

第6回 渦のない流れ

流体の流れは一般的に非常に複雑になりうるが、このうち渦のない流れ (渦度 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ がゼロの流れ) は比較的簡単に扱うことができる。今回の講義で渦無し流を取り扱うための基本をまとめる。

6.1 ヘルムホルツの定理

渦のない流れが比較的簡単に扱える理由は、この場合には速度場がポテンシャル $\phi(t, \mathbf{r})$ の勾配で与えられる ($\mathbf{v} = \nabla\phi$) ためである。これを理解するためには、ベクトル場を回転のある部分とない部分に分解するヘルムホルツの定理を使う。

ヘルムホルツの定理

(3次元中の) 任意のベクトル場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は、スカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ と発散がゼロのベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いて

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.1)$$

と表せる。

右辺の $\nabla\phi$ がベクトル場 \mathbf{v} の発散 $\text{div } \mathbf{v}$ を、 $\nabla \times \mathbf{A}$ が \mathbf{v} の回転 $\text{rot } \mathbf{v}$ をそれぞれ担っている²⁵。

[証明] まず、式 (6.1) の両辺の発散を計算すると

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot \nabla\phi \equiv \Delta\phi. \quad (6.2)$$

2つ目の等号では、ベクトルの回転の発散がゼロ ($\text{div rot } \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$) を用いた。また、最右辺に現れる Δ はラプラシアンと呼ばれる微分演算子で $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。式 (6.2) は、スカラー場 ϕ が以下のポアソン方程式を解けば得られることを示している：

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (6.3)$$

ここで、右辺に現れる $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})$ は、与えられたベクトル場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ でその値が決まるスカラー関数とみなせる。

次に、式 (6.1) の回転を計算すると

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}. \quad (6.4)$$

2つ目の等号でスカラー場の勾配の回転がゼロになること ($\text{rot grad } \phi = \nabla \times (\nabla\phi) = 0$)、および3つ目の等号でベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A}$ を用いた。また、4つ目の式では仮定 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を使って第一項を消した。この式から、 \mathbf{A} を定めるポアソン方程式が得られる：

$$\Delta \mathbf{A} = -\nabla \times \mathbf{v} \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = 0). \quad (6.5)$$

この式の右辺 $-\nabla \times \mathbf{v}$ は、 \mathbf{v} からその値が計算できるベクトル場となる。

ϕ, \mathbf{A} を定めるポアソン方程式 (6.3), (6.5) の解き方については省略するが、得られる解 (のひとつ) は以下のようになることが示せる：

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV'. \quad (6.6)$$

ここで、 $\nabla' \equiv (\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'})$ はプライム付きの座標 $\mathbf{r}' \equiv (x', y', z')$ についてのナブラ演算子で、右辺の積分も \mathbf{r}' について行う。 \mathbf{r} は $\phi(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})$ の引数で、右辺の積分では定数として扱われる²⁶。

²⁵ ϕ, \mathbf{A} には、ラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を満たす関数と $\nabla f + \nabla \times \mathbf{B} = 0$ を満たすベクトル場 \mathbf{B} を足しても ($\phi \rightarrow \phi + f, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B}$)、結果として得られる $\mathbf{v} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}$ の値は変化しない。これに加え、 $\phi \rightarrow \phi + c, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi$ (c : 定数、 ψ : スカラー場) としても \mathbf{v} は不変である。この分だけ ϕ, \mathbf{A} は一意に定まらないことになる。

²⁶式 (6.6) はベクトル場 \mathbf{v} が無限遠でゼロになる場合の表式で、そのほかの境界条件を満たす \mathbf{v} については式 (6.6) にラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ の解を適当に足す必要がある。

6.2 渦無し流

前節の式 (6.6) からわかる通り、 $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = 0$ となる渦無し流については、速度場 \mathbf{v} がポテンシャル ϕ だけで表せる：

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r}) . \quad (6.7)$$

実際、この速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ についての回転は $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \nabla\phi = 0$ となる。今後、速度場を表すのに使ったスカラー場 $\phi(t, \mathbf{r})$ を速度ポテンシャルと呼ぶ。

6.2.1 オイラーの方程式

渦無し流 (6.7) について、オイラーの方程式がどのように与えられるかを調べる。これに際し、前回の講義で用いた以下の仮定を今回も課す：

- 完全流体
- 外力がポテンシャル力: $\mathbf{f} = -\nabla U$ (U : スカラー場)
- 状態方程式が $P = P(\rho) \Leftrightarrow \rho = \rho(P)$ で与えられる。このとき、

$$w(P) = \int^P \frac{dP'}{\rho(P')} \quad (6.8)$$

という関数を導入でき、これについて $dw = \frac{1}{\rho}dP \Rightarrow \frac{1}{\rho}\nabla P = \nabla w$ となる。

以上の仮定の下で得られるオイラーの方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f} = -\nabla(w + U) \quad (6.9)$$

に、渦無し流の速度場 (6.7) を代入して整理する。

オイラーの方程式 (6.9) を整理するにあたり、以下のベクトル解析の公式を用いる：

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (6.10)$$

$$\Rightarrow \nabla |\mathbf{v}|^2 = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) . \quad (6.11)$$

式 (6.11) は公式 (6.10) で $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{v}$ としたものの。特に、渦無し流 ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) の場合、式 (6.11) の右辺第二項がゼロとなるため以下が成立する：

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 . \quad (6.12)$$

式 (6.9) に式 (6.7), (6.12) を代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi}_{= \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 = -\nabla(w + U) \quad (6.13)$$

$$\therefore \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \right) = 0 . \quad (6.14)$$

∇ は空間の各方向への微分演算子なので、式 (6.14) はかっこの中のスカラー量が時刻 t だけの関数であり、そのために勾配がゼロであることを意味する。すなわち、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U = f(t) . \quad (6.15)$$

$f(t)$ は時間 t の任意関数である。ここで、さらに速度ポテンシャルの不定性を使うと、 $f(t)$ を時間によらない定数 C に修正できる。

(\therefore) やや恣意的だが、式 (6.15) を以下のように変形する：

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - f(t) + C\right) + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + w + U = C. \quad (6.16)$$

ここで、新たに関数 $\bar{\phi}(t, \mathbf{r})$ を以下の通り定義する：

$$\bar{\phi}(t, \mathbf{r}) = \phi(t, \mathbf{r}) - \int^t f(t')dt' + Ct. \quad (6.17)$$

この関数を時間 t で微分すると

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} - f(t) + C \quad (6.18)$$

となるので、式 (6.16) は

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + w + U = C \quad (6.19)$$

とも表せる。また、 $\bar{\phi}$ から得られる速度場 $\bar{\mathbf{v}}$ は

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \nabla\bar{\phi} = \nabla\left(\phi(t, \mathbf{r}) - \int^t f(t')dt' + Ct\right) = \nabla\phi = \mathbf{v} \quad (6.20)$$

と、もともとの速度ポテンシャル ϕ から得られる速度場と一致する。ただし、積分 $\int^t f(t')dt'$ と Ct がどちらも t だけの関数であり、空間微分 ∇ を取るとゼロになることを使った。したがって、 \mathbf{v} を表すための速度ポテンシャルとして最初から $\bar{\phi}$ を使っていたと考えても差し支えない。

以上の解析から、式 (6.15) で右辺を定数 C にしたもの（もしくは式 (6.19) で $\bar{\phi} \rightarrow \phi$ と書き直したもの）が成立することが示された。これはベルヌーイの定理として知られている結果である。

(一般化された) ベルヌーイの定理

6.2.1 節冒頭で述べた仮定を満たす渦度がない（一般には非定常の）流れについて

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + w + U = C \quad (C: \text{定数}). \quad (6.21)$$

[定常流についてのベルヌーイの定理] 時間的に変化しない定常流 ($\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$) の場合には

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + w + U = C \quad (C: \text{定数}) \quad (6.22)$$

が成立し、式 (6.21) でもそうであったように定数 C は流体全体にわたって一定の値となる。なお、以上では渦度がゼロの場合を考えていたが、渦度がある定常流については、 C は流体全体にわたって一定とはならないものの、式 (6.22) の左辺 ($= C$) が流体中の各流線・各渦線に沿って一定となることが別途示せる²⁷。こちらの方をベルヌーイの定理と呼ぶ場合も多い。

6.2.2 ベルヌーイの定理 \simeq エネルギー保存則

定常流の場合には、ベルヌーイの定理を流体のエネルギー保存則からも導出できる。4.3 節で、(断熱的な) 完全流体についての単位質量あたりのエネルギー保存則は

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho\varepsilon \right) + \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + w \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{v} \cdot (\rho\mathbf{f}). \quad (6.23)$$

²⁷ 渦度がある定常流についてのベルヌーイの定理の導出は本講義では割愛する。流線に沿って一定となることについてはこの後 6.2.2 で見る。

ただし、 $w = \varepsilon + \frac{P}{\rho}$ は単位質量あたりのエンタルピーである²⁸。ここで、外力がポテンシャル力 ($\mathbf{f} = -\nabla U$) であり、さらに時間に依存しない ($\partial U/\partial t = 0$) と仮定すると

$$\mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{f}) = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla U = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) + U \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) - U \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) - \frac{\partial \rho U}{\partial t} \quad (6.24)$$

となる。最後から2番目の等号では連続の式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ を使った。この式を式 (6.23) の右辺に代入し、全ての項を左辺に移行すると

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon + \rho U \right) + \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \right) \mathbf{v} \right] = 0. \quad (6.25)$$

流れが定常であれば、左辺の第一項がゼロとなるので

$$0 = \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \right) \right] = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \right) + \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \quad (6.26)$$

右辺で $(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U)$ 項が消えているのは、定常流についての連続の式が $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ となるためである。式 (6.26) は関数 $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U$ が流れの方向について一定 ($\mathbf{v} \cdot \nabla(\dots) = 0$) ということを示しており、そこから式 (6.22) が少なくとも流線に沿って満たされることが言える。エネルギー保存則の式 (6.23) は渦度の有無にかかわらず成立するので、渦度がある場合でも $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U$ が流線に沿って一定であることは示せたことになる。なお、渦線に沿った方向についても同じ性質を示せるのだが、それをするためにはオイラーの方程式に基づいた別の計算が必要になる。

6.2.3 応用例

図 12 のように、水が満たされた容器の底に小さな穴が開いているとする。この時に、穴から流れ出す水の流速はいくらになるかを、ベルヌーイの定理 (6.22) を使って求めてみる。

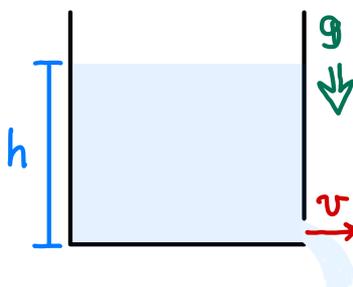


図 12: トリチェリの定理を示すために用いるセットアップ。水がたまった容器の底付近に穴が開いており、そこから水が流出する。

図 12 の系では、流体に外力として重力がかかっている。水面の位置を基準とした時、穴の位置における重力ポテンシャルは

$$U|_{\text{穴}} = -gh. \quad (6.27)$$

また、空気と接している水面は大気圧がかかっているが、これは水面の位置と穴の位置でほぼ同じである。圧力 P が同じなら、 P だけの関数である $w(P)$ の値も同じになるので

$$w|_{\text{水面}} = w|_{\text{穴}}. \quad (6.28)$$

²⁸ このエンタルピーの表式 ($w = \varepsilon + \frac{P}{\rho}$) は式 (6.8) で与えられるものと一致する。実際、4.3 節で導出した式 $d\varepsilon = \frac{P}{\rho^2} d\rho$ を使うと、 $w = \varepsilon + \frac{P}{\rho}$ の微分は $dw = d\varepsilon + d\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{P}{\rho^2} d\rho + \frac{dP}{\rho} - \frac{P}{\rho^2} d\rho = \frac{dP}{\rho}$ となり、式 (6.8) の微分 ($dw = \frac{dP}{\rho}$) と一致する。

また、穴が十分に小さい時、水面の位置や容器内部の流れは時間的にほぼ変化しない。したがって、近似的に**定常流**となり

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (6.29)$$

ここで、ベルヌーイの定理は、式 (6.21) の左辺が**流体のどの位置でも一定**であることを意味する：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \Big|_{\text{水面}} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \Big|_{\text{穴}}. \quad (6.30)$$

式 (6.27), (6.28), (6.29) を踏まえてこの式を整理すると

$$0 = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \Big|_{\text{穴}} - gh \quad \therefore |\mathbf{v}| = \sqrt{2gh}. \quad (6.31)$$

この結果は**トリチェリの定理**として知られている。例えば、 $h = 1\text{ m}$, $g = 9.8\text{ m/s}^2$ とすると $|\mathbf{v}| \simeq 4.4\text{ m/s}$ となる。流速 $|\mathbf{v}|$ の表式に流体の密度 ρ が出てこないのは、この流速の起源が重力のポテンシャルエネルギーで、それによって生成される流体の速度は密度 ρ に依存しない (ポテンシャルエネルギーと流体の慣性がどちらも ρ に比例するため打ち消しあう) ためである。

6.3 非圧縮性完全流体の流れ

水などの流体は、圧力がかかっても**体積がほぼ変化しない**。このような流体を**非圧縮性流体**と呼ぶ。この流体の状態方程式は単純に $\rho = \rho_0$ (定数) となる。なお、圧力は状況に応じて変化する。

非圧縮流体について、連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6.32)$$

以前も軽く説明した通り、 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ は注目している流体の部分の**体積変化率**に対応する (式 (4.32) 参照)。これがゼロである、という意味の式が得られたわけだが、**非圧縮性流体は体積が不変** (変形はする) ということと対応している。

以下、非圧縮流体の**渦無し流**について考えることにする。式 (6.32) を速度ポテンシャルで表すと

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi \quad \therefore \Delta \phi = 0. \quad (6.33)$$

式 (6.33) は**ラプラス方程式**と呼ばれる微分方程式で、 $\phi(t, \mathbf{r})$ が満たす境界条件を与えれば $\Delta \phi = 0$ の解は一意に定まる。すなわち、流速 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ が流体の表面や壁面で満たす境界条件を指定すると、流体全体の速度場 $\mathbf{v} = \nabla \phi$ が一意に定まることになる²⁹。

また、 $\rho = \rho_0$ (一定) のとき、式 (6.8) で定義される w は

$$w = \int^P \frac{dP'}{\rho(P')} = \int^P \frac{dP'}{\rho_0} = \frac{P}{\rho_0} \quad (6.34)$$

となるので、ベルヌーイの定理 (6.21) は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{P}{\rho} + U = C \quad (C: \text{定数}) \quad (6.35)$$

となり、これを P について解けば

$$P = \rho \left[C - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \right] \quad (6.36)$$

ベルヌーイの定理はオイラーの方程式を積分したものに相当するので、非圧縮流体については**オイラーの方程式は単に圧力を定める式**となったことになる。式 (6.36) からは**流速が速いと圧力が下がる**などといった有名な性質を読み取ることができる。

²⁹ \mathbf{v} の境界条件をある時刻 t に変更すると、その変化は流体全体に一瞬で反映されることになる。これは、非圧縮流体では変形に対する応答速度に相当する**音速が無限大**になっていることからくる。