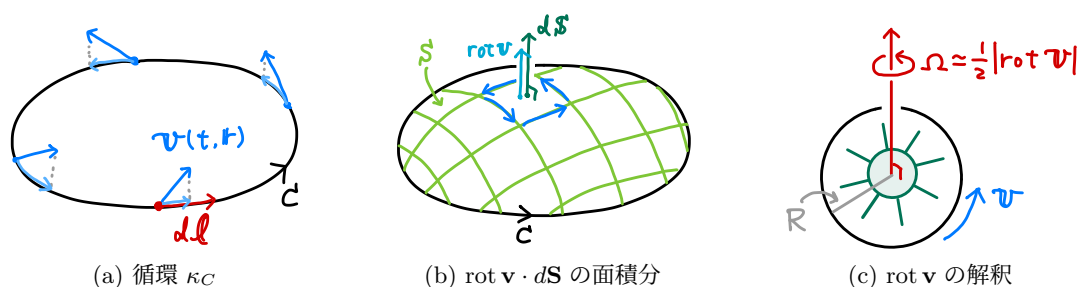


図 7: (a) 速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の閉経路 C に沿った成分を線積分したものを循環 κ_C と定義する。(b) ストークスの定理を使うことで、循環 κ_C は C を縁を持つ曲面 S 上で $\text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ を面積分したものと等しくなる。上図は $\text{rot } \mathbf{v}$ が面 S に垂直という特別な場合なので注意。(c) 経路 C が半径 R の微小な円の場合、 $\frac{1}{2}|\text{rot } \mathbf{v}|$ は円 C に沿った流体の角速度 Ω に等しくなる。 C 内に置かれた水車などの回転角速度を Ω と思ってもよい。

また、**ストークスの定理**を使うことにより (図 7b 参照)

$$\kappa_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \equiv \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.2)$$

と、 C を縁として持つ曲面 S 上で、 \mathbf{v} の渦度²¹ $\boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ の面 S に垂直な成分の大きさ $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ を面積分したものと等しくなる。ただし、**面積要素ベクトル** $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ は経路 C の向きについて右ねじの進む方向にとる必要があるので注意する。なお、 $\text{rot } \mathbf{v}$ の成分は

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

²¹ベクトル解析では、 $\text{rot } \mathbf{v}$ はベクトル場 \mathbf{v} の**回転** (rotation) と呼ばれる。

5.1.2 渦度の解釈

循環 κ_C は、任意の大きさの経路 C と曲面 S について定義されている。この定義を C の大きさが微小な場合に使うと、近似的に

$$\kappa_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} \simeq \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S . \quad (5.4)$$

ただし、 ΔS は面 S の面積である。特に、半径 R の円形の経路についてこの式を評価すると (図 7c 参照)

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi R v_{\text{平均}} = \kappa_C = \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S = \pi R^2 \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} . \quad (5.5)$$

ただし、 $v_{\text{平均}}$ は経路 C に沿った流体の速度の平均値。これらをもとに、 C 上の流体の平均角速度 $\Omega = v_{\text{平均}}/R$ を求めると

$$\Omega = \frac{v_{\text{平均}}}{R} = \frac{1}{R} \frac{\pi R^2 \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{2\pi R} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} . \quad (5.6)$$

すなわち、流体の平均角速度 Ω は、渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ の回転面に垂直な成分 ($\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$) の半分に等しい。

流体の中に微小な水車 (平面的な流体であれば、水面に浮かぶビート板などでもよい) が一様に分布している状況を考えて、**回転角速度 (の 2 倍) が渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ の大きさ、回転軸の方向が渦度の方向** にそれぞれ相当する、と考えるとイメージがつかみやすいかもしれない。

5.1.3 渦度を持つ流れの例

渦度と循環の定義を述べたところで、では実際に渦度を持つ速度場 \mathbf{v} の例を少し見てみよう。特に、**渦度がある場合でも、いわゆる「渦」状の流れがない時もある** という点には注意が必要である。

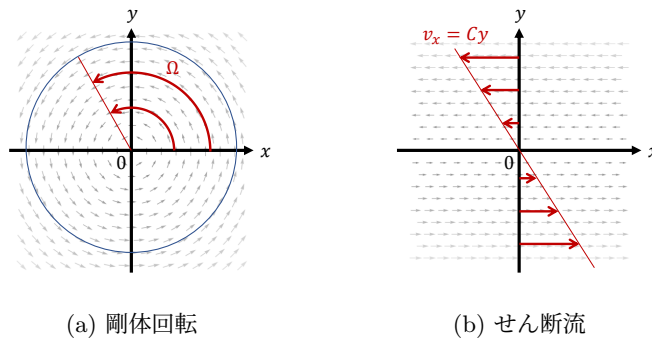


図 8: (a) 角速度 Ω の剛体回転流。(b) 速度 $v_x = Cy$ を持つせん断流。図は $C < 0$ の場合である。 $C = -2\Omega$ のとき、この 2 つの流れの渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ はたがいに等しくなり、 z 軸 (紙面から手前側の垂直方向) 向きの大きさ一定のベクトルとなる。

[剛体回転] 流体全体が z 軸を回転軸として角速度 Ω で剛体回転している場合の速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

となるのであった (図 8a 参照)。この場合の渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ は

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_x \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x(\Omega x) - \partial_y(-\Omega y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\Omega \end{pmatrix} . \quad (5.8)$$

すなわち、渦度はどこでも一定で、回転軸 (z 軸) を向いた大きさ 2Ω のベクトルとなる。

[せん断流] 次に、 x 方向の速度が y 座標に比例するせん断流の場合を調べてみる。この速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} Cy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C : \text{定数}) \quad (5.9)$$

で与えられる (図 8b 参照)。この場合の渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ は

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_x \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial_y(Cy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -C \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

この場合にも、渦度はいたるところ一定で、 z 軸 (の負の方向) を向いた大きさ C のベクトルで与えられる。特に、 $C = -2\Omega$ ととれば、先ほどの剛体回転の場合とまったく同じ渦度が得られる。

このように、渦度が等しくても速度場 \mathbf{v} は異なる場合があるということを意味する。渦度が同じなので、これらの流れの各点に微小な水車を置けば同じ速度で回る。一方、流れ全体の構造は互いに異なる。

5.2 渦線、渦管

5.2.1 定義

[渦線] ある時刻 t の渦度 $\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ に接し続ける曲線を渦線と呼ぶ。以前、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ にいたるところで接する曲線を流線と定義したが、これと同様である。

渦度ベクトルは流れの回転の回転軸の方向を向いているので、渦線は (局所的な) 回転軸をつなげていってできる曲線と考えることもできる。ただ、5.1.3 節で説明したとおり、渦度があってもいわゆる「渦」状の流れが存在しない場合もあるので注意が必要である。なお、5.1.3 節の 2 つの例では、 z 軸に沿った任意の直線が渦線となる。

[渦管] 流体中のある閉曲線 C を考え、それを横切る渦線の集合で囲まれる筒状の領域を渦管と呼ぶ。5.1.3 節の 2 つの例では、 (x, y) 平面上に閉曲線 C を取ったとすると、それを z 軸方向に平行移動してできる柱状の領域が C に対応する渦管となる。そのほかの例については図 9 参照。

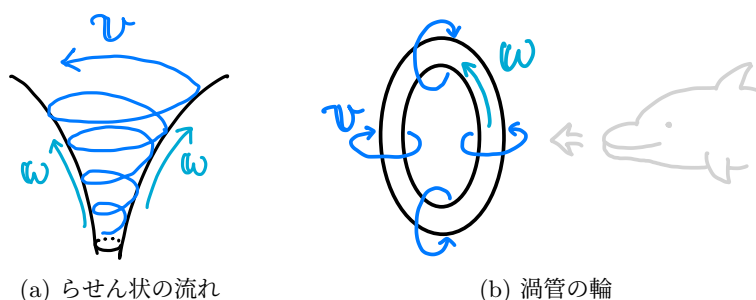


図 9: (a) らせん状の流れ、および (b) 渦線が輪を作る場合の渦管。青線が速度場 \mathbf{v} 、水色線が渦度 $\boldsymbol{\omega}$ に平行な渦線、黒線が渦管である。

5.2.2 渦管の連続性

渦度 $\boldsymbol{\omega}$ には、発散がゼロ ($\text{div } \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$) という重要な性質がある：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0. \quad (5.11)$$

この式は、 $\nabla \times \mathbf{v}$ の表式 (5.3) について、その発散を定義通り計算すれば示せる。

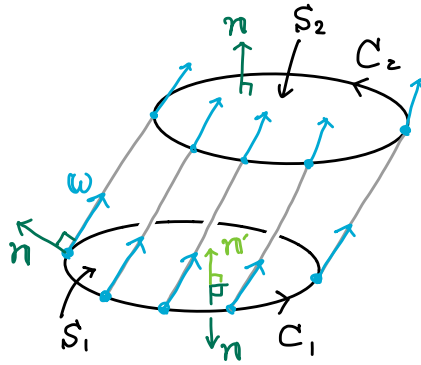


図 10: 渦管とその断面 S_1, S_2 .

$\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0$ を使うことで、渦管に沿って循環 κ_C が一定となることを以下のように示せる。ある渦管について、任意の2つの断面 C_1, C_2 をとる (図 10 参照)。断面 C_1, C_2 と渦管の側面で囲まれる領域を V として、 $\text{div } \boldsymbol{\omega} (= 0)$ を体積積分し、ガウスの定理を用いると

$$0 = \int_V \text{div } \boldsymbol{\omega} dV = \int_{\text{表面}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\text{側面}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.12)$$

$$= \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot (-\mathbf{n}') dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = -\kappa_{C_1} + \kappa_{C_2} . \quad (5.13)$$

- 1行目の最後の等号では、 $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ の表面積分を面 S_1, S_2 (C_1, C_2 を縁に持つ曲面) および側面についての積分に分けた。なお、単位法線ベクトル \mathbf{n} は領域 V から見て外向きにとるので注意。
- 1行目の最後の項で、 $\boldsymbol{\omega}$ と \mathbf{n} はそれぞれ渦管の側面に平行 / 垂直なので、 $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ となり積分値も消えることを使った。
- 面 S_1, S_2 上の $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ の面積分は、式 (5.2) で説明した通り循環 $\kappa_{C_1}, \kappa_{C_2}$ と等しくなる。ただし、この際に法線ベクトル \mathbf{n} の向きを経路 C_1, C_2 の向きについて右ねじの進む方向に取る必要がある。そのため、底面 S_1 については法線ベクトルの向きを逆向き ($\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$) に取ってから循環 κ_{C_1} に書き換えることになり、その分のマイナス符号がついている。

式 (5.13) は循環 κ_C が渦管に沿って一定 ($\kappa_{C_1} = \kappa_{C_2}$) ということの意味する。循環があるなら流体の渦度と渦管が必ず存在するため、この結果は渦管は流体中で途切れないこと、すなわち渦管は無限に伸びるか、壁などの境界面に達するか、リング状になるかのいずれかとなることを意味する。

5.3 ケルヴィンの渦定理

前節では、循環は渦管に沿って (空間的に) 一定であることを示し、そのことから渦管が途中で途切れることがないことを述べた。本節では、完全流体中では循環は流体の流れに沿って時間的に一定であるというケルヴィンの渦定理を示し、そのため流体の時間発展中に渦管が途切れることがないことを説明する。

この定理の証明には、オイラーの方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f} \quad (5.14)$$

を用いる。また、以下の仮定をおく。

- (単位質量あたりの) 外力 \mathbf{f} はポテンシャル力であるとする。すなわち、ある (スカラー) 関数 $U(t, \mathbf{r})$ が存在して

$$\mathbf{f} = -\nabla U \quad (5.15)$$

と与えられる²²。

- バロトロピックな状態方程式、すなわち

$$P = P(\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \rho(P) \quad (5.16)$$

が成り立つとする。このとき、新たに関数 $w(P)$ を

$$w(P) \equiv \int^P \frac{dP'}{\rho(P')} \quad (5.17)$$

と定義すると、

$$dw = \frac{1}{\rho} dP \quad \Rightarrow \quad -\nabla w = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (5.18)$$

が成立する²³。なお、 $1/\rho$ が単位質量あたりの体積であることを思い出すと、関係式 $dw = \frac{1}{\rho} dP$ は w が単位質量あたりのエンタルピーであることを示している。

これらの仮定の下で、オイラーの方程式 (5.14) は

$$\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla(w + U) \quad (5.22)$$

となる。なお、左辺の \mathbf{v} の微分をラグランジュ微分 $D\mathbf{v}/Dt$ で書き換えた。

では、循環 κ_C が流れに沿ってどのように時間変化するかを調べる。流れに沿った時間微分はラグランジュ微分で与えられるので

$$\frac{D}{Dt} \kappa_C = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C \frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell}) = \oint_C \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\boldsymbol{\ell})}{Dt} \right). \quad (5.23)$$

[式 (5.23) の右辺第 1 項] 式 (5.23) の右辺のうち、被積分関数の一つ目の項の寄与は、オイラーの方程式 (5.22) を使うとゼロになることが示せる²⁴：

$$\oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C [-\nabla(w + U)] \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_C \frac{d}{d\ell} [w(\ell) + U(\ell)] d\ell = \left[w(\ell) + U(\ell) \right]_{\text{始点}}^{\text{終点}} = 0. \quad (5.24)$$

(\because) この式の 2 番目の等号では、勾配 $\nabla(w + U)$ と経路 C に沿った線素ベクトル $d\boldsymbol{\ell}$ との内積が C に沿った微分に線素長 $d\ell$ をかけたものに等しいこと、すなわち

$$d\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla(w + U) = \frac{d[w(\ell) + U(\ell)]}{d\ell} d\ell \quad (5.25)$$

²²ポテンシャル力は回転がゼロ ($\nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times (-\nabla U) = 0$) であるため、流体の回転を生む力の成分 (トルク) を持たない。流体の循環の保存則たるケルヴィンの定理が成立するための条件として $\mathbf{f} = -\nabla U$ を課しているのはこのため、より一般の $\nabla \times \mathbf{f} \neq 0$ となる外力がある場合はケルヴィンの定理も成り立たない。

²³ $w(t, \mathbf{r})$ について

$$dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i \quad (5.19)$$

が成立し、また $dw = \frac{1}{\rho} dP$ なので

$$dw = \frac{1}{\rho} dP = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + \sum_{i=x,y,z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i \quad (5.20)$$

も成立する。これらの式が任意の dt, dx_i について成立するので、各項の係数同士が等しい必要があり

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (i = x, y, z) \quad (5.21)$$

が成立する。式 (5.18) の第 2 式 $\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla P$ が成立するのはこのためである。

²⁴式 (5.27) 以下の導出のほかに、ストークスの定理を使って $\oint_C \nabla(w + U) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S [\text{rot } \nabla(w + U)] \cdot d\mathbf{S} = 0$ ($\text{rot } \nabla(w + U) = 0$ のため) としても同じ結果が得られる。

を使った。また、最右辺の $[w(\ell) + U(\ell)]_{\text{始点}}^{\text{終点}}$ は一周積分の始点と終点における $w(\ell) + U(\ell)$ の値の差、すなわち

$$[w(\ell) + U(\ell)]_{\text{始点}}^{\text{終点}} = [w(\ell) + U(\ell)]_{\text{終点}} - [w(\ell) + U(\ell)]_{\text{始点}} \quad (5.26)$$

である。今回は経路 C に沿った一周積分を考えており、始点と終点が一致していて、それらの点における $w + U$ の値も一致するため、上式はゼロになる

[式 (5.23) の右辺第 2 項] また、式 (5.23) の右辺第 2 項についても、以下の通りゼロになる：

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\ell)}{Dt} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \oint_C \frac{1}{2} d(|\mathbf{v}|^2) = \left[\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right]_{\text{始点}}^{\text{終点}} = 0. \quad (5.27)$$

(\because) 一つ目の等号で $\frac{D(d\ell)}{Dt} = d\mathbf{v}$ となっているが、これは以下のように示せる。まず、 $d\ell$ の始点と終点を $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ とすると、近似的に (図 11 参照)

$$d\ell(t) \simeq \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t). \quad (5.28)$$

これをラグランジュ微分すると

$$\frac{D(d\ell(t))}{Dt} = \frac{D\mathbf{r}_2(t)}{Dt} - \frac{D\mathbf{r}_1(t)}{Dt}. \quad (5.29)$$

となるが、 $\frac{D\mathbf{r}_1(t)}{Dt}$ は $d\ell(t)$ の始点の位置 $\mathbf{r}_1(t)$ を流体の流れに沿って時間微分したものなので、定義により $\frac{D\mathbf{r}_1(t)}{Dt} = \mathbf{v}_1(t)$ となる。ただし、 $\mathbf{v}_1(t)$ は地点 $\mathbf{r}_1(t)$ における流速。 $\mathbf{r}_2(t)$ についても同様なので、以下の式が従う：

$$\frac{D(d\ell(t))}{Dt} = \mathbf{v}_2(t) - \mathbf{v}_1(t) \simeq d\mathbf{v}. \quad (5.30)$$

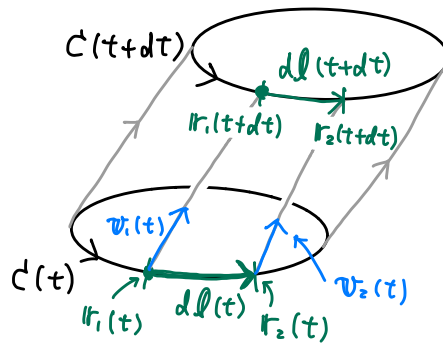


図 11: 流体の流れに沿って移動する線素 $d\ell(t)$.

式 (5.23), (5.24), (5.30) より、循環 κ_C が流体の流れに沿った時間微分がゼロであることが示される：

$$\frac{D}{Dt} \kappa_C = 0. \quad (5.31)$$

式 (5.31) は、ある経路 C について循環 κ_C が流体の流れに沿って時間的に一定であることを意味する。循環 κ_C が非ゼロであれば経路 C から延びる渦管が存在するので、渦管は流体の時間発展中で途切れることがないことがわかる。式 (5.31) およびこの考察をケルヴィンの渦定理と呼ぶ。5.2.2 節の結果と合わせて、渦管は空間方向にも時間方向にも途切れることがない、ということを表している。