

第9回 流体の波動

前回までの講義では、どちらかというと定常的な流体の流れに注目して解析を行ってきた。今回以降の講義ではより一般的な流体の運動に注目する。特に、気体をはじめとする流体中を伝わる**波動**について詳しく解析を行う。

9.1 音波

流体中を伝わる波動のもっとも簡単な例の一つは、密度の変化が音速で伝わっていく音波である。密度が上がると圧力が上がるが、そのために生じる圧力勾配力は流体の圧力を下げる向きにかかるため、密度の値をもとの値に戻そうとする**復元力**としての役割を果たす。この復元力のために流体の振動が発生するが、これが空間的に伝わっていくのが音波の伝搬である。

9.1.1 設定

簡単のため、 x 軸方向に伝搬する平面波の音波について考えることにする。以下の仮定をおく。

- 音波がないときは流体は静止している。その際の密度を $\rho = \rho_0$ (一定) とする。
- 密度が ρ_0 から**微小に変化**した場合を考える。すなわち

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0 + \delta\rho(t, \mathbf{r}), \quad |\delta\rho(t, \mathbf{r})| \ll \rho_0. \quad (9.1)$$

今回は x 方向に伝搬する平面波を考えるので、 $\delta\rho$ は t と x だけに依存する ($\delta\rho = \delta\rho(t, x)$)。

- 微小圧力変化 $\delta\rho$ に対応して、速度場も微小に変化する。音波がない場合には流体は静止しており、なおかつ x 方向に伝搬する音波については流体は x 方向に振動する。すなわち

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \underbrace{v_0}_{=0} + \delta\mathbf{v}(t, x) = \delta\mathbf{v}(t, x), \quad \delta\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\delta v(t, x), 0, 0). \quad (9.2)$$

- 状態方程式は $P = P(\rho)$ で与えられる。
- 流体に外力はかかっていない (オイラーの方程式で $\mathbf{f} = 0$)。

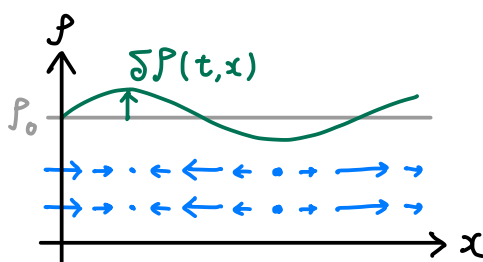


図 16: x 依存性を持つ微小圧力変化 $\delta\rho(t, x)$ とそれに対応する流体の平衡位置からのずれ (青矢印)。後者を時間微分したものが $\delta v(t, x)$ である。

9.1.2 摂動方程式

9.1.1 節の設定のもと、 $\delta\rho(t, \mathbf{r})$ (と $\delta\mathbf{v}$) の従う運動方程式を導出する。流体の運動方程式は**連続の式**と**オイラーの方程式**なので、これらに式 (9.1), (9.2) を代入し、 $\delta\rho, \delta\mathbf{v}$ が微小であるとして展開してみる。なお、 ρ, \mathbf{v} などの物理量の微小な変化 $\delta\rho, \delta\mathbf{v}$ のことを**摂動**、それらが従う運動方程式のことを**摂動方程式**と呼ぶ。摂動方程式は元の方程式と比べて単純化されており、その解析も容易になる。

[連続の式]

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \text{div}[(\rho_0 + \delta\rho)\delta\mathbf{v}] = \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \delta\mathbf{v} + \text{div}(\delta\rho \delta\mathbf{v}) \quad (9.3)$$

$$\therefore \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0. \quad (9.4)$$

式(9.3)で、 $\delta\rho \delta\mathbf{v}$ 項は二次の微小量であり $\delta\rho, \delta\mathbf{v}$ と比べて十分小さいため無視した。

[オイラーの方程式]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (9.5)$$

まず、式(9.5)の左辺は

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla) \delta\mathbf{v} \simeq \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \delta v}{\partial t}, 0, 0 \right) \quad (9.6)$$

となり、今回の場合は x 成分以外はすべてゼロになる。なお、 $(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla) \delta\mathbf{v}$ 項は二次の微小量であり $\delta\mathbf{v}$ 項と比べて小さいため無視した。

一方、式(9.5)の右辺は、式(9.1)と状態方程式 $P = P(\rho)$ を使うと

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla P(\rho) &= -\frac{1}{\rho_0 + \delta\rho} \left(\frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho_0 + \delta\rho} \right) \nabla(\rho_0 + \delta\rho) = -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \dots \right) \left(\frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho_0} + \frac{d^2P}{d\rho^2} \Big|_{\rho_0} \delta\rho + \dots \right) \nabla \delta\rho \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho_0} \right) \underbrace{\nabla \delta\rho}_{=(\partial_x \delta\rho, 0, 0)} + \mathcal{O}(\delta\rho^2). \end{aligned} \quad (9.7)$$

先ほどと同様、 $\delta\rho$ について二次以上の微小量(赤字部分)は $\delta\rho$ 項と比べて小さいため無視する。また、 $\delta\rho$ は t, x だけに依存するため、 $\nabla \delta\rho$ は x 成分($\frac{\partial \delta\rho}{\partial x}$)だけを持つ。

式(9.6), (9.7)を踏まえて、オイラーの方程式(の x 成分)を書き下すと

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho_0} \right) \frac{\partial \delta\rho}{\partial x}. \quad (9.8)$$

[波動方程式の導出]

連続の式とオイラーの方程式から得られた $\delta\rho, \delta v$ の方程式(9.4), (9.8)を改めてまとめると

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \delta v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{d\rho} \frac{\partial \delta\rho}{\partial x}. \quad (9.9)$$

$dP/d\rho$ は摂動がない $\rho = \rho_0$ の時の値で、今回の設定では t, x に依存しない定数となる。実は、この2つの方程式を一つの変数($\delta\rho$ か δv)についての二階微分方程式に書き換えることができる。第一式の時間微分(∂_t)をとり、その δv 項を第二式を用いて書き換えると

$$0 = \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial x}}_{=\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \delta v}{\partial t}} = \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{d\rho} \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} \right) \quad (9.10)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \quad (9.11)$$

式(9.10)では、 δv が二階偏微分可能であり偏微分が可換($\frac{\partial^2 \delta v}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial t}$)であることを使った。すぐに説明するが、式(9.11)の形の微分方程式は**波動方程式**という名で知られている。

9.1.3 音波

式 (9.11) を解くと $\pm x$ 方向に伝搬する密度変化 $\delta\rho(t, x)$ の**波動**を表す解が得られる。今回の場合、これは流体中を伝搬する**音波**に他ならない。ひとまず、この音波を表す解を以下で構成する。

[波動方程式の一般解] 音波を表す解を構成するためには、やや天下りの的ではあるが式 (9.11) を

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta\rho(t, x) = 0 \quad (9.12)$$

と書き換えるとよい。実際、この式の左辺を展開すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta\rho(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} - c\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}\right) \quad (9.13)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} - c\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}\right) + c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} - c\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}\right) \quad (9.14)$$

$$= \left(\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t\partial x}\right) + c\left(\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x\partial t} - c\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x^2} \quad (9.15)$$

となり、式 (9.11) の左辺が再現される。最後の行では、偏微分が可換であること ($\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t\partial x} = \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x\partial t}$) から第二、第三項が互いに打ち消しあうことを使った。なお、式 (9.12) で $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ を普通の数のようなものと思って因数分解の公式 $\partial_t^2 - (c\partial_x)^2 = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)$ と計算しても同じ結果が得られる。

式 (9.12) の微分演算子の形に基づき、以下の形の解を考えてみる。

$$\delta\rho(t, x) = f(ct - x) + g(ct + x) . \quad (9.16)$$

ただし、 $f(y), g(y)$ はそれぞれ x の任意関数で、上式では引数として y の代わりに $ct - x, ct + x$ を代入している。この $f(ct - x) + g(ct + x)$ は、それぞれ式 (9.12) に現れる各微分演算子をかけるとゼロになるという性質がある：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(ct - x) = \frac{\partial f(ct - x)}{\partial t} + c\frac{\partial f(ct - x)}{\partial x} \quad (9.17)$$

$$= \frac{df(y)}{dy}\bigg|_{y=ct-x} \underbrace{\frac{\partial(ct-x)}{\partial t}}_{=c} + c\frac{df(y)}{dy}\bigg|_{y=ct-x} \underbrace{\frac{\partial(ct-x)}{\partial x}}_{=-1} = \frac{df(y)}{dy}\bigg|_{y=ct-x} [c + c \times (-1)] = 0 . \quad (9.18)$$

同様の計算により $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)g(ct + x) = 0$ も示せる。したがって、式 (9.16) の $\delta\rho$ は波動方程式 (9.12) を自動的に満たす³⁴：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)(f(ct - x) + g(ct + x)) = 0 . \quad (9.19)$$

³⁴式 (9.19) について、関数 $g(ct+x)$ については微分演算子 $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)$ が直接かかっているから $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)g(ct+x) = 0$ から $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)g(ct+x) = 0$ が直ちに言える。一方、 $f(ct-x)$ については微分演算子 $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$ と関数 $f(ct-x)$ との間に別の微分演算子 $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)$ が挟まっているので、 $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(ct-x) = 0$ から $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(ct-x) = 0$ となることが言えるかを疑問に思うかもしれない。この問題は、微分演算子が互いに可換であることを使うなどして方程式の左辺を $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(ct-x)$ と変形しておけば回避される。また、式 (9.19) の形のまま計算しても

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(ct-x) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)(c - c \times (-1))f'(ct-x) \\ &= 2c\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)f'(ct-x) = 2c(c + c \times (-1))f''(ct-x) = 0 \end{aligned}$$

と、たしかに $f(ct-x)$ が方程式 (9.12) を満たすことを確認することもできる。ただし $f'(y) = \frac{df(y)}{dy}$, $f''(y) = \frac{d^2f(y)}{dy^2}$ 。

すなわち、波動方程式 (9.11) の解 $\delta\rho(t, x)$ は式 (9.16) で与えられることになる。なお、詳細は省略するが式 (9.16) の形の解が方程式 (9.11) の最も一般的な解 (一般解) となっており、任意の解 $\delta\rho(t, x)$ は必ず式 (9.16) の形に表せる。

[一般解の解釈] 結論から言うと、式 (9.16) のうち $f(ct - x)$ は x 軸の正の向きに、 $g(ct + x)$ は負の向きに伝搬する音波を表している。 $f(ct - x)$ は、 C を定数として

$$ct - x = C \quad \Leftrightarrow \quad x = ct - C \quad (9.20)$$

を満たす直線上で一定の値をとる (引数 $ct - x$ が一定値 C をとるため)。この式は、初期時刻で x の位置にあった f の波形が速度 c で移動し、 Δt 秒後には $x + c\Delta t$ の位置にあることを表している。同様に、 $g(ct - x)$ については g の波形が速度 $-c$ をもち $x - c\Delta t$ の位置に移動することになる (図 17 参照)。これを踏まえて改めて式 (9.16) を見ると、微小密度変化 $\delta\rho(t, x)$ がある時刻に存在した場合、それは x 軸の正・負の方向に速度 c で伝搬していくことがわかる。これが一般に音波と呼ばれているものである。また、伝搬速度 $c = \sqrt{dP/d\rho}$ は音速となる。

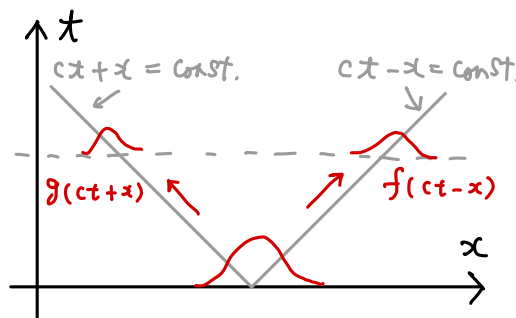


図 17: 波動方程式 (9.12) の一般解 (9.16)。 $f(ct - x)$, $g(ct + x)$ がそれぞれ x 軸の正・負の方向に伝搬する音波に対応する。

9.2 音速

先ほどの解析で、流体の圧力変化は音速 $c = \sqrt{dP/d\rho}$ で伝搬することが分かった。この音速の性質について少し説明を加える。

9.2.1 流体の「固さ」と音速

音速 c は圧力 $P(\rho)$ と $c^2 = dP/d\rho$ という関係にある。以下のように考えると、この $dP/d\rho$ は流体の「硬さ」を表す量であるとわかる。

物体の「硬さ」は、その物体を変形させたときにどの程度強い反発力が生じるかで表せる。流体の場合には、流体を押すと密度 ρ が変化し、圧力 P が上昇して変形を元に戻そうとする方向の力が生じる。この復元力の大きさは、密度変化に対する圧力の変化率 $dP/d\rho$ に比例する。この意味で、 $dP/d\rho$ は流体の「硬さ」を表す量とみなすことができる。

$dP/d\rho$ の値は状態方程式 $P = P(\rho)$ を与えると決まるが、上記の考え方に基づいて、 $dP/d\rho$ が大きい (小さい) 値を取る状態方程式のことを「硬い (柔らかい) 状態方程式」と呼ぶことがある。

音速の表式 $c = \sqrt{dP/d\rho}$ は、 $dP/d\rho$ が大きい (流体が「硬い」) ほど音速が大きいことを意味している。これは我々の身近な物質について実際にその通りになっており、例えば空気中の音速は約 340 m/s, 水については約 1500 m/s, 金属については種類にもよるが数千 m/s となっている。

9.2.2 流体の圧縮率

流体の性質を表す量として $dP/d\rho$ をそのまま使ってもよいが、以下で定義される**圧縮率** κ :

$$\kappa \equiv \left. \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \quad (9.21)$$

もよく使われるので紹介する。以下で示す通り、この κ は**圧力を変化させたときに体積がどれだけ変わるかを表す係数**となっている。ある流体要素の体積を V 、質量を M とすると、 $\rho = M/V$ なので

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} \frac{M}{\rho} = -\frac{M}{\rho^2} = -\frac{V^2}{M} \quad (9.22)$$

これを使って κ^{-1} を V についての式として書き直すと

$$\kappa^{-1} = \rho \frac{dP}{d\rho} = \frac{M}{V} \underbrace{\frac{dV}{d\rho}}_{=-\frac{V^2}{M}} \frac{dP}{dV} = -V \frac{dP}{dV} \quad \therefore \kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad (9.23)$$

この κ の表式は、**単位体積の流体について、圧力が上がった時に体積がどれだけ減少するかを表す係数**、すなわち流体の**圧縮率**であることを示している：

$$dV = \frac{dV}{dP} dP = -V \kappa dP \quad (9.24)$$

なお、圧縮率 κ で音速を表すと以下ようになる：

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}} \quad (9.25)$$

例えば、前回以前の講義で取り扱っていた非圧縮性流体については、圧縮率が $\kappa = 0$ となり、それに対応して音速は $c = \infty$ となる。

9.2.3 理想気体の音速

ある気体を構成する分子について、分子間の相互作用が働かず、なおかつ分子の大きさが非常に小さく無視できる場合には、その流体は**理想気体**として振る舞い、その状態方程式は

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu} \quad (9.26)$$

で与えられる。ただし、 μ は気体 1 mol あたりの質量、 $R = 8.314 \times 10^7 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$ は気体定数。

$PV = nRT$ (n : 気体の物質質量 = 体積 V 中の mol 数) のような表式の方が有名かもしれない。これを書き換えて

$$P = RT \frac{n}{V} = RT \frac{M/V}{M/n} = RT \frac{\rho}{\mu} \quad (9.27)$$

として式を整理したものが式 (9.26) である。ただし、 M は体積 V の気体の質量である。

この理想気体について、音速 (9.25) がどのように与えられるかを調べてみる。気体の変化 $d\rho, dP, dT$ が発生したとき、それらは式 (9.26) によって

$$\frac{dP}{\rho} - \frac{P}{\rho^2} d\rho = \frac{R}{\mu} dT \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (9.28)$$

と関係づけられる。右側の表式は、左側の表式を式 (9.26) で片々割って得られたものである。

式 (9.28) には dT が表れるが、これを消去できれば $d\rho$ と dP だけの関係式が得られて、そこから圧縮率 κ と音速 $c = (\rho\kappa)^{-1/2}$ が求められる。そのために**気体の内部エネルギー ε** と**熱力学第一法則**に注目する。まず、理想気体の単位質量あたりの内部エネルギー ε は、気体が単分子気体の場合には

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{RT}{\mu} \quad \Rightarrow \quad d\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} dT \quad (9.29)$$

で与えられる。さらに、断熱的な変化だけを考える場合、単位質量あたりの熱力学第一法則は

$$d\varepsilon = \cancel{TdS} - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad \left(\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}\right) = \frac{RT}{\mu\rho} d\rho. \quad (9.30)$$

最後の等号では式 (9.26) を使った。式 (9.29), (9.30) を組み合わせると、 dT と $d\rho$ とを関係づける式が

$$\frac{3}{2} \frac{R}{\mu} dT = \frac{RT}{\mu\rho} d\rho \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dT}{T} = \frac{2}{3} \frac{d\rho}{\rho} \quad (9.31)$$

と得られる。

式 (9.31) を式 (9.28) に代入すると

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} = \frac{2}{3} \frac{d\rho}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP}{P} = \frac{5}{3} \frac{d\rho}{\rho} \quad (9.32)$$

$$\therefore \kappa^{-1} = \rho \frac{dP}{d\rho} = \frac{5}{3} P. \quad (9.33)$$

この表式から音速 c を求めると

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}} = \sqrt{\frac{5P}{3\rho}}. \quad (9.34)$$

[分子速度との比較] 音速の表式 (9.34) を状態方程式 (9.26) と内部エネルギーの表式 (9.29) を用いてさらに書き換えると

$$c = \sqrt{\frac{5P}{3\rho}} = \sqrt{\frac{5RT}{3\mu}} = \sqrt{\frac{10}{9}\varepsilon}. \quad (9.35)$$

さらに、気体分子運動論を使うと、単原子分子気体の内部エネルギーは分子の熱運動のエネルギー $\frac{1}{2}v^2$ に等しいことがわかる。これを代入すると

$$c = \sqrt{\frac{5}{9}v^2} \simeq v. \quad (9.36)$$

すなわち、**音速は気体分子の熱運動の速さ程度**であることがわかる。

[空気の音速] 同様の導出を2分子原子気体について行くと

$$\varepsilon = \frac{5}{2} \frac{RT}{\mu}, \quad c = \sqrt{\frac{7}{5} \frac{RT}{\mu}} \quad (9.37)$$

となる。これに窒素のモル質量 28.0×10^{-3} kg/mol, 温度として $T = 273$ K を代入して計算すると $c \simeq 337$ m/s となる。これは、 0°C の空気中の音速 331.45 m/s をおおよそ再現する。