

第8回 具体例：物体の周りの流れ

前回の講義に引き続き、非圧縮完全流体の渦なし流の具体例について解説する。今回は特に、流体中の物体の周りの流れを取り扱うための方法について議論する。

[復習] 非圧縮完全流体の渦なし流については、速度場 \mathbf{v} が速度ポテンシャル ϕ で表せて

$$\rho = \rho_0, \quad \mathbf{v} = \nabla\phi \quad (8.1)$$

となる。この ρ, \mathbf{v} に対する連続の式とオイラーの方程式は

$$\Delta\phi = 0, \quad P = \rho \left[C - \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \right]. \quad (8.2)$$

特に、速度ポテンシャルはラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を解けば決まる。

ラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ の解は境界条件を与えれば一意に定まる。流体中に物体があり水を押しつけている場合には、物体の運動に合わせて流体の速度場も影響を受け、物体の表面で速度場 \mathbf{v} が特定の値を取るようになる。これに対応して、速度ポテンシャル ϕ にも何らかの境界条件が物体表面（と無限遠）で課される。この境界条件を使って $\Delta\phi = 0$ を解き ϕ を求めることで、流体全体にわたる速度場 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ が決定される。以下でこの手順を一つずつ追っていく。

8.1 物体表面の境界条件

物体の表面で流体がどのように振る舞うかは、流体及び物体表面の性質によりさまざまである。今回は、物体表面と流体は摩擦なく滑る場合に、物体が流体中を速度 \mathbf{u} で運動すると流体の速度場 \mathbf{v} にどのような影響が生じるかを考える。

[表面の接線方向] 「物体の表面と流体は摩擦なく滑る」場合、流体が物体の表面に沿って流れても特に抵抗力が発生せず、流体の速度も影響を受けない。そのため、速度場 \mathbf{v} の物体表面に平行な成分は任意となる³²。

[表面の垂直方向] 物体表面で流体が滑る場合でも、表面に垂直な方向については表面を押し / 引くとその分流体も動く。すなわち、速度場 \mathbf{v} の物体表面に垂直な成分は、物体表面の速度の垂直成分と一致する。これを数式で書くと

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \nabla\phi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}. \quad (8.3)$$

ただし、 \mathbf{n} は物体表面についての単位法線ベクトルである。

式 (8.3) は速度ポテンシャル $\phi(t, \mathbf{r})$ が固体表面の位置で満たすべき境界条件となる。これに加え、無限遠 $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ でも $\phi(t, \mathbf{r})$ に何らかの境界条件を課す必要がある。例えば、無限遠で流速がゼロとなる場合には $|\nabla\phi| \rightarrow 0$ (遠方で ϕ が定数に収束) となる。

8.2 具体例：一様流中の球体

流体中の物体によって引き起こされる流体の運動の具体例として、速度 \mathbf{V} の一様流の中に静止した球体 (半径 R) を置くときに生じる流れについて考える (図 15a 参照)。この場合、速度場は定常 ($\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$) となる。

³²物体表面と流体との間に摩擦力が働く場合には、物体表面に対して流体が動かない ($\mathbf{v} = \mathbf{u}$) という条件を課することになる。

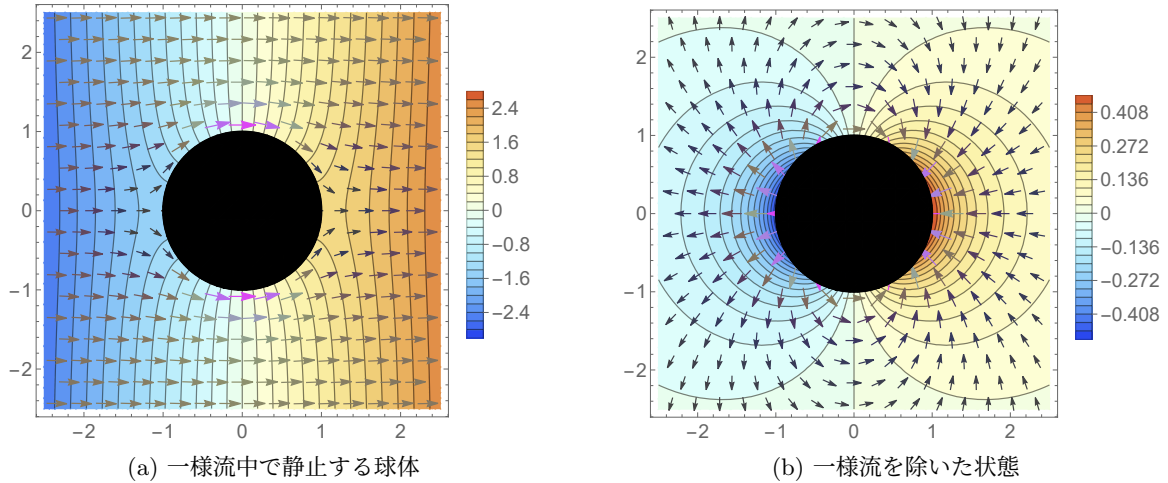


図 15: (a) 一様な流れの中に静止した球体をついた場合の流れ (矢印) と速度ポテンシャル (等高線)。一様流は右方向に流れている。(b) 前の図から一様流の成分を除いたもの。式 (8.5), (8.6) で定義される \mathbf{W}, ϕ_W に対応する。静止した流体中を球体が左に動く場合の流れもこの図で表される。

8.2.1 境界条件

球体が静止しているとき、その表面の位置で速度場 \mathbf{v} (もしくは速度ポテンシャル $\nabla\phi$) が満たす境界条件 (8.3) は、物体の速度がゼロ ($\mathbf{u} = 0$) となることに留意すると

$$\mathbf{n} \cdot \underbrace{\mathbf{v}}_{=\nabla\phi} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (8.4)$$

すなわち球面に垂直な速度の成分はゼロとなる。また、球体から十分遠方では速度 \mathbf{V} の一様流に漸近する ($|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ で $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{V}$) という条件も必要になる。

8.2.2 \mathbf{v} の分解

前節でまとめた境界条件を満たす速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ を構成するにあたり、

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + \mathbf{W}(\mathbf{r}) \quad (8.5)$$

と分解する。この右辺のうち、第一項 \mathbf{V} が一様流の成分、 $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ が球体をついたことによるずれの成分となる。これに対応して、この $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ を与える速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_V(\mathbf{r}) + \phi_W(\mathbf{r}) \quad (8.6)$$

と分解される。ただし、 ϕ_V, ϕ_W はそれぞれ速度場 \mathbf{V}, \mathbf{W} に対応する速度ポテンシャル ($\mathbf{V} = \nabla\phi_V$, $\Delta\mathbf{W} = \nabla W$) で、どちらもラプラス方程式を満たす ($\Delta\phi_V = 0, \phi_W = 0$)。ラプラス方程式は ϕ について線型方程式なので、2つの解を重ね合わせたものも解となる：

$$\Delta\phi_V = 0, \quad \Delta\phi_W = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(\phi_V + \phi_W) = 0. \quad (8.7)$$

したがって、式 (8.6) の $\phi = \phi_V + \phi_W$ もラプラス方程式の解 ($\Delta\phi = 0$) となる。

8.2.3 ϕ_V を求める

上で導入した ϕ_V, ϕ_W のうち、 ϕ_V については簡単に構成できる。 $\mathbf{V} = \nabla\phi_V$ を満たす関数 ϕ_V を見つければよいわけだが

$$\mathbf{V} = \nabla\phi_V \quad \Leftrightarrow \quad \phi_V = \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} \quad (8.8)$$

とすればよい。

〔例〕 $\mathbf{V} = (V_x, 0, 0)$ の場合 $\phi_V = \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} = V_x x$ となる。この ϕ_V について $\nabla \phi_V$ を計算してみると $\nabla \phi_V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right) V_x x = (V_x, 0, 0) = \mathbf{V}$ となり、たしかに ϕ_V から \mathbf{V} が再現される。

8.2.4 ϕ_W を求める

今度は ϕ_W を構成する。こちらについては、ラプラス方程式 $\Delta \phi_W = 0$ の解で、境界条件 (8.4) を満たすものを見つける必要がある。

[**W の境界条件**] 式 (8.4) は $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{W}$ についての境界条件だったので、 \mathbf{W} についての境界条件に書き換える必要がある。

$$0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{W}) \quad \therefore \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = -V \cos \theta. \quad (8.9)$$

ただし、 θ は \mathbf{V} の向きから測った角度で、この式が球の表面 ($|\mathbf{r}| = R$) で満たされている必要がある。

また、無限遠では $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{V}$ となるという条件があったが、これに対応して無限遠では $|\mathbf{W}| \rightarrow 0$ となる必要がある。

[**方針**] ϕ_W を求める方針としては以下の 2 通りが考えられる。

- [**直接解法**] ラプラス方程式 $\Delta \phi_W = 0$ の一般解を求めて、境界条件 (8.9) を満たすものを探す。一般解は任意パラメタを含むが、これを境界条件に合わせて調整することで解を作る。
- [**発見法**] ラプラス方程式 $\Delta \phi_W = 0$ と境界条件 (8.9) を満たす解を何らかの方法で見つける。境界条件が与えられればラプラス方程式の解は一つしか存在しないので、見つけたその解が求めるべき解になっている。

今回は後者の方法で ϕ_W を求める。

[**復習：双極子流**] 前回の講義 (7.2.3 節) で、無限小離れた湧き出し点・吸い込み点のペアが作る **双極子ポテンシャル** とそれに対応する **双極子流** を導入した。その表式を再掲すると

$$\phi_d \equiv -\frac{Q \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{4\pi r^3} = \mathbf{a} \cdot \nabla \left(\frac{Q}{4\pi r} \right), \quad \mathbf{v}_d \equiv \nabla \phi = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{a} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} \mathbf{r} \right). \quad (8.10)$$

この ϕ は原点直上以外ではラプラス方程式 $\Delta \phi = 0$ を満たす。後々この速度場を球の周りの流れに応用したいので、原点を中心とする半径 $|\mathbf{r}| = R$ の球面上で $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ をこの速度場 \mathbf{v}_d について計算するとどのような式になるかを見ておく。まず、球面上の単位法線ベクトル \mathbf{n} は

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}. \quad (8.11)$$

これを用いて $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d$ を球面 $|\mathbf{r}| = R$ の上で評価すると

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d|_{|\mathbf{r}|=R} = \frac{\mathbf{r}}{R} \cdot \left[-\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{a} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} \mathbf{r} \right) \right] \Big|_{|\mathbf{r}|=R} \quad (8.12)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi R} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) \Big|_{|\mathbf{r}|=R} \quad (8.13)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi R} \left(\frac{1}{R^3} Ra \cos \theta - \frac{3Ra \cos \theta}{R^5} R^2 \right) = +\frac{Qa}{2\pi R^3} \cos \theta. \quad (8.14)$$

ただし、 θ はベクトル \mathbf{a} の向きから測った角度で、また球面 $|\mathbf{r}| = R$ 直上で

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}|_{|\mathbf{r}|=R} = R^2, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}|_{|\mathbf{r}|=R} = Ra \cos \theta \quad (8.15)$$

となることを計算の途中で使った。

[境界条件を使って ϕ_W を決定]

双極子流から求めた式 (8.14) には係数 Qa がかかっており、これが \mathbf{W} の満たすべき境界条件 (8.9) と一致するようにこの係数を決めれば速度場 $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ (および ϕ_W) が再現できる。これらの式が互いに等しいとおくと

$$-V \cos \theta = \frac{Qa}{2\pi R^3} \cos \theta \quad \therefore \quad Qa = -2\pi R^3 V. \quad (8.16)$$

これを式 (8.10) に代入すると、式 (8.9) の境界条件を満たす速度ポテンシャル ϕ_W および速度場 $\mathbf{W} = \nabla \phi_W$ が得られる。ただし、 $a = |\mathbf{a}|$ であったことを踏まえて $Q\mathbf{a} = -2\pi R^3 \mathbf{V}$ を代入する。

$$\phi_d = -\frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} = \mathbf{a} \cdot \nabla \left(\frac{Q}{4\pi r} \right) \quad \xrightarrow{Q\mathbf{a} \rightarrow -2\pi R^3 \mathbf{V}} \quad \phi_W = \frac{R^3}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^3} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{R^3}{2r} \right) \quad (8.17)$$

$$\mathbf{v}_d = \nabla \phi = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{a} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} \mathbf{r} \right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W} = \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right) \quad (8.18)$$

実際、式 (8.18) の \mathbf{W} は以下の通り球の表面 $|\mathbf{r}| = R$ における境界条件 (8.9) を満たす：

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \Big|_{|\mathbf{r}|=R} = \frac{\mathbf{r}}{R} \cdot \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right) = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) = -V \cos \theta. \quad (8.19)$$

8.2.5 \mathbf{v} の表式

式 (8.5) で定義した通り、一様流中に球体を置いた時の速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は一様流 \mathbf{V} と球体を置いたことによる流れの変化分 $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ との和で与えられる。その表式は

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right). \quad (8.20)$$

これを図示したのが図 15a の矢印で、球体を避けるように流体が運動している様子が見て取れる。なお、図 15b は \mathbf{W} だけを図示したものである。

また、この \mathbf{v} に対応する速度ポテンシャルは

$$\phi = \phi_V + \phi_W = \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} + \frac{R^3}{2} \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (8.21)$$

8.2.6 \mathbf{v} の性質

以上の計算で得られた速度場 \mathbf{v} (8.20) の特徴を 2 点だけ説明しておく。

- [よどみ点] 一様流が流れてくる方向から見た時の球の正面および後端の位置 ($\mathbf{r} = \mp \frac{R}{V} \mathbf{V}$) における \mathbf{v} の表式は、 $r = |\mathbf{r}| = R$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} = \mp \frac{R}{V} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mp RV$ となることを使うと

$$\mathbf{v} \Big|_{\mathbf{r}=\mp \frac{R}{V} \mathbf{V}} = \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right) \Big|_{\mathbf{r}=\mp \frac{R}{V} \mathbf{V}} \quad (8.22)$$

$$= \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \underbrace{\left[\frac{1}{R^3} \mathbf{V} - \frac{3(\mp RV)}{R^5} \left(\mp \frac{R}{V} \mathbf{V} \right) \right]}_{=-\frac{2}{R^3} \mathbf{V}} = 0. \quad (8.23)$$

すなわち、一様流の向きから見た球の正面および後端の位置で流速はゼロとなる (図 15a の $x = \pm 1, y = 0$ の点)。このような流速がゼロとなる点はよどみ点と呼ばれる。

- [球体の横の速度] 一様流の向きを基準としたときの球体の真横の点 ($r = R, \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} = 0$ となる位置) における流速は

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right) = \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{R^3} \mathbf{V} - 0 \right) = \frac{3}{2} \mathbf{V}. \quad (8.24)$$

すなわち、球体の真横の点の流速は一様流の 1.5 倍の速度になっている。球体が押しつけた分の流体が球の側面付近を通るために流速が速くなっている。

8.3 静止流体中で運動する球体

先ほどは一樣流の中に静止する球体を考えたが、ニュートン力学における**ガリレイ変換** (同じ物理系を等速度運動する観測者から見る) を用いれば**静止する流体中を球体が等速度で運動する場合の結果も直ちに得られる**。

[**ガリレイ変換**] 静止した観測者から見た粒子の位置と速度を $\mathbf{r}, \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ としたとき、同じ粒子を一定の速度 \mathbf{V} で運動する観測者から見たときの位置と速度を $\mathbf{r}', \mathbf{V}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ とすると

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \quad \mathbf{V}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{V} \quad (8.25)$$

すなわち、速度 \mathbf{V} で動く観測者からは、粒子の速度が $-\mathbf{V}$ だけ変化して見える。この座標変換はニュートン力学における**ガリレイ変換**として知られている。

[**流体静止系**] ガリレイ変換を使って、先ほどの計算結果で**一樣流が静止して見える座標系**に移ってみる。一樣流は速度 \mathbf{V} で運動していたので、これと同じ速度 \mathbf{V} で運動しながら観測すると一樣流は静止して見える。この変換で、ガリレイ変換 (8.25) に従い球体の速度は 0 から $-\mathbf{V}$ に変化する。また、流体全体の速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}') = \mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{V} \Big|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{V}t} = \mathbf{V} + \mathbf{W}(\mathbf{r}) - \mathbf{V} \Big|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{V}t} = \mathbf{W}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{V}t} . \quad (8.26)$$

すなわち、先ほど求めた速度場 \mathbf{W} が (位置座標を $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{V}t$ と書き換える必要がある以外は) 静止流体中を速度 $-\mathbf{V}$ で運動する球体がおこす流れの速度場ということになる。球体の進行方向側の流体が押されて球体の後ろ側に回り込む流れ (**バックフロー**) が生成される (図 15b 参照)。

8.4 物体にかかる圧力と力

再び一樣流中で**静止する球体**について考え、**球体の表面上の圧力**を求めてみる。そのためにはオイラーの方程式 (8.2) を用いる。

$$P = \rho \left[C - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \right] \quad (8.27)$$

今回外力は考えないので $U = 0$ としてよく、また定常流なので $\partial \phi / \partial t = 0$ となる。このとき

$$P = \rho C - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 = P_0 - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 . \quad (8.28)$$

ただし、右辺の定数部分を $\rho C \equiv P_0$ と書き換えた。 P_0 は流速が $\mathbf{v} = 0$ となる点の圧力であり、例えば 8.2.6 節で説明した**よどみ点における圧力**がこれにあたる。

球体の表面直上 ($|\mathbf{r}| = R$) における P の振る舞いを調べるために、まず \mathbf{v} および $|\mathbf{v}|^2$ の表式を書き下すと

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right) \Big|_{|\mathbf{r}|=R} = \frac{3}{2} \left(\mathbf{V} - \frac{V \cos \theta}{R} \mathbf{r} \right) \quad (8.29)$$

$$|\mathbf{v}|^2 = \left| \frac{3}{2} \left(\mathbf{V} - \frac{V \cos \theta}{R} \mathbf{r} \right) \right|^2 = \frac{9}{4} \left(V^2 - \frac{2V \cos \theta}{R} \underbrace{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}_{=V R \cos \theta} + \frac{V^2 \cos^2 \theta}{R^2} |\mathbf{r}|^2 \right) = \frac{9}{4} V^2 \sin^2 \theta \quad (8.30)$$

$= V^2 (1 - \cos^2 \theta)$

θ は \mathbf{V} の向きから測った角度である。したがって、球の表面上の圧力分布は

$$P = P_0 - \frac{9}{8} \rho V^2 \sin^2 \theta . \quad (8.31)$$

よどみ点 ($\theta = 0, \pi$) で圧力が最大 ($P = P_0$) となり、流速が最大となる球体の側面 ($\theta = \pi/2$) で圧力が最小 ($P = P_0 - \frac{9}{8}V^2$) となる。

[物体にかかる力] 圧力 P が物体の表面にかかっているとき、表面上の面積 ΔS の部分には面の垂直方向に $P\Delta S$ だけの力がかかる。これを積分すれば、**流体の流れが球体に及ぼす力 \mathbf{F}** を求められる。

今回考える物体は原点に置かれた半径 R の球体なので、表面上の位置 \mathbf{r} ($|\mathbf{r}| = R$) における微小面積 ΔS にかかる力は $-P(\mathbf{r})\Delta S \frac{\mathbf{r}}{R}$ である³³。この力を球体の表面全体で積分すれば球体にかかる力 \mathbf{F} が求められる。

$$\mathbf{F} = \int \left(-P(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{R} \right) dS = \underbrace{\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} R \sin \theta d\phi}_{=f dS} \left[- \left(P_0 - \frac{9}{8} \rho V^2 \sin^2 \theta \right) \right] \frac{\mathbf{r}}{R}. \quad (8.32)$$

この積分で重要な点は、被積分関数が $f(\sin \theta)\mathbf{r}$ の形をしていることである。係数部分 $f(\sin \theta)$ は球体の側面の位置 ($\theta = \pi/2$) を基準として反転対称 ($\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ と $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ で $f(\sin \theta)$ は同じ値) となる。一方、位置ベクトル \mathbf{r} の成分は球面上の反対の点を考えるとちょうど符号が反転する。この二つの性質を踏まえて式 (8.32) を改めて見ると、**球面上全体にわたる積分値はゼロ**となることがわかる。

[ダランベールの背理] 先ほど**流体中の球体にかかる力はゼロ**という結論が得られたが、これは日常的な物理現象から得られる直感 (物体は流れの方向に力を受けそう) に反するため、一見矛盾しているように思われるという意味で**ダランベールの背理**^{パラドックス}と呼ばれている。

このような現象が起きる理由は、図 15b からわかる通り、球体の前面で押された流体が物体の背面に回り込む流れ (バックフロー) が実現されており、そのため**物体が流体に与える運動量の合計がゼロ**となることからくる。これは**粘性のない完全流体**を考えたために生じた現象で、**粘性流体では流れの方向に力がかかる**ことになる。

完全流体は取り扱いが簡単かつ応用上も重要な反面、現実的な流体の解析に使おうとすると注意が必要という側面もある、というのがこの例から得られる教訓の一つである。

³³ $-\frac{\mathbf{r}}{R}$ は球面から内側向きに伸びる単位法線ベクトルで、圧力による力はこの向きにかかる。