

第7回 非圧縮性完全流体の流れ：具体例

前回の講義で、非圧縮性完全流体の渦なし流については

$$\rho = \rho_0, \quad \mathbf{v} = \nabla\phi(t, \mathbf{r}) \quad (7.1)$$

となることを説明した。式(7.1)のように、速度ポテンシャル $\phi(t, \mathbf{r})$ だけによって速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ が決まる流れのことをポテンシャル流と呼ぶ。また、この場合の連続の式とオイラーの方程式は

$$\Delta\phi = 0, \quad P = \rho \left[C - \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \right] \quad (7.2)$$

となる。ただし $\Delta\phi \equiv \nabla \cdot \nabla\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi$ 。特に、速度場 \mathbf{v} はラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を解けば決まる。今回は、そのようにして得られる流れの性質と具体例を紹介する。

7.1 等ポテンシャル面と流線

各時刻 t について、速度ポテンシャル $\phi(t, \mathbf{r})$ が一定となる面 (等ポテンシャル面) を

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \phi(t, x, y, z) = C(t) \quad (7.3)$$

で定める。この式は、 C の値ごとに3次元空間内の2次元面を与える (図13参照)。等ポテンシャル面は平面上の等高線のようなもので、 $\phi(t, x, y, z)$ の分布に対応して3次元空間内に層状に広がった等ポテンシャル面の族が生じる。

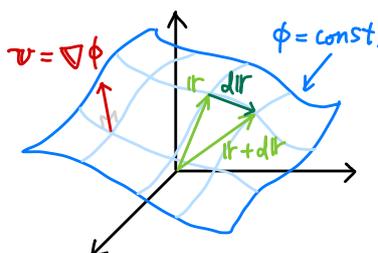


図 13: 等ポテンシャル面と速度場

等ポテンシャル面 $\phi = C$ と速度場 \mathbf{v} との間には、等ポテンシャル面の垂線方向が速度場という関係がある。

(\because) ある等ポテンシャル面上のある接ベクトルを $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ とする。 $d\mathbf{r}$ は等ポテンシャル面上にあるのだから、位置を \mathbf{r} から $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ にずらしても ϕ の値は変化しない。そのため、以下の式が満たされる：

$$\phi(t, \mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \phi(t, \mathbf{r}) = C \quad (7.4)$$

この式を変形し、 $d\mathbf{r}$ が微小な場合に式を展開すると

$$0 = \phi(t, \mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(t, \mathbf{r}) = \left(\phi(t, \mathbf{r}) + \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz}_{=\nabla\phi \cdot d\mathbf{r}} \right) - \phi(t, \mathbf{r}) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.5)$$

この式 $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$ は速度場 \mathbf{v} と等ポテンシャル面の接ベクトル $d\mathbf{r}$ が垂直であることを示している。そのため、等ポテンシャル面と速度場は常に直交する。

速度場をつないでいって作られる流線も等ポテンシャル面と垂直になる。そのため、 $\phi(t, \mathbf{r})$ が与えられたら、それに対応する等ポテンシャル面の構造を考えると、その垂線方向の曲線が流線となっている。なお、速度ポテンシャル・速度場・流線は、電磁気学の等電位面・電場・電気力線とそれぞれ対応している。

7.2 ポテンシャル流の具体例

7.2.1 一様流

最も簡単なポテンシャル流の例は、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ がどの位置 \mathbf{r} でも等しい一様流である：

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) . \quad (7.6)$$

この速度場に対応する速度ポテンシャル ϕ は

$$\phi(t, \mathbf{r}) = v_x(t)x + v_y(t)y + v_z(t)z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} . \quad (7.7)$$

実際、この ϕ の勾配 $\nabla\phi$ は式 (7.6) の速度場 \mathbf{v} を与える。この ϕ についての等ポテンシャル面 $\phi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = C$ は速度場 \mathbf{v} に垂直な平面となる。また、 ϕ が満たすべきラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ も満たされている。

式 (7.7) の勾配は

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \quad (7.8)$$

となり、式 (7.6) の $\mathbf{v}(t)$ に等しくなる。また、式 (7.7) の ϕ は x, y, z の一次関数なので、 x, y, z についての二階微分はゼロとなり、 $\Delta\phi \equiv \nabla \cdot \nabla\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0$ も満たされる。

7.2.2 湧き出し (吸い込み) 口まわりの流れ

次に簡単な例は速度場 \mathbf{v} が等方的 (原点などの基準点から見てどの向きも同じ) となる場合である。このとき流れは球対称となるので、流れの記述やラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を解く際には極座標 (r, θ, φ) を用いるのが最も便利である (図 14a 参照)。

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (7.9)$$

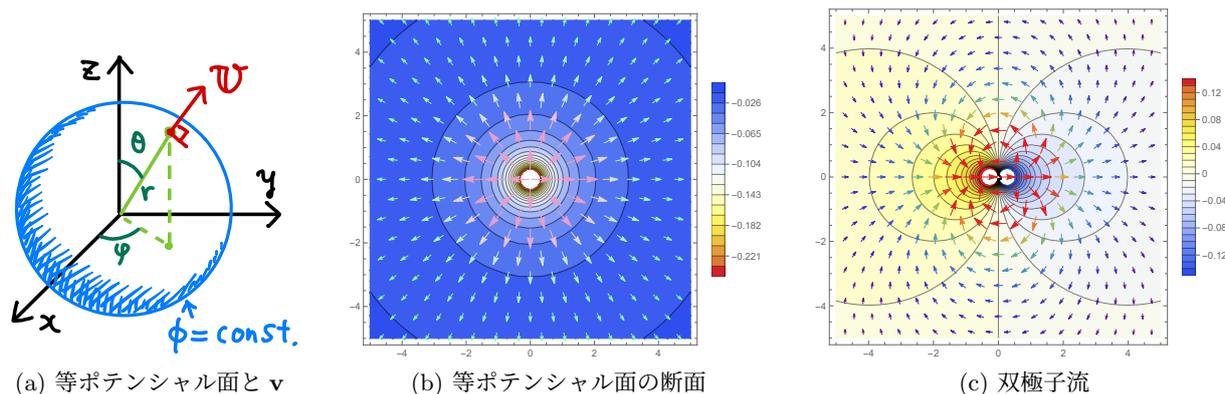


図 14: (a) 原点を中心とする極座標と、原点に湧き出しがある場合の等ポテンシャル面と速度場 \mathbf{v} . (b) 等ポテンシャルと速度場の 2次元断面。 (c) 双極子ポテンシャル (7.25) とそれに対応する速度場。図は \mathbf{a} が x 軸向きの単位ベクトルで $Q = 1$ の場合である。

この座標系で、 ϕ のラプラシアン $\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi$ は

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2} \quad (7.10)$$

となる。導出は本講義では省略する。また、球対称な流れについては速度ポテンシャルも球対称となり、角度座標 θ, φ には依存しなくなる ($\phi = \phi(t, r, \theta, \varphi)$)。そのため、 ϕ を定めるラプラス方程式は

$$0 = \Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \quad \therefore \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) = 0. \quad (7.11)$$

この式を2回 r について積分すると

$$r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} = A(t) \quad \Rightarrow \quad \phi = \int \frac{\partial\phi}{\partial r} dr = \int \frac{A(t)}{r^2} dr = -\frac{A(t)}{r} + B(t). \quad (7.12)$$

ただし、 $A(t), B(t)$ は r 積分で現れた積分定数で、 t の任意関数である。このうち、 $B(t)$ の方は速度場 \mathbf{v} に影響を与えない ($\mathbf{v} = \nabla\phi$ で $\nabla B(t) = 0$ となるため)。そこで $B(t) = 0$ とすると、 ϕ と \mathbf{v} はそれぞれ

$$\phi = -\frac{A(t)}{r}, \quad \mathbf{v} = \nabla\phi = \left(\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial r}}_{v_r}, \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}}_{v_\theta}, \underbrace{\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}}_{v_\varphi} \right) = \left(\frac{A(t)}{r^2}, 0, 0 \right). \quad (7.13)$$

速度場は r 成分だけを持ち、原点から外向きに伸びる球対称なベクトル場となる。また、等ポテンシャル面は原点を中心とする球面となる (図 14a, 14b 参照)。

[流体の湧き出し] 式 (7.13) の \mathbf{v} は原点から外向き ($A > 0$ の場合。 $A < 0$ の場合は内向き) を向いているので、**原点からの流体の湧き出し** ($A < 0$ の場合は吸い込み) がある。この量を評価してみる。

単位時間あたりに半径 r の球面 S を通過する流体の体積を Q とすると、その大きさは

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \underbrace{v_r r^2}_{=\frac{A}{r^2} r^2} \sin\theta \, d\theta d\varphi = 4\pi^2 A(t). \quad (7.14)$$

この流出量 Q は半径 r に依存しないので、 $r \rightarrow 0$ とし原点近傍だけを囲むようにした場合でも湧き出しがある。これは原点から流体が湧き出していることを表している。改めて、速度ポテンシャルを Q で表すと

$$\phi(t, r) = -\frac{Q(t)}{4\pi r}. \quad (7.15)$$

[湧き出しのある場合の ϕ の方程式] 式 (7.15) は原点以外ではラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を満たすが、実は原点直上に流体の湧き出しに対応するデルタ関数型の寄与が入っている (このタイプの方程式をポアソン方程式と呼ぶ):

$$\Delta\phi = Q(t)\delta(\mathbf{r}). \quad (7.16)$$

$\delta(\mathbf{r})$ は原点直上だけで値を持つ3次元のデルタ関数で、原点を含む領域で体積積分したときに $\int \delta(\mathbf{r}) dV = 1$ となる³⁰。

式 (7.15) の左辺を \mathbf{v} で書き直すと $\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot \mathbf{v}$ となるが、前回の講義や式 (4.32) で説明した通り $\nabla \cdot \mathbf{v}$ は流体の体積の湧き出しに対応する。今回の場合は原点に局在した湧き出し $\text{div } \mathbf{v} = Q(t)\delta(\mathbf{r})$ があることになる。

式 (7.16) が成立することを確認するためには、この式の左辺・右辺をそれぞれ原点を含む領域 V で積分してみる:

$$\text{式 (7.16) 左辺: } \int_V \Delta\phi \, dV = \int_V \nabla \cdot \nabla\phi \, dV = \int_S \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = Q(t) \quad (7.17)$$

$$\text{式 (7.16) 右辺: } \int_V Q(t)\delta(\mathbf{r}) \, dV = Q(t). \quad (7.18)$$

³⁰式 (7.15), (7.16) で $Q(t) = 1$ とした場合に得られる式 $-\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} = \delta(\mathbf{r})$ をデルタ関数 $\delta(\mathbf{r})$ が満たす式として用いるのも便利である。

式 (7.17) の 2 番目の等号ではガウスの定理を用いて積分を V の表面 S 上の面積分に書き換え、また最後の等式では式 (7.14) を使った。式 (7.17), (7.18) は互いに等しくなっているが、これは原点を含む任意の領域 V の取り方について成立するため、被積分関数同士 ($\Delta\phi$ と $Q(t)\delta(\mathbf{r})$) がそもそも等しくなっている必要がある。そのため式 (7.16) が成立する。

7.2.3 双極子流

[解の重ね合わせ] 速度ポテンシャルを定める式 (7.16) は ϕ についての線形方程式なので、2 つの解を重ね合わせたものも解となる。例えば、位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ に湧き出し $Q_1(t)$ がある場合の解を ϕ_1 , $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ に湧き出し $Q_2(t)$ がある場合の解を ϕ_2 とすると³¹

$$\Delta\phi_1 = Q_1(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \Delta\phi_2 = Q_2(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \quad (7.19)$$

式 (7.19) の 2 つの方程式の両辺をそれぞれ足し合わせてみると

$$\Delta(\phi_1 + \phi_2) = Q_1(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + Q_2(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \quad (7.20)$$

という式が得られる。この式は、位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ に湧き出し $Q_1(t), Q_2(t)$ が同時に存在する場合の解 ϕ が単に解 ϕ_1, ϕ_2 を足し合わせたもの ($\phi = \phi_1 + \phi_2$) で与えられるということを意味する。

[双極子ポテンシャル] 無限小の距離だけ離れた湧き出し点 ($Q > 0$) と吸い込み点 ($-Q$) のペアが作る速度ポテンシャル ϕ を双極子ポテンシャルと呼ぶ。

双極子ポテンシャルとそれに対応する流れを作るために、まず $\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$ に湧き出し Q が、 $\mathbf{r} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}$ に湧き出し $-Q$ がある場合を考えると、 ϕ を定める方程式は

$$\Delta\phi = Q\delta\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) - Q\delta\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right). \quad (7.21)$$

この式の解は、湧き出し $Q\delta(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a})$ に対する解 $\phi = \phi_+$, $-Q\delta(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{a})$ に対する解 $\phi = \phi_-$ を個別に求めておき、それらを足し合わせれば得られる。式 (7.16) に対する解が式 (7.15) だったことを思い出すと、これら 2 つの解は

$$\Delta\phi_{\pm} = \pm Q\delta\left(\mathbf{r} \mp \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) \Rightarrow \phi_{\pm} = -\frac{\pm Q}{4\pi|\mathbf{r} \mp \frac{1}{2}\mathbf{a}|}. \quad (7.22)$$

したがって、湧き出し・吸い込みが同時に存在する場合の式 (7.21) の解は

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = -\frac{Q}{4\pi|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}|} - \frac{-Q}{4\pi|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{a}|} = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{a}|}\right). \quad (7.23)$$

双極子を作るために、式 (7.23) の解について湧き出し・吸い込み点の間の距離 $|\mathbf{a}|$ をゼロにする極限をとる。ここで、 \mathbf{a} が微小なとき、 $\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}|}$ は

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{4}a^2}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^2} + \mathcal{O}(a^2)\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{2r^2}\right) + \mathcal{O}(a^2) \quad (7.24)$$

を満たす。ただし $r \equiv |\mathbf{r}|, a \equiv |\mathbf{a}|$ 。これを用いて、式 (7.23) を \mathbf{a} が微小だとして展開すると

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{a}|}\right) \simeq -\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{2r^2}\right) - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{2r^2}\right)\right] = -\frac{Q}{4\pi}\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} = -\frac{Q}{4\pi}\frac{a \cos\theta}{r^2}. \quad (7.25)$$

これが双極子ポテンシャルである (図 14c 参照)。ただし、 θ はベクトル \mathbf{a} の向きから測った角度である。また、導出の際は $a \rightarrow 0$ の場合に注目したが、 a が一般の (微小ではない) 値の場合でも式 (7.25) を双極子ポテンシャルと呼ぶ。

³¹7.2.2 節で考えた式 (7.16) は、原点 $\mathbf{r} = 0$ に湧き出し $Q(t)$ がある場合に相当する。

式 (7.23) で $\mathbf{a} \rightarrow 0$ をよく見ると、単極子ポテンシャル (7.15) について微分をとる式に $-\mathbf{a}$ をかけたものにちょうど一致している。そのため、双極子ポテンシャル (7.25) は式 (7.15) に $-\mathbf{a} \cdot \nabla$ を作用させたものと一致する：

$$-\mathbf{a} \cdot \nabla \left(-\frac{Q(t)}{4\pi r} \right) = \mathbf{a} \cdot \left(-\frac{Q(t)}{4\pi r^2} \nabla r \right) = -\frac{Q(t)}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r} = -\frac{Q(t)}{4\pi} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (7.26)$$

2 番目の等号では式 (7.27) を用いた。

[双極子流の速度場]

ポテンシャル (7.25) に対応する速度場 \mathbf{v} を求める。そのために必要となる計算を以下の通り先にやっておく：

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r} \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3) = a_i. \quad (7.28)$$

ただし $i = 1, 2, 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ である。これを使うと、ポテンシャル (7.25) を x_i で微分して得られる速度 v_i は

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} \right) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^4} \frac{\partial}{\partial x_i} r \right) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{a_i}{r^3} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} x_i \right). \quad (7.29)$$

これをベクトル形式 ($\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ など) で表せば

$$\mathbf{v} = \nabla \phi = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{a}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} \mathbf{r} \right). \quad (7.30)$$

これを図示すると図 14c のようになり、湧き出しから出た流体が広がりながら反対側に位置する吸い込みに流れ込んでいく様子が見てとれる。隣接する正電荷・負電荷がつくる静電ポテンシャルおよび電場と同様の構造である。

なお、次回の講義でこの双極子流が流体中を移動する球体の周りの流れと密接に関係していることを見る。

7.2.4 連続的に分布した湧き出しの場合

一般に、連続的に分布した湧き出し $q(t, \mathbf{r})$ がある場合には、速度ポテンシャルが満たす方程式は

$$\Delta \phi(t, \mathbf{r}) = \int q(t, \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = q(t, \mathbf{r}) \quad (7.31)$$

と、地点 \mathbf{r}' の位置にある湧き出し $q(t, \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ を空間積分したもので右辺が与えられる。これに対応して、 $\phi(t, \mathbf{r})$ は以下の式で与えられる：

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{q(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (7.32)$$

体積積分 $\int \dots dV'$ は、湧き出しの空間分布を表すのに用いた座標 \mathbf{r}' についての積分である。