相対性理論の数理

棚橋 典大

[九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所]

相対性理論の数理

- ✓ 光と時計の理論である**特殊相対性理論**
- ✓ 重力の理論である**一般相対性理論**

この２つの物理基礎理論を、式をいくらか使って紹介します

相対性理論の歴史（抜粋）

1905 **特殊相対性理論**を発表 (アインシュタイン)

1915 **一般相対性理論**を発表 (アインシュタイン)

1915 **ブラックホール**を予言 (シュバルツシルト)

1916 **重力波**の存在を予言 (アインシュタイン)

・

・

・

2015 ブラックホールが放つ**重力波**の直接観測 (LIGO)

“Captain Einstein”

Dept. of Physics & Astronomy, Ghent University
http://captaineinstein.org

“Captain Einstein”

◆ベルギーのゲント大学 物理・天文学科が作成した特殊相対性理論の紹介ムービー

◆ゲントのLeie川を下るボートツアー

➢**本来の光速** ＝ **秒速 約３０万キロメートル**

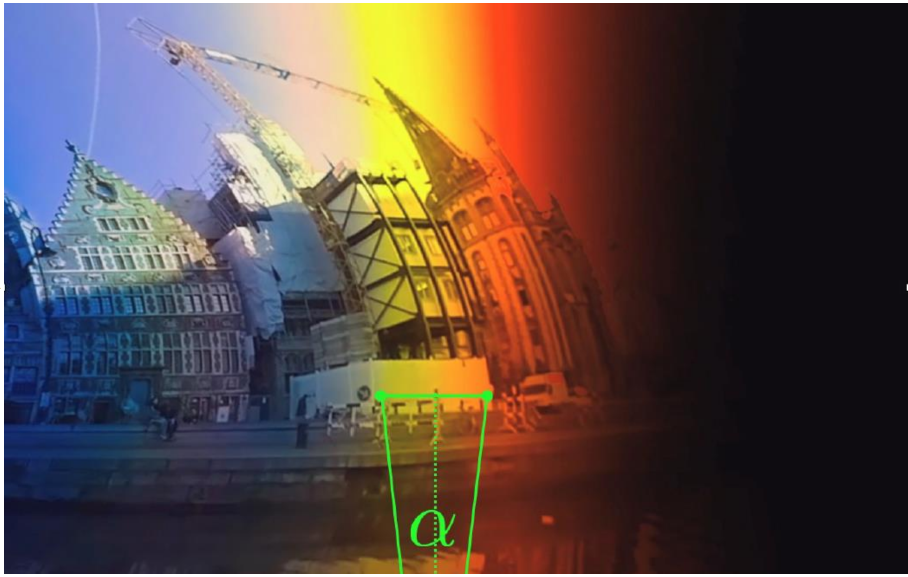
➢**ムービー中の光速 ＝ 時速２０キロメートル**

ボートの速さ v ＝ 光速の40%, 70%, 85%, 95%, …

進行方向

Dept. of Physics & Astronomy, Ghent University
http://captaineinstein.org

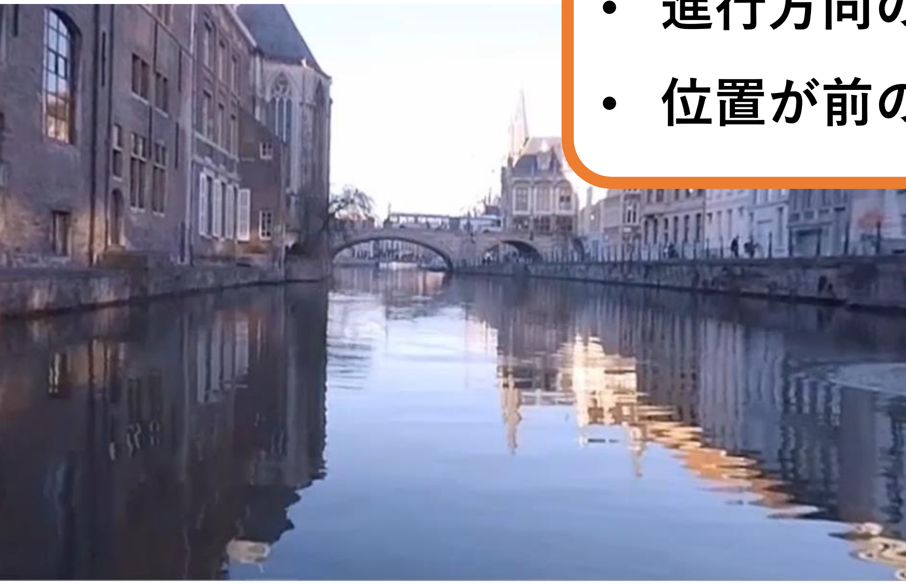
横方向



進行方向

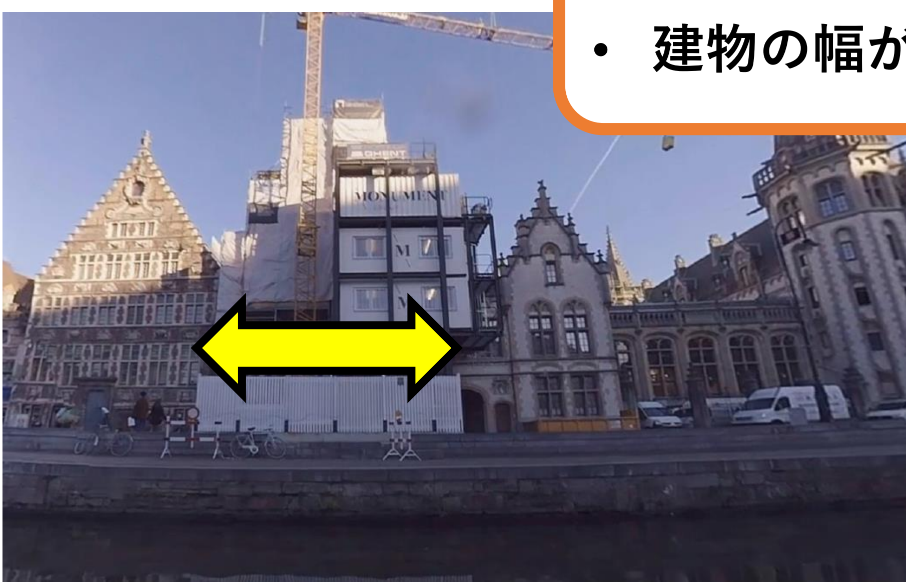
nt. of Physics & Astronomy, Ghent University
http://captaineinstein.org

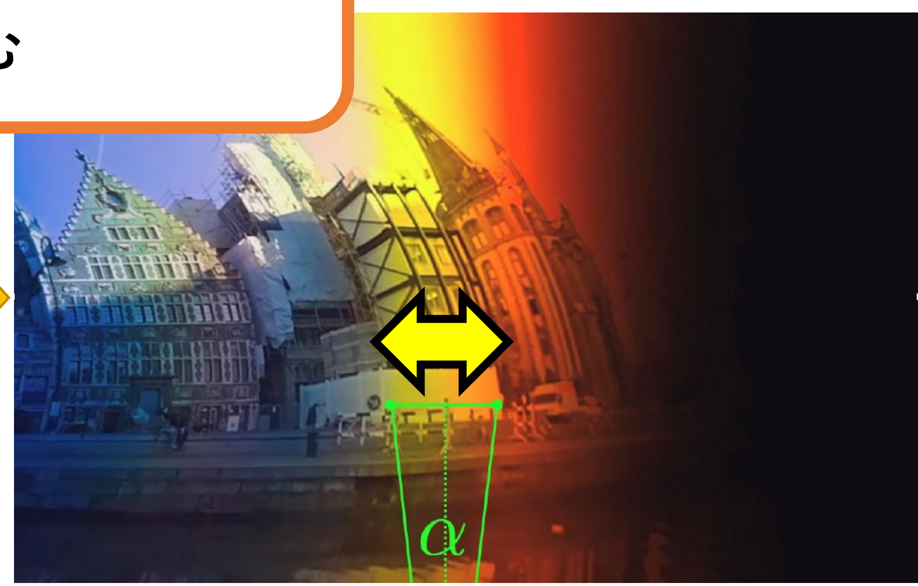
- 進行方向の色が青に変化
- 位置が前の方にずれる



横方向

- 後方の色が赤に変化
- 建物の幅が縮む

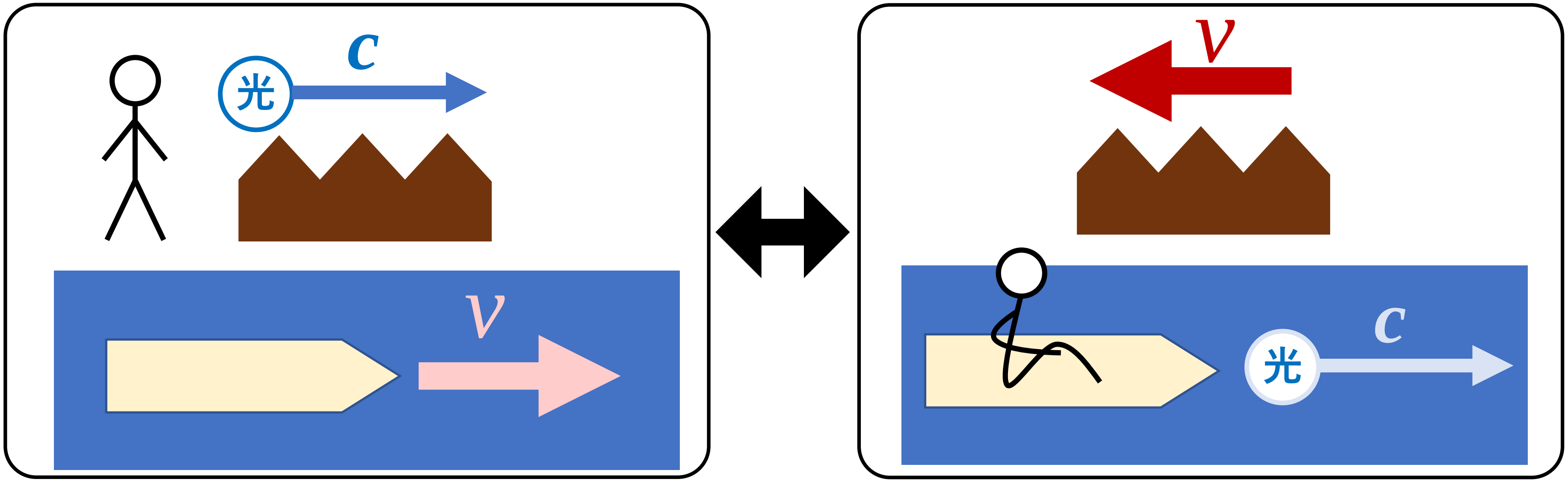




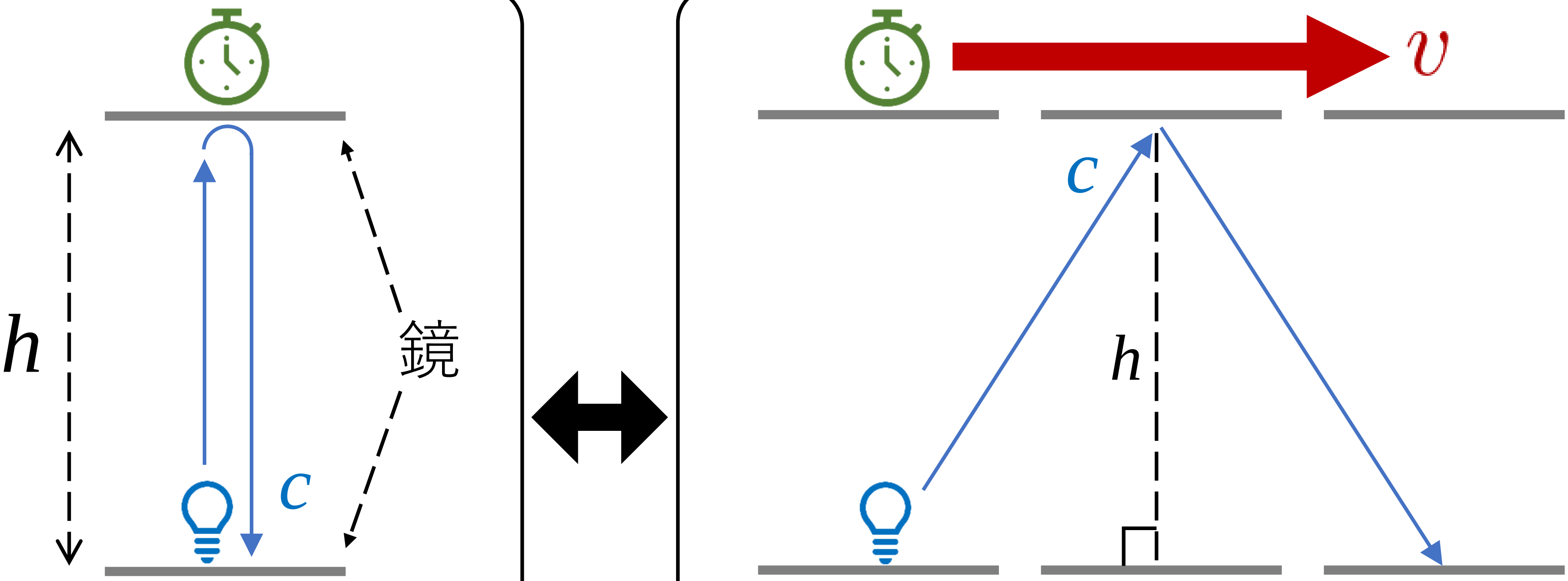
特殊相対性理論の原理

- 特殊相対性原理
  「どの速度一定の系から見ても物理法則は同じ」

- **光速度一定の原理**
  「どの慣性系から見ても光速 c は同じ」



動く時計は遅く見える

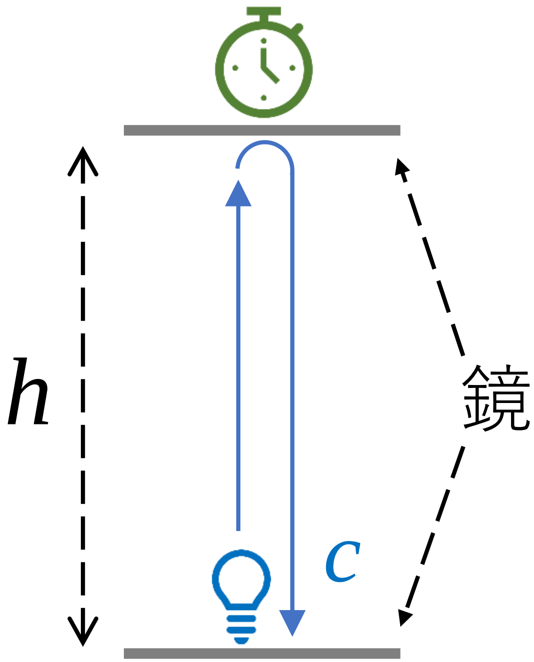


光の往復時間 T は

$$T = \frac{2h}{c}$$

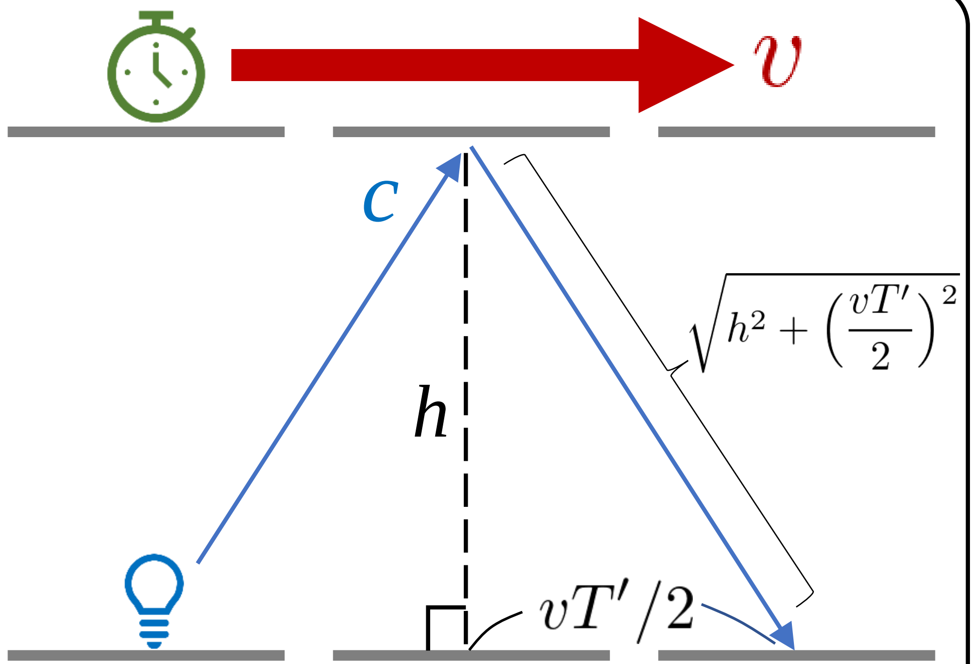
外から計った往復時間 T' は？

動く時計は遅く見える



光の往復時間 T は

$$T = \frac{2h}{c}$$

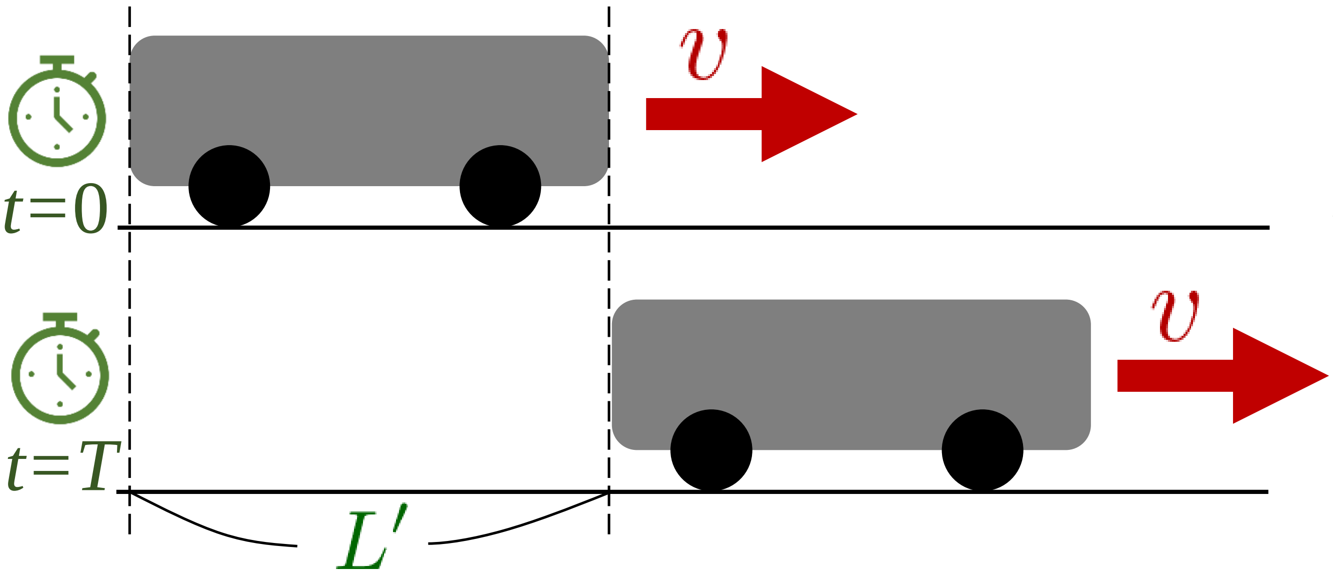


外から計った往復時間 T' は

$$\frac{T'}{2} = \frac{\sqrt{h^2 + \left(\frac{vT'}{2}\right)^2}}{c} \Rightarrow T' = \frac{2h}{c} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

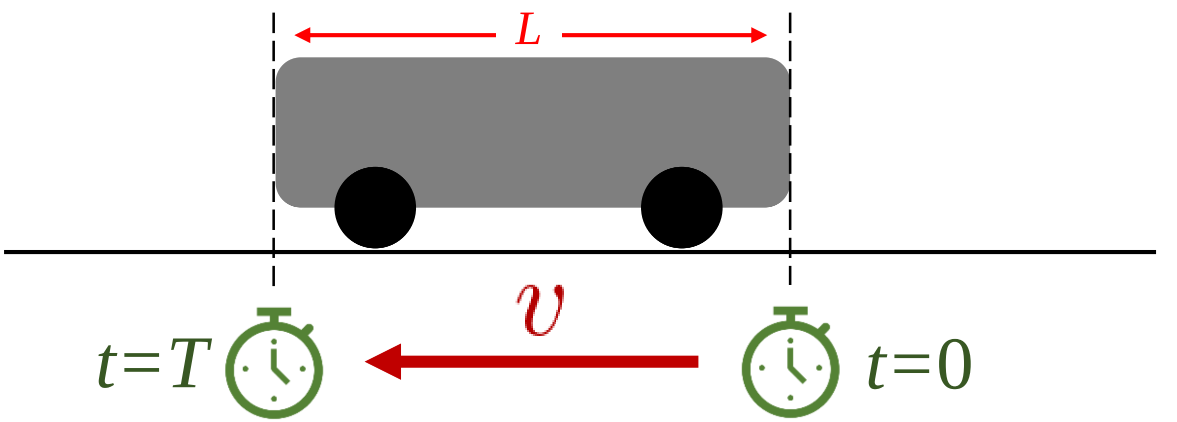
∴ 動く時計は $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 倍遅く見える

動く物体は縮んで見える



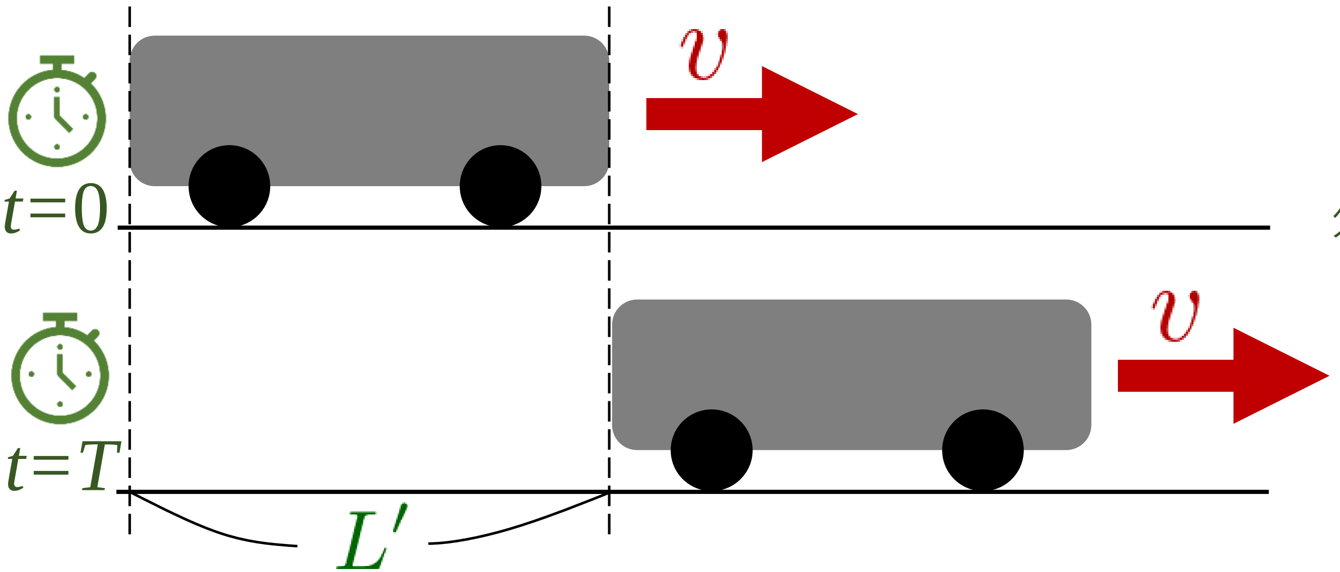
外から計る車長 L' は

$$L' = vT$$



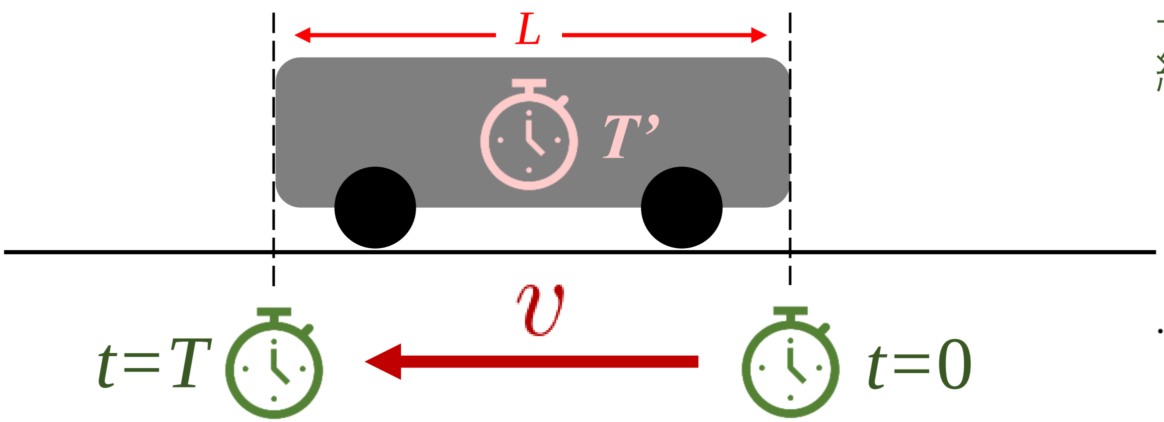
車に乗った人が測る車長 L は？

動く物体は縮んで見える



外から計る車長 L' は

$$L' = vT$$

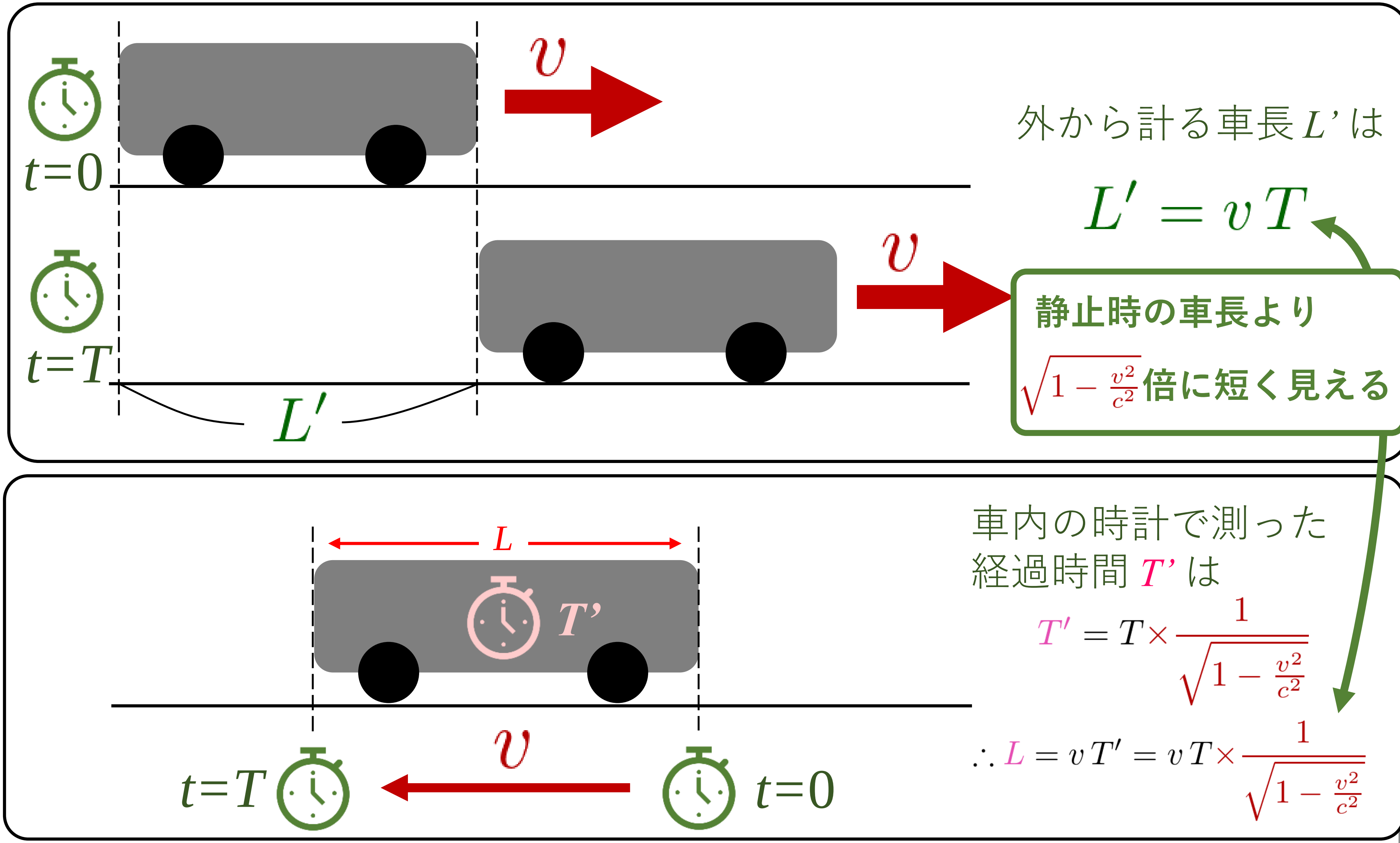


車内の時計で測った経過時間 T' は

$$T' = T \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore L = vT' = vT \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

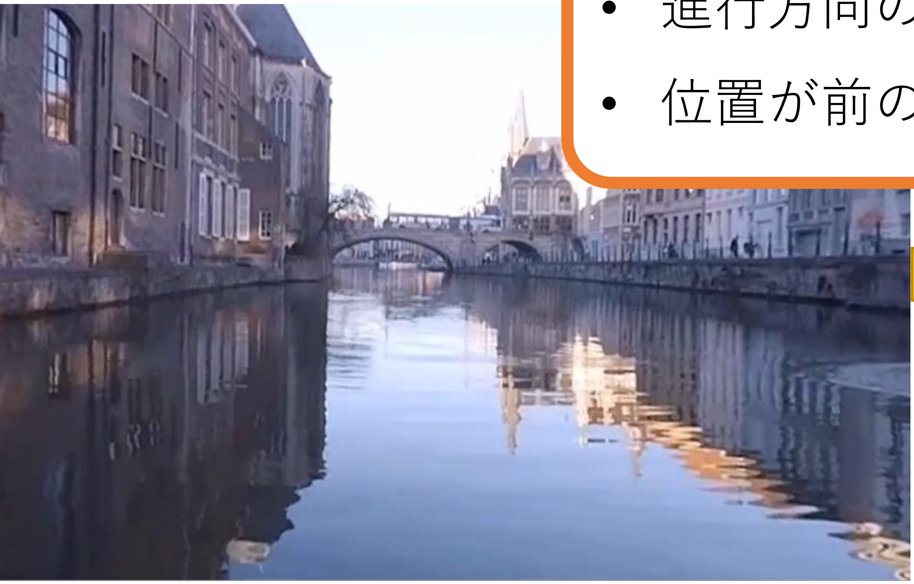
動く物体は縮んで見える



nt. of Physics & Astronomy, Ghent University
http://captaineinstein.org

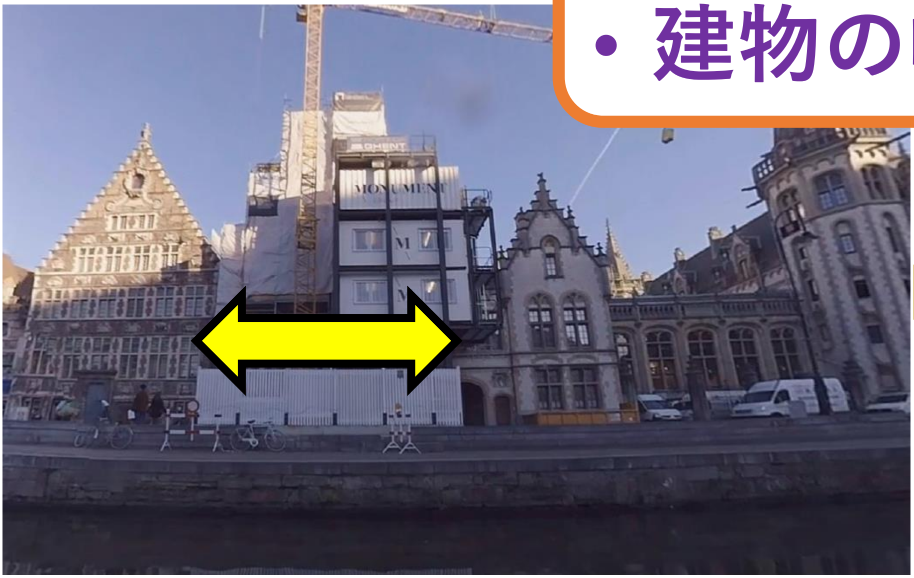
進行方向

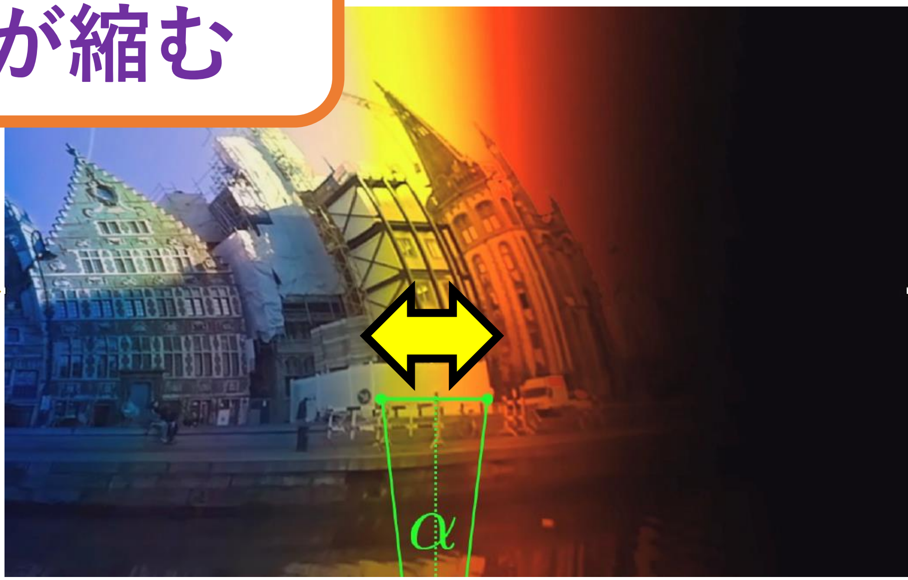
- 進行方向の色が青に変化
- 位置が前の方にずれる



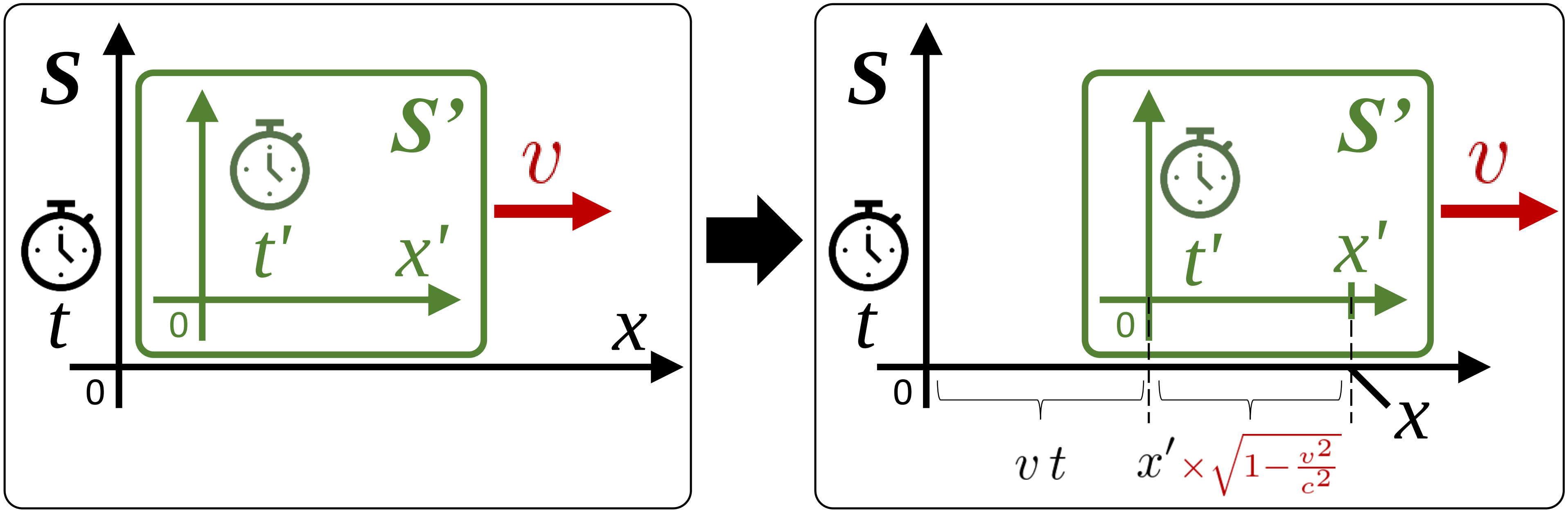
横方向

- 後方の色が赤に変化
- **建物の幅が縮む**





ローレンツ変換



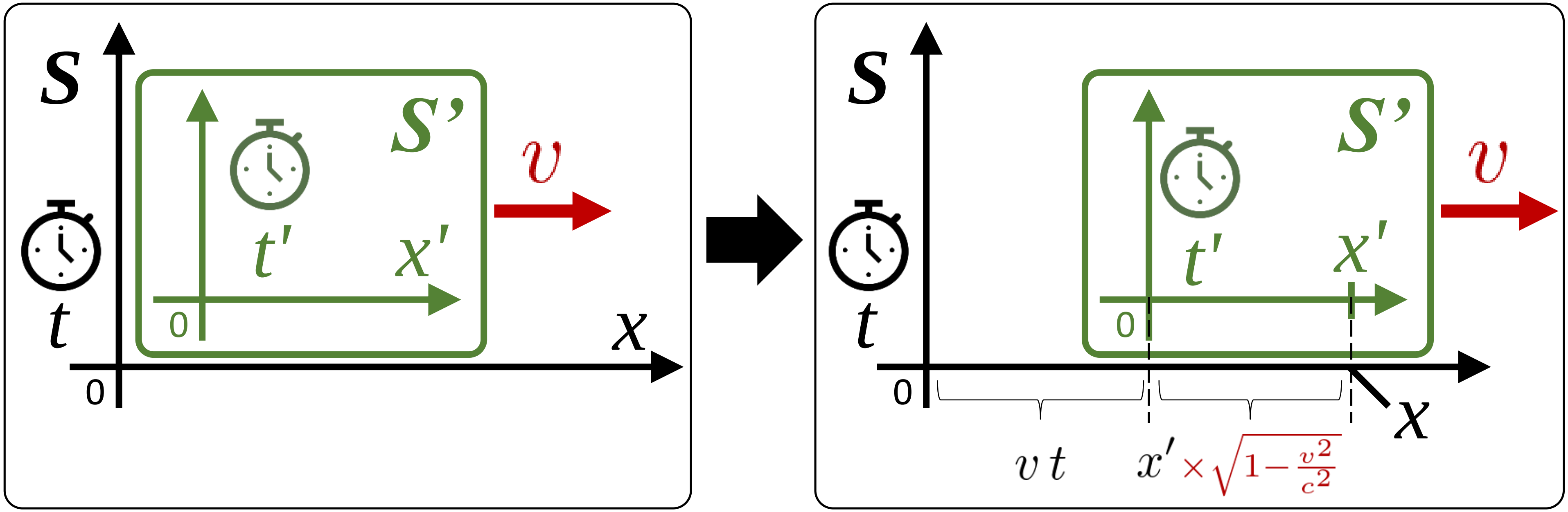
静止系 S の時間 t　位置 x
運動系 S' の時間 t' 位置 x'

の間の関係は、$\gamma := \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$ とすると

$$x = v\,t + x' \times \frac{1}{\gamma} \qquad \therefore x' = \gamma\,(x - v\,t).$$

さらに、時間 t, t' の関係は $ct' = \gamma\left(ct - \dfrac{v}{c}\cdot x\right)$ となることを示せる。

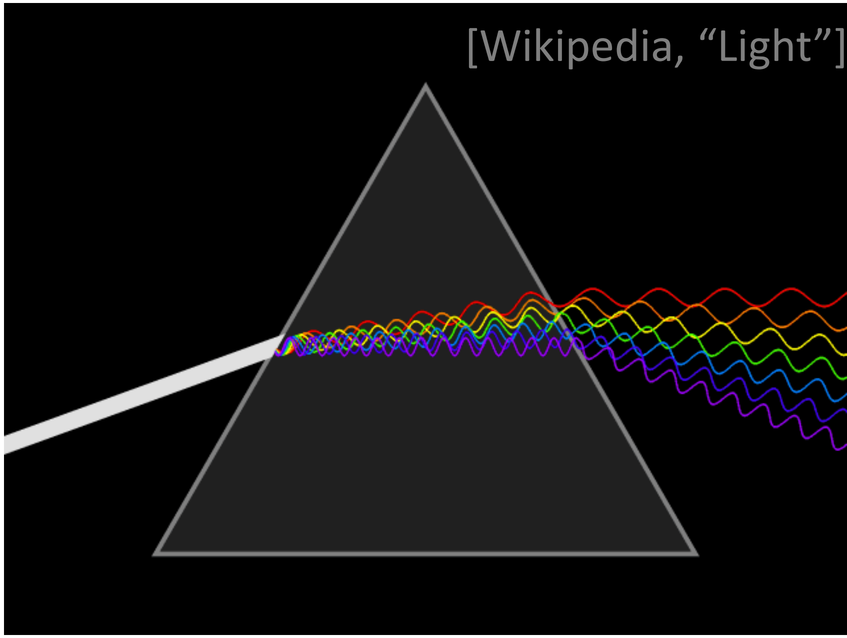
ローレンツ変換



静止系 S から速度 v の系 S' への座標変換（**ローレンツ変換**）は　$\left(\gamma := \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \dfrac{v}{c}\cdot x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \dfrac{v}{c}\cdot ct\right) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

相対論的ドップラー効果、光行差

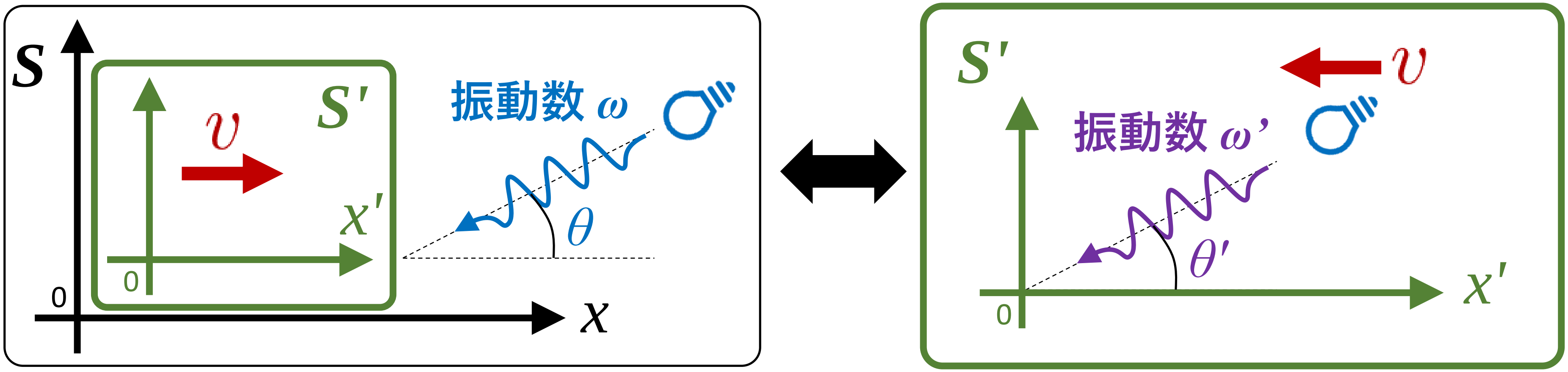


✓**光 ＝ 電磁場の波**

✓**青い光**＝振動数の大きい光

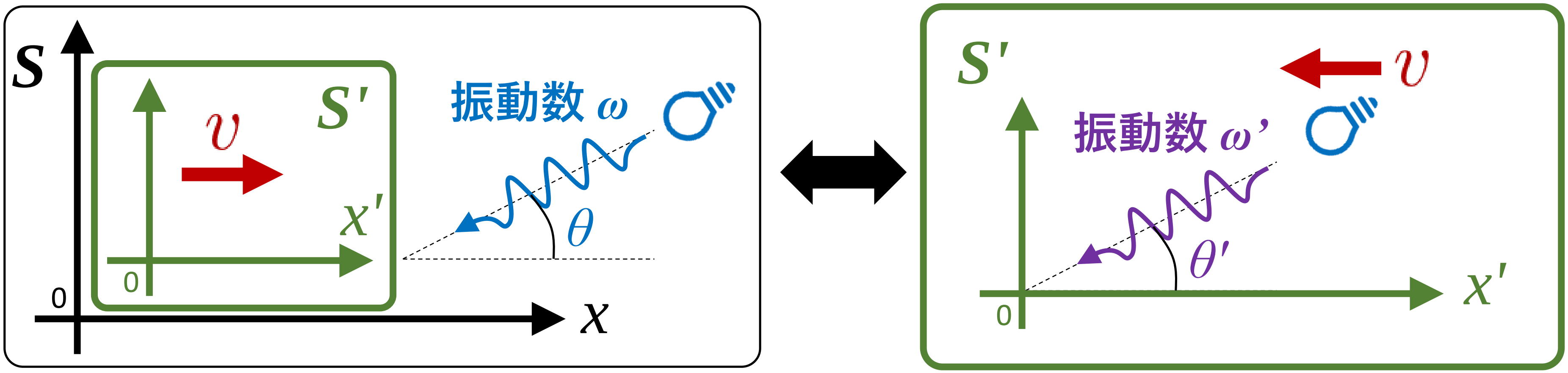
✓**赤い光**＝振動数の小さい光

静止系 *S* の振動数 *ω*, 角度 *θ* の光を**運動系 *S'***で見ると、**振動数 *ω'*, 角度 *θ'* はどうなるか？**



相対論的ドップラー効果、光行差

静止系 S の振動数 ω, 角度 θ の光を**運動系 S'** で見ると、**振動数 ω', 角度 θ' はどうなるか？**

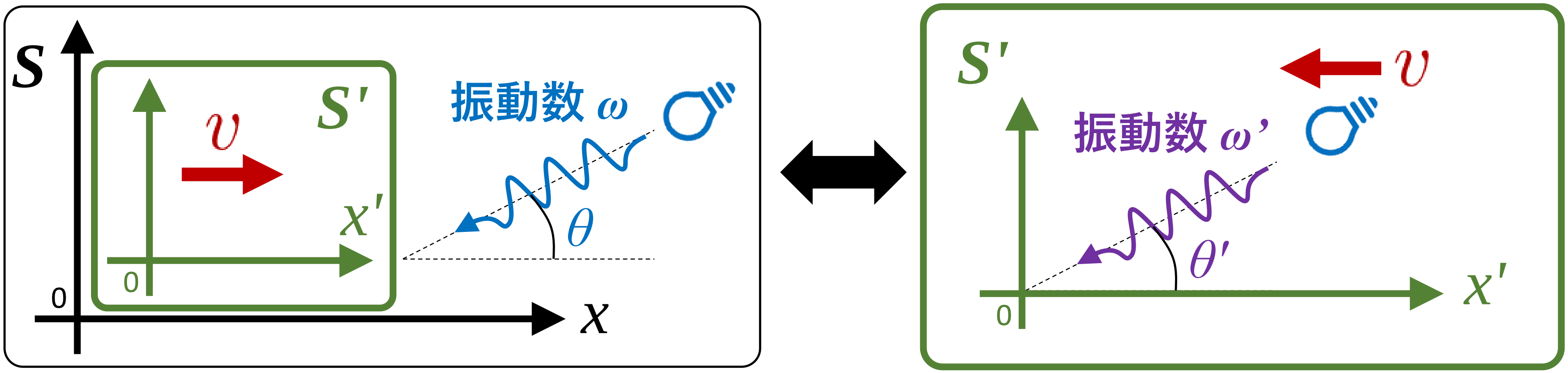


ローレンツ変換に基づいて計算すると、**振動数 ω', 角度 θ'** は

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \dfrac{v}{c}\cdot x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \dfrac{v}{c}\cdot ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega' = \omega \times \gamma\left(1 + \dfrac{v\cos\theta}{c}\right) \\ \cos\theta' = \dfrac{\cos\theta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta} \end{cases}$$

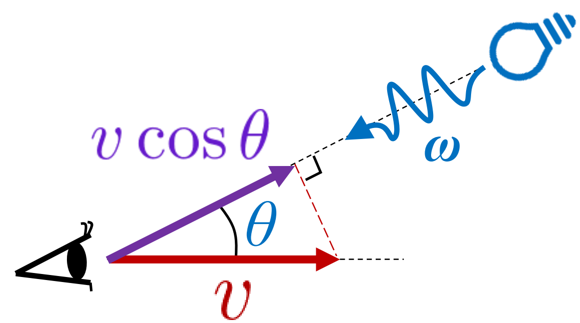
相対論的ドップラー効果、光行差

静止系 S の振動数 ω, 角度 θ の光を運動系 S' で見ると、振動数 ω', 角度 θ' はどうなるか？



相対論的ドップラー効果： 光源に近づくとき、光の振動数は上昇する

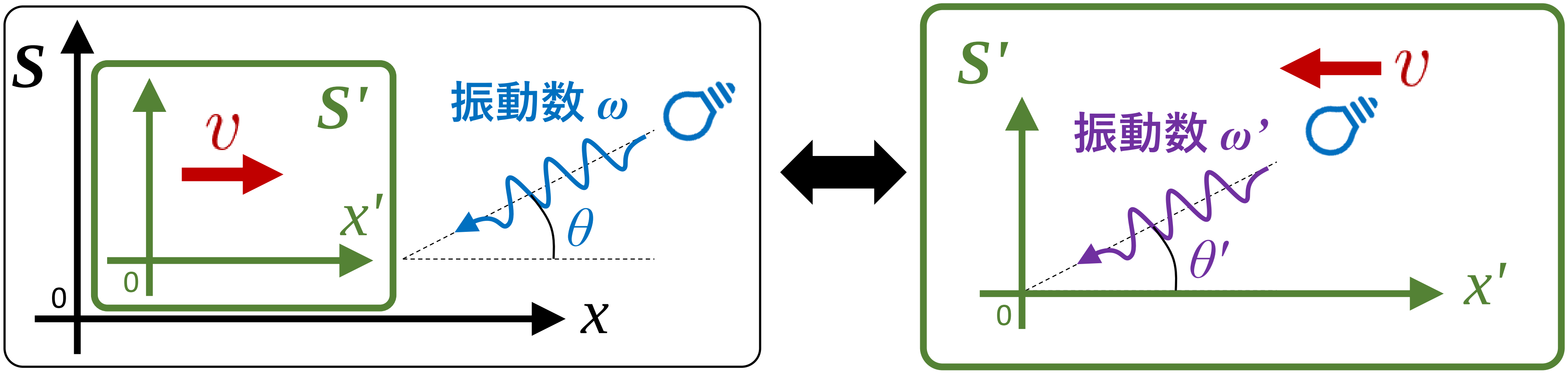
$$\omega' = \omega \times \gamma \left(1 + \frac{v\cos\theta}{c}\right)$$



➔ 進行方向からくる光は、元の色と比べて青く見える（逆向きなら赤く見える）

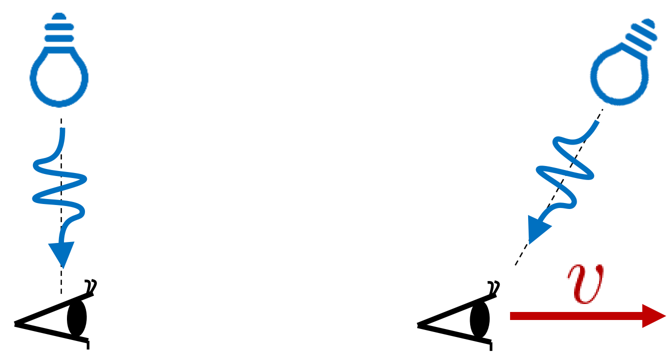
相対論的ドップラー効果、光行差

静止系 S の振動数 ω, 角度 θ の光を運動系 S' で見ると、振動数 ω', 角度 θ' はどうなるか？



光行差： 光源に対して運動すると、光の飛んでくる向きは前寄りにずれる

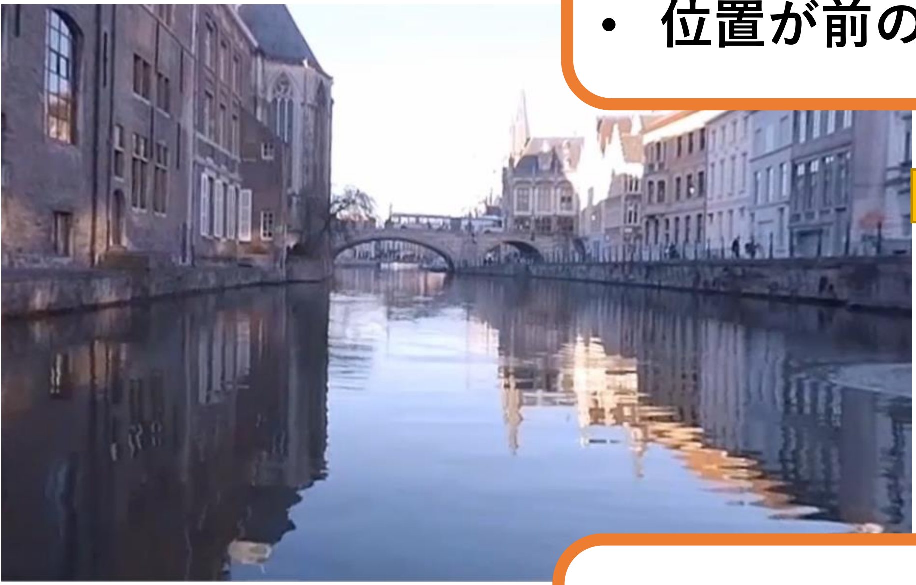
$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}$$



➔ 進行方向の景色は、元の位置より前方に寄って見える

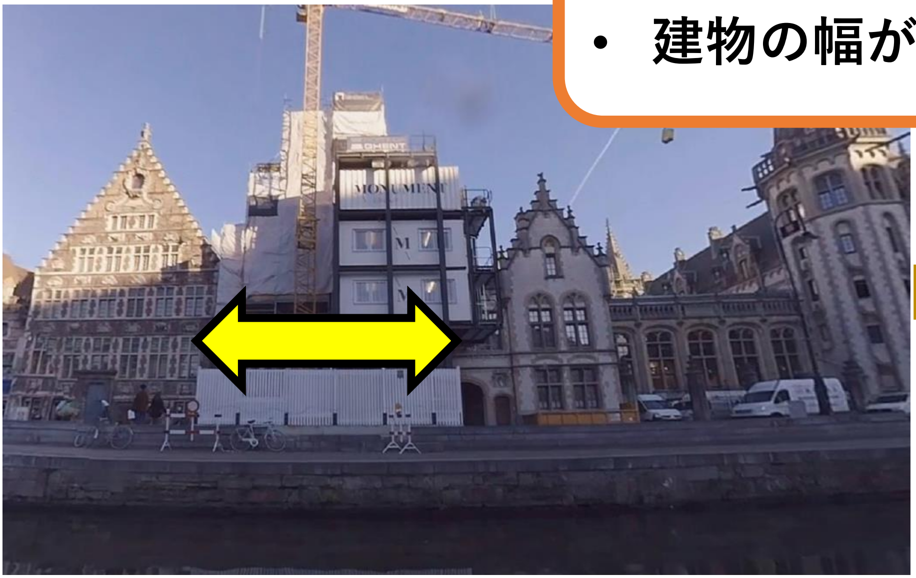
進行方向

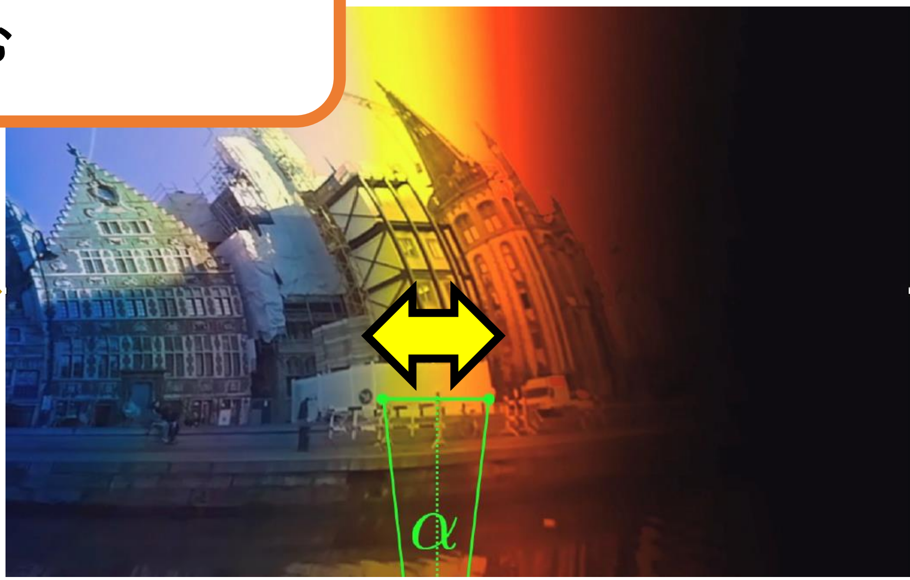
- 進行方向の色が青に変化
- 位置が前の方にずれる



横方向

- 後方の色が赤に変化
- 建物の幅が縮む

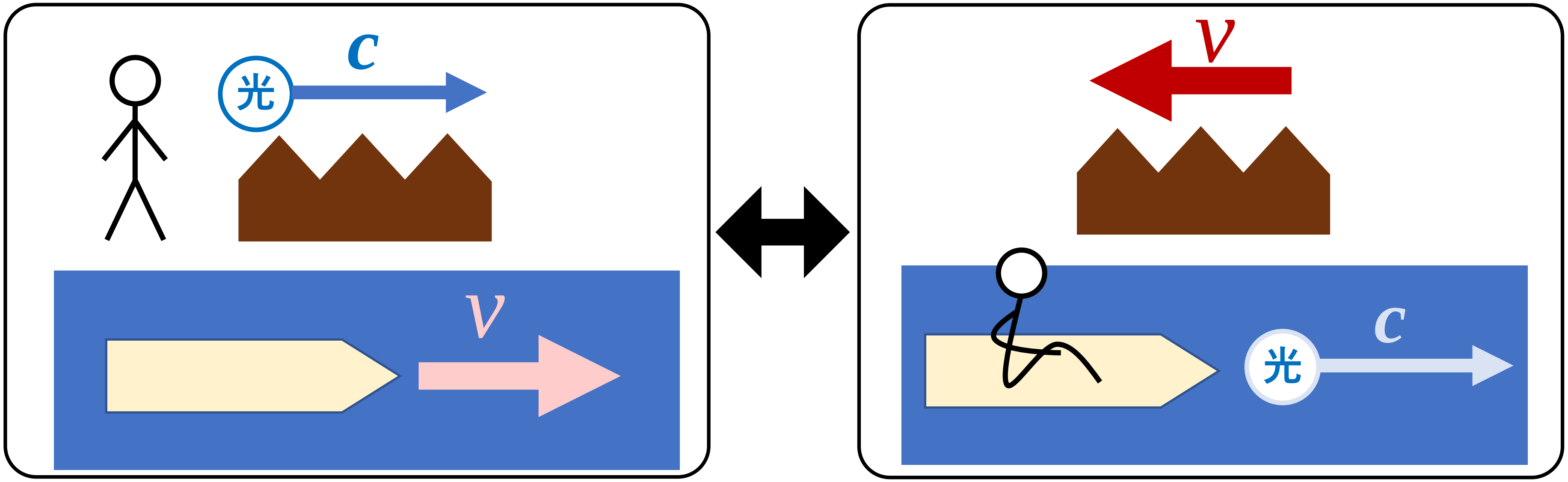




まとめ：特殊相対性理論

- **光速度一定の原理**

「どの慣性系から見ても光速 c は同じ」



➔ **物理量（時間 t, 位置 x, 光の振動数 ω, …）はローレンツ変換に従って変化する。**

$$c\,t' = \gamma\left(c\,t - \frac{v}{c}\cdot x\right), \quad x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}\cdot c\,t\right)$$

$$\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

相対性理論の数理

- ✓ 光と時計の理論である**特殊相対性理論**
- ✓ 重力の理論である**一般相対性理論**

この２つの物理基礎理論を、式をいくらか使って紹介します

一般相対性理論の原理

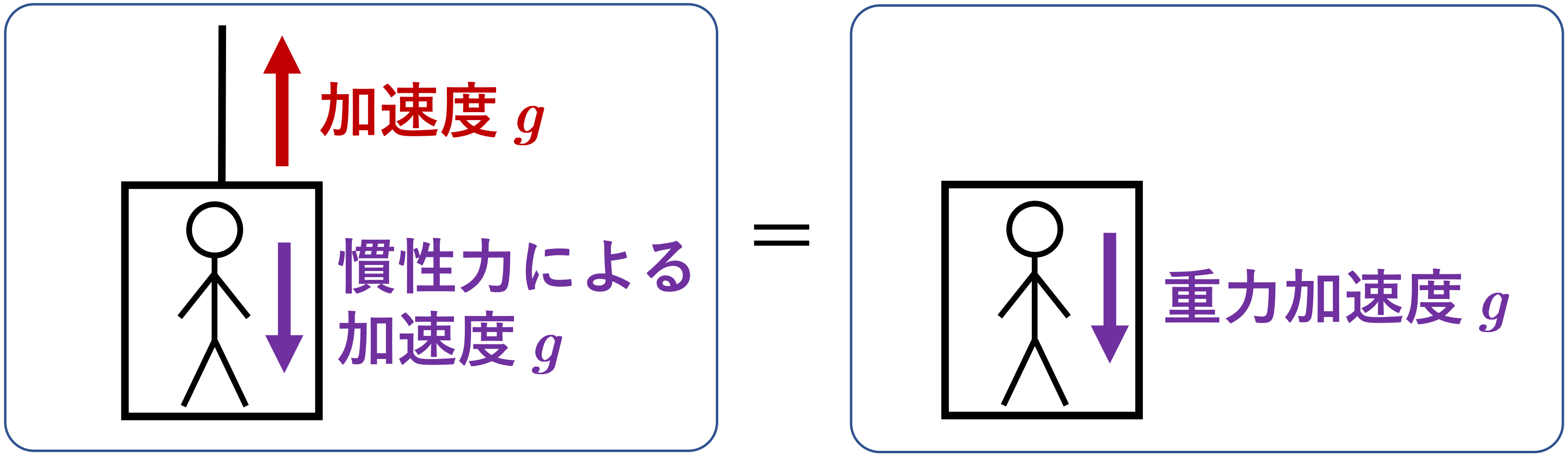
- 一般相対性原理

  「どんな運動をする系から見ても物理法則は同じ」

- **等価原理**

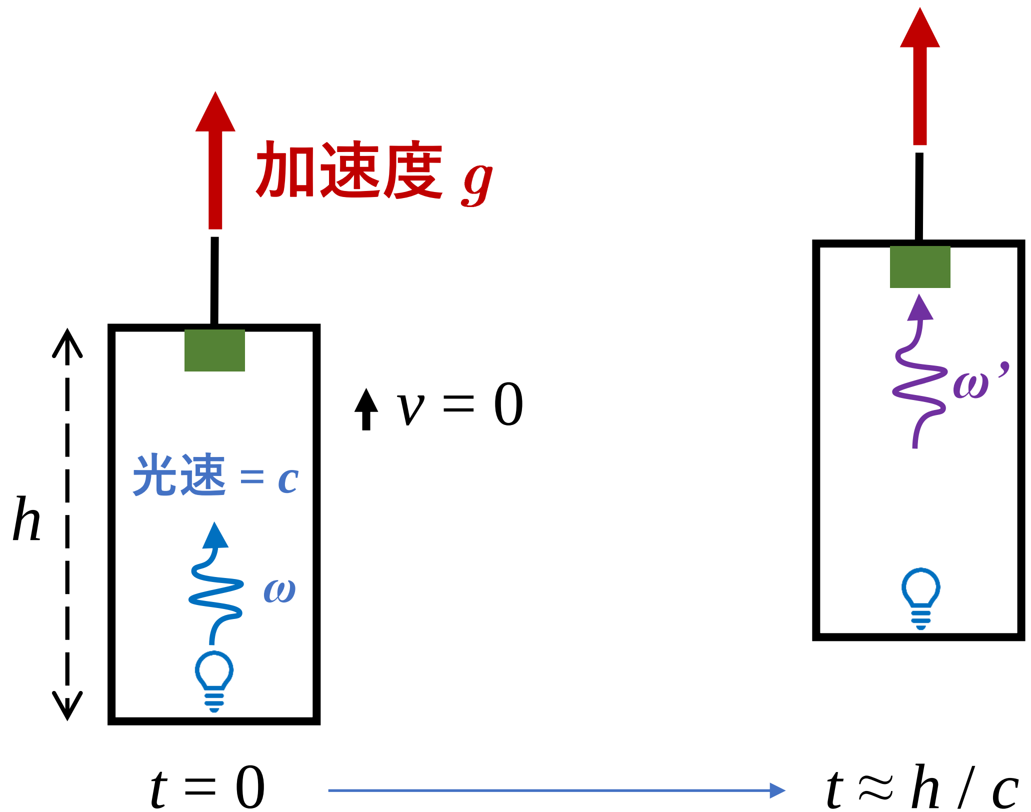
  「十分小さな領域では、

  加速度運動による力と**重力**とは見分けがつかない」



重力による時間の遅れ

- 時刻 $t = 0$ の速度が $v = 0$で、加速度 g で上昇するエレベーター（高さ h）
- 床から振動数 ω の光を飛ばして天井に届いたとき、振動数 ω' はいくらか？



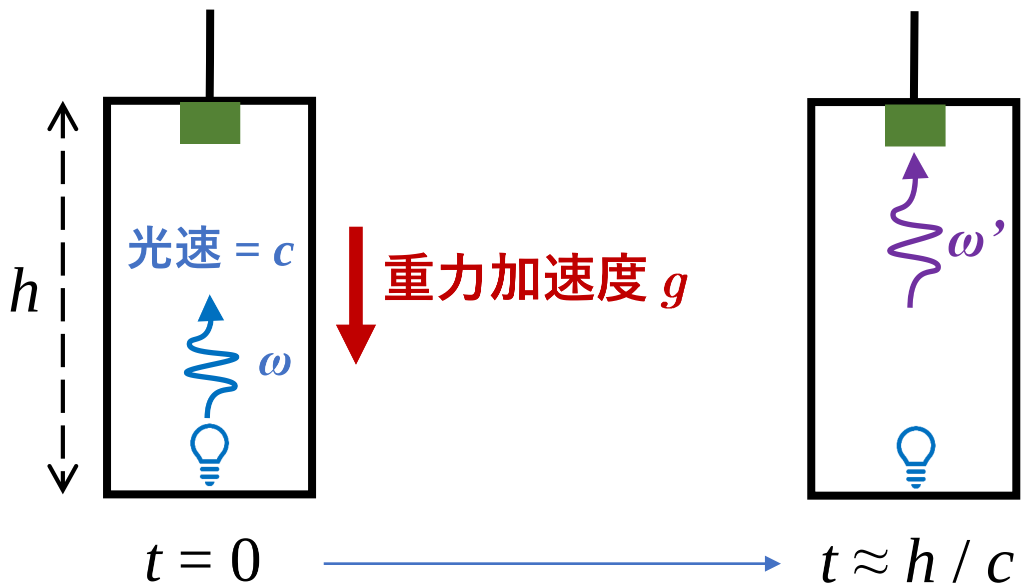
光のドップラー効果により

$$\omega' \simeq \omega \times \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$
$$= \omega \times \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)$$

ω'は、元の振動数ωより小さくなる。

重力による時間の遅れ

- 重力加速度 g のかかった静止するエレベーター（高さ h）
- 床から振動数 ω の光を飛ばして天井に届いたとき、振動数 ω' はいくらか？



等価原理によれば、
先程と同じ結果になるので

$$\omega' \simeq \omega \times \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

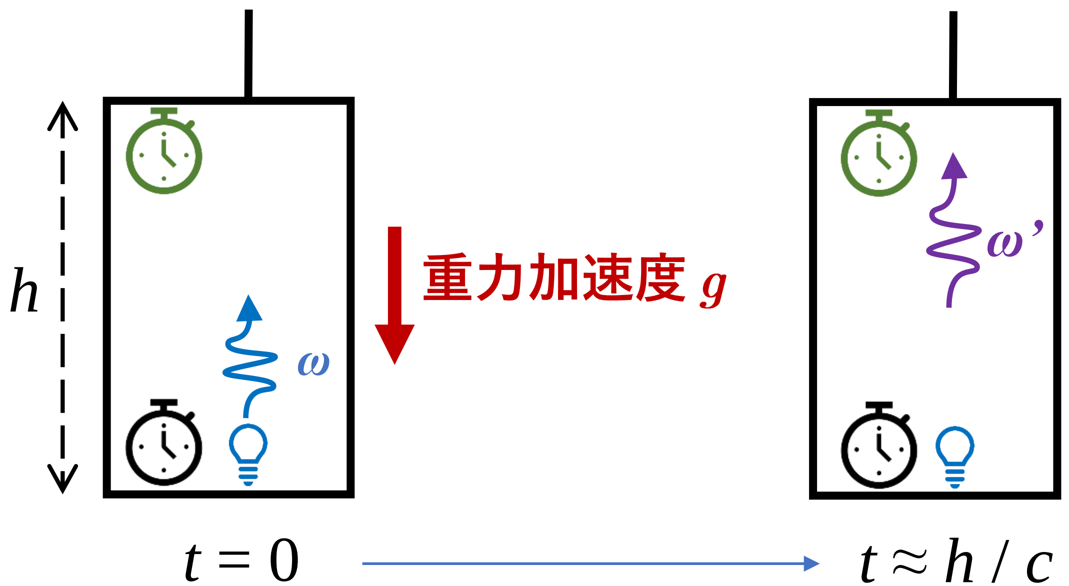
$$= \omega \times \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)$$

ω'は、元の振動数ωより
小さくなる。

重力による時間の遅れ

- **重力加速度** g のかかった**静止するエレベーター**（高さ h）
- **床に、光の振動数とシンクロして進む時計を置く。**

天井でこの時計を見たとき、その時計の進む速さは？



ω' が元の値 ω より小さく見えるのに対応して、
床の時計は遅く見える。

遅くなる割合は

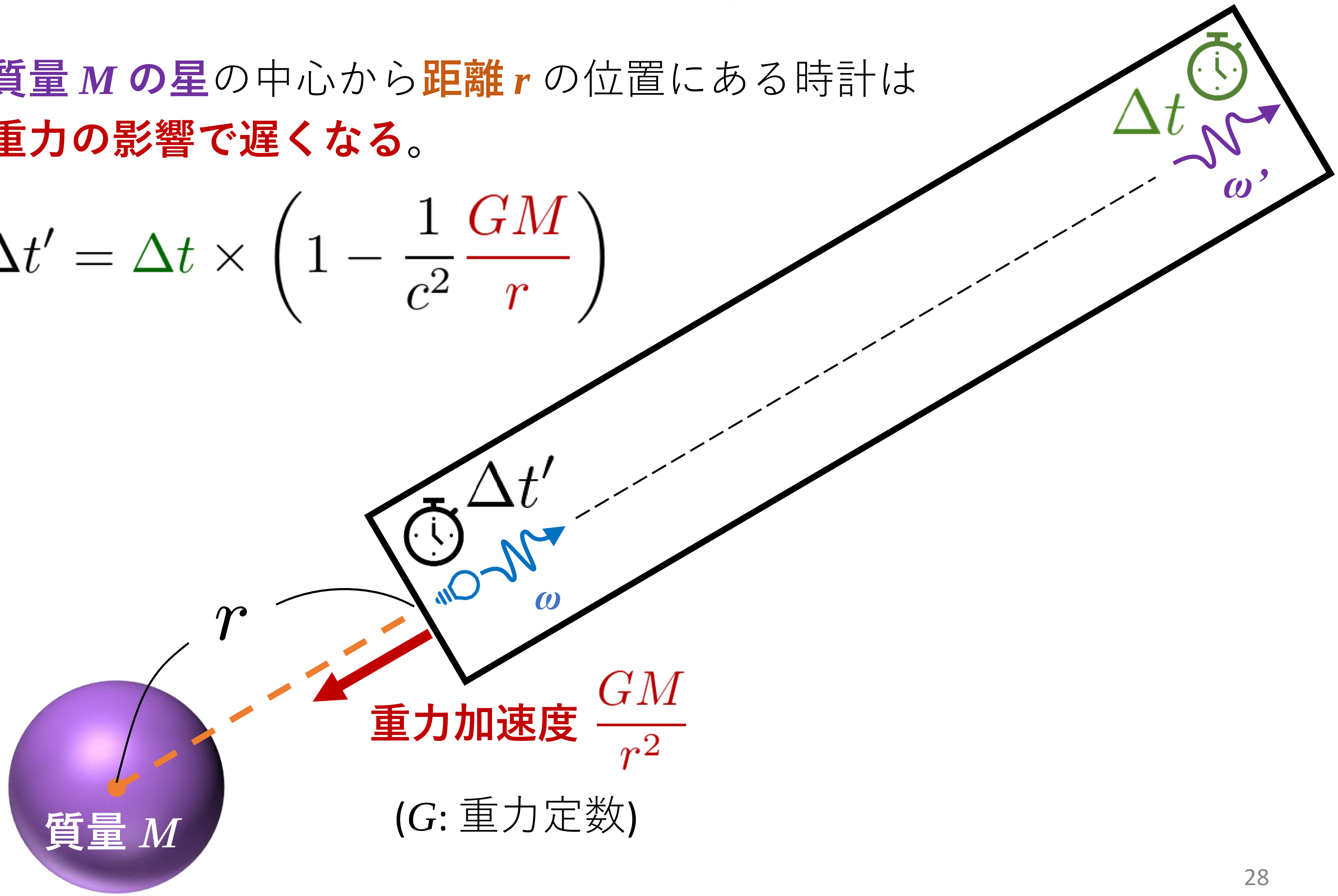
$$\frac{\omega'}{\omega} = 1 - \frac{gh}{c^2}$$

∴　重力場中にある時計は遅く見える。

重い星の周りの時計の遅れ

質量 M の星の中心から距離 r の位置にある時計は
重力の影響で遅くなる。

$$\Delta t' = \Delta t \times \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{r}\right)$$

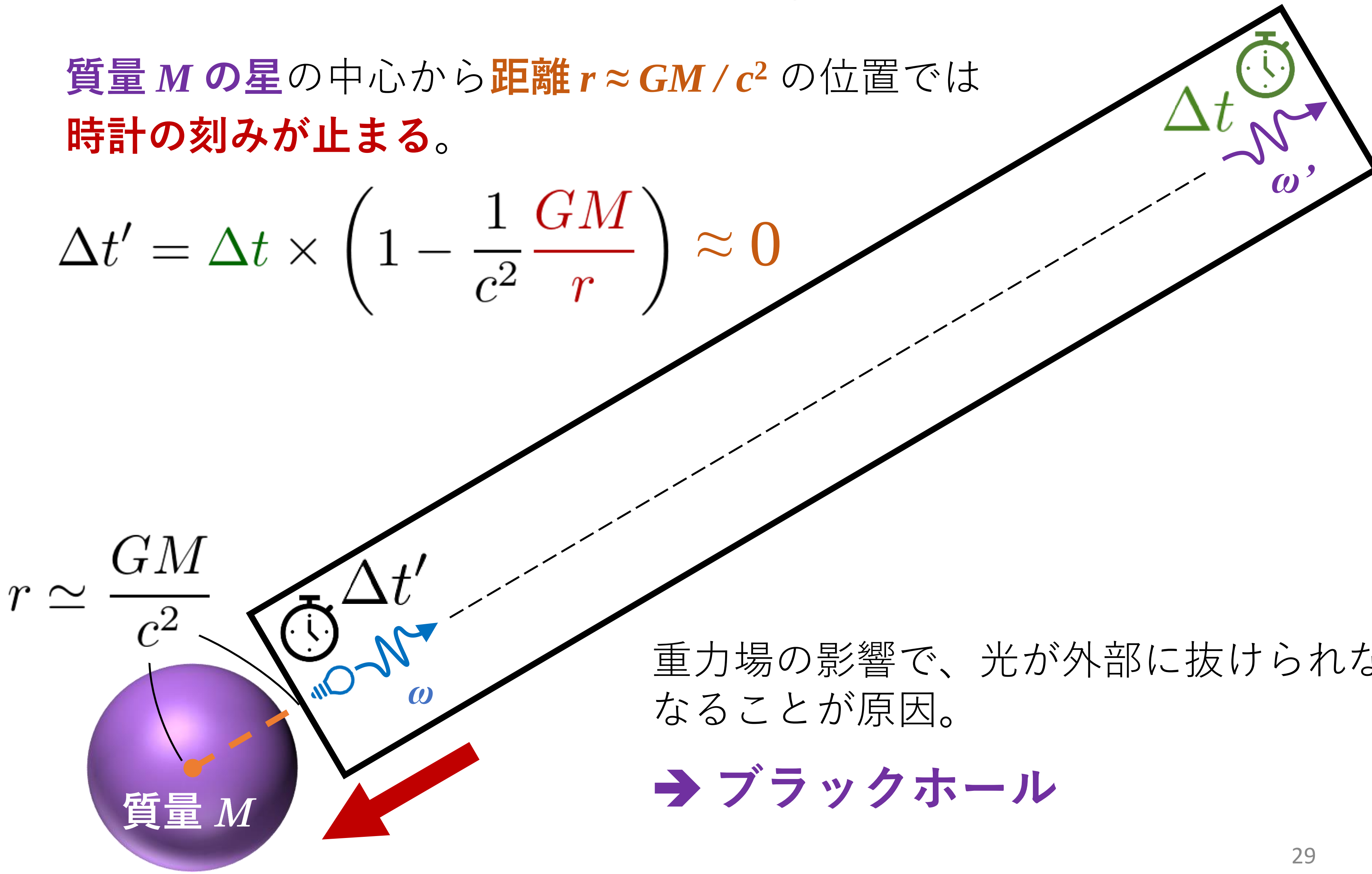


(*G*: 重力定数)

重い星の周りの時計の遅れ

質量 *M* の星の中心から**距離 *r* ≈ *GM* / *c*²** の位置では
時計の刻みが止まる。

$$\Delta t' = \Delta t \times \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{r}\right) \approx 0$$



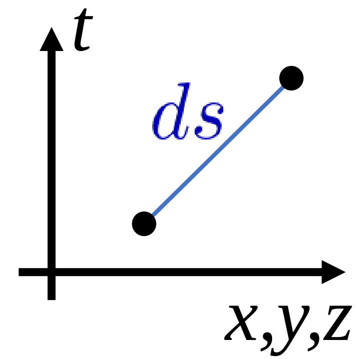
重力場の影響で、光が外部に抜けられなくなることが原因。

➔ **ブラックホール**

◆ **時空計量**： **時間 (*t*), 空間 (*x,y,z*) のゆがみ具合を記述する式。**

二点間の距離 ds の式に出てくる係数。

◆ **アインシュタイン方程式**：**時空計量を決める方程式。**



- **ゆがみのない時空の計量**

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= -dt^2 + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

- **ブラックホール時空の計量**

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

- **重力場の波（重力波）を表す計量**

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + \left[1 + h_+(t,x)\right]dy^2 + \left[1 - h_+(t,x)\right]dz^2$$
$$+ 2h_\times(t,x)dydz$$

重力波

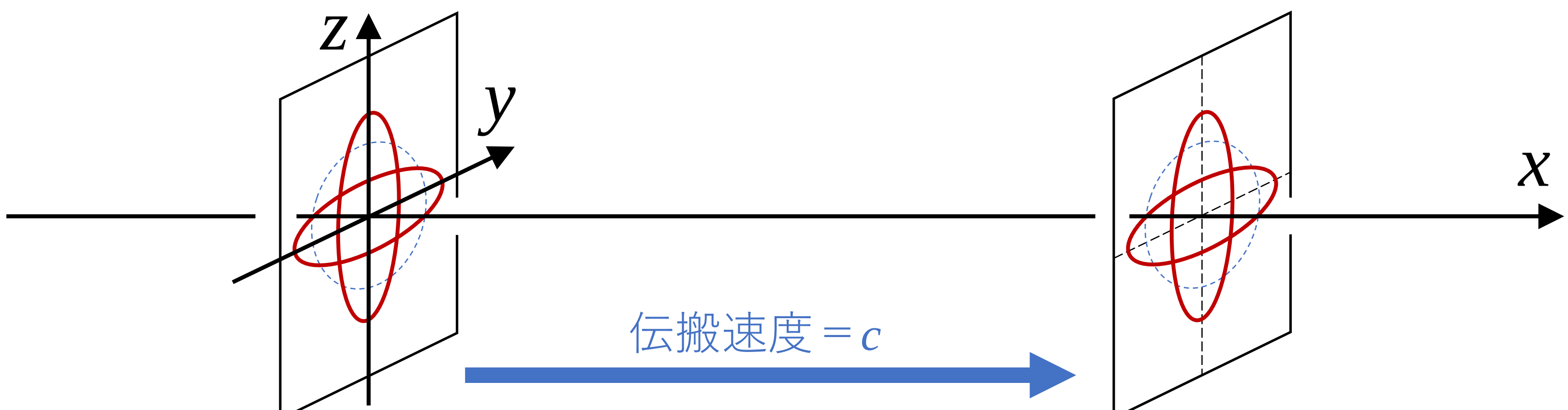
- **重力場の波（重力波）を表す計量**

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + [1 + h_+(t,x)]\,dy^2 + [1 - h_+(t,x)]\,dz^2 + 2h_\times(t,x)dydz$$

アインシュタイン方程式→ $-\dfrac{\partial^2 h_{+,\times}}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 h_{+,\times}}{\partial x^2} = 0$

→ $h_{+,\times} = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$

光と同じ速さ c で x 方向に伝搬する、**y, z 方向の時空のゆがみ**を表している。



2015年9月に、アメリカの**LIGO実験**が**重力波の直接観測**に史上初めて成功

重力波

関連ニュースはこちら

初観測　一般相対性理論裏付け　宇宙の謎に光　米チーム成功

毎日新聞 2016年2月12日　東京朝刊

2016.2.12 06:05　産経新聞

文字の大きさ　小　中　大　印刷

宇宙の「重力波」を初検出　米チームが確認　アインシュタインが１００年前に予言

朝日新聞デジタル ＞ 記事

サイエンス　宇宙・天文

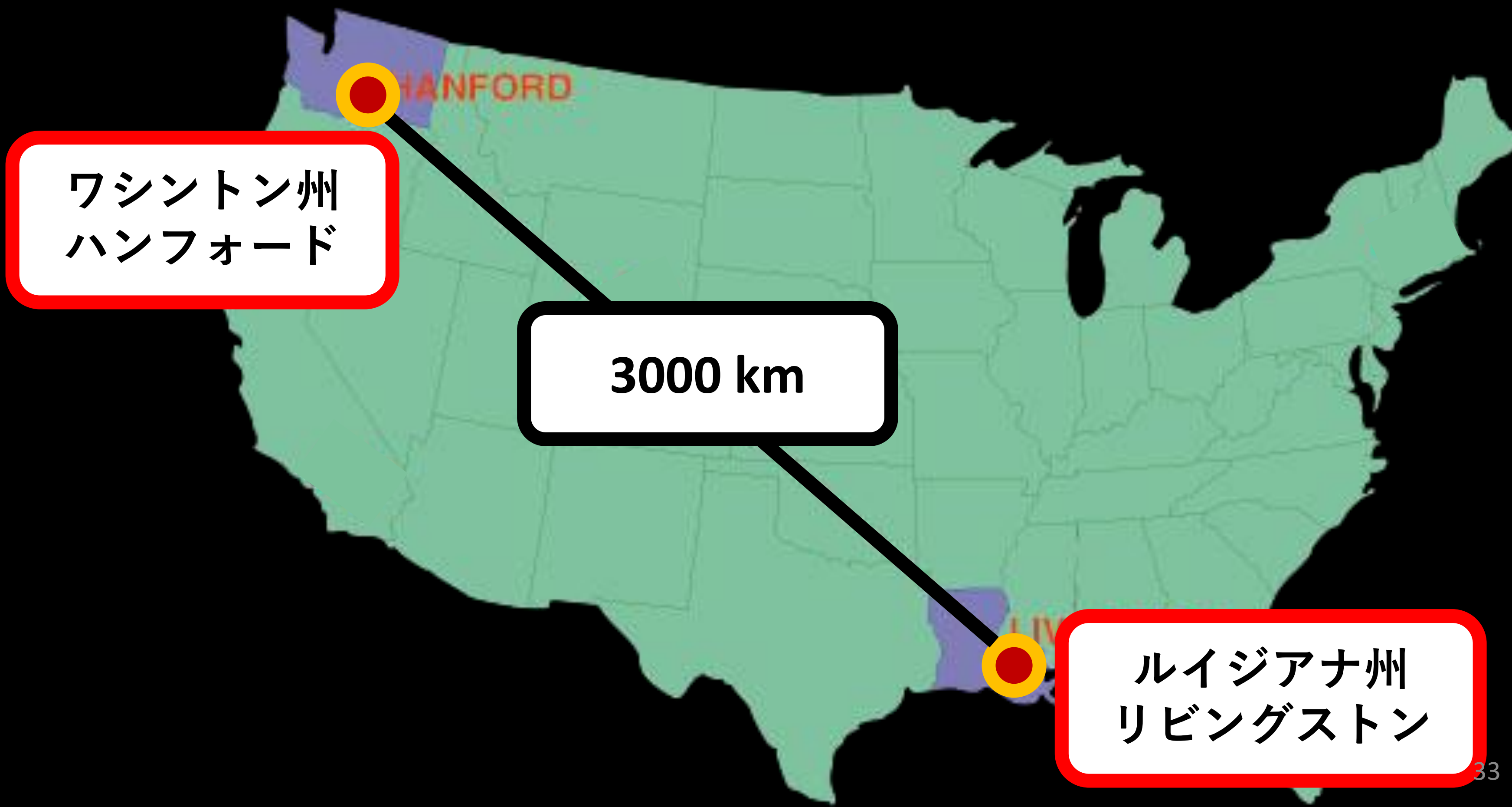
重力波の初観測、宇宙探究の新境地に　世紀の宿題に答え

2016年2月12日09時10分

➔ **2017年 ノーベル物理学賞 受賞**（R. Weiss, B. Barish, K. S. Thorne）

LIGO実験による重力波観測

重力波検出器２基で、ほぼ同時に信号をキャッチ

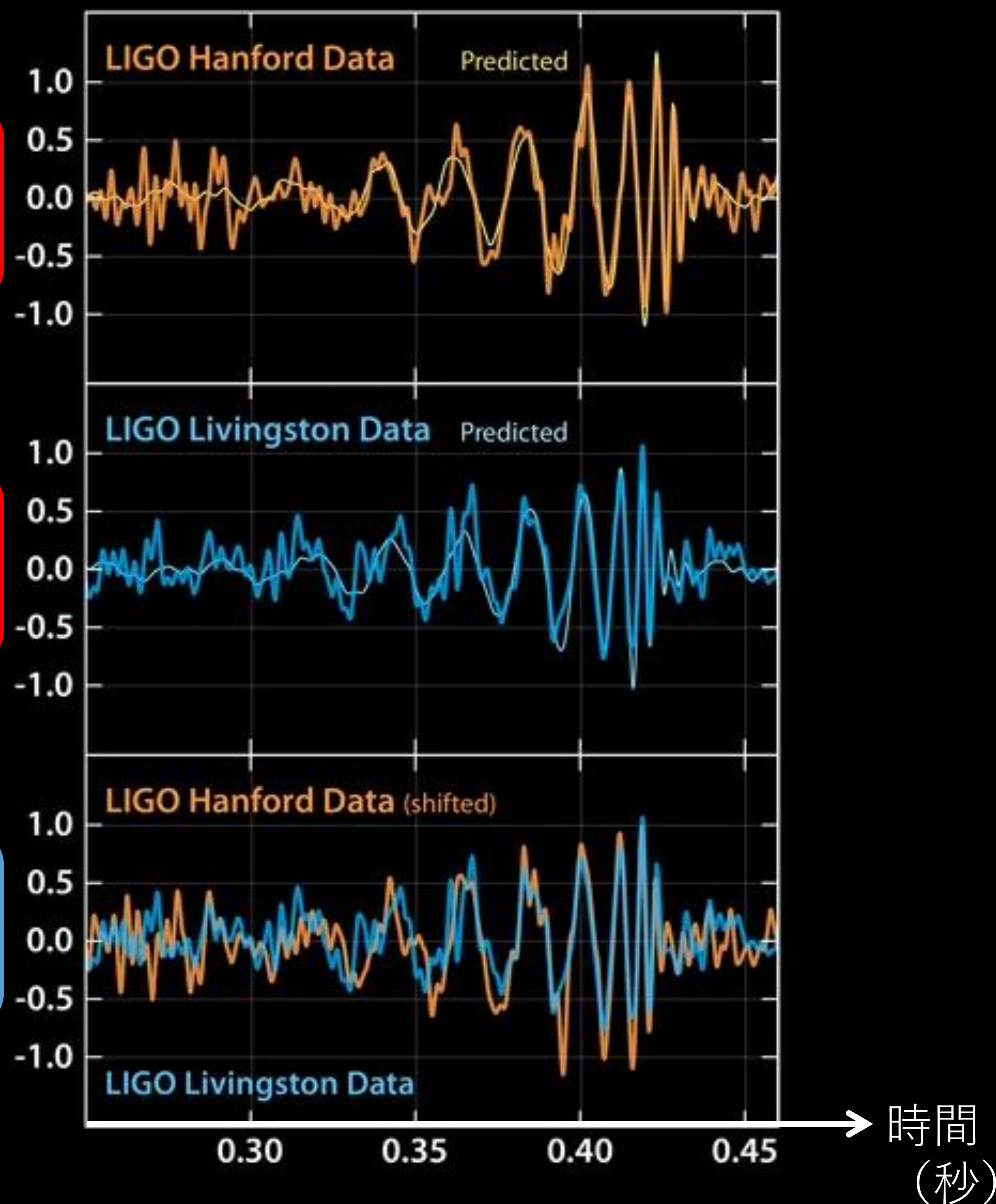


2カ所で得られた波形は、ほぼ同じ

北の検出器
（ハンフォード）

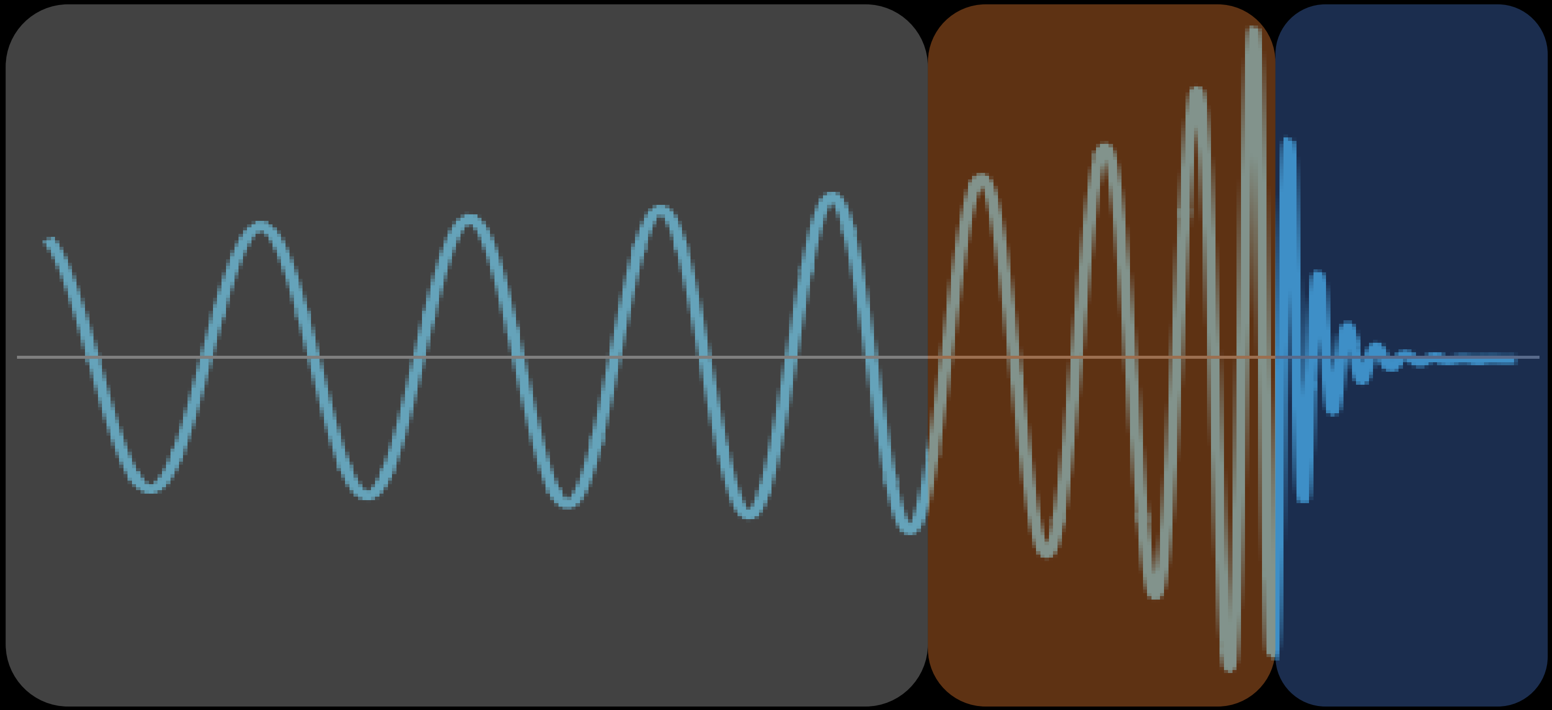
南の検出器
（リビングストン）

波形の比較



波形の変化の様子：

ゆっくりとした小振動 → 速い大振動→急減衰



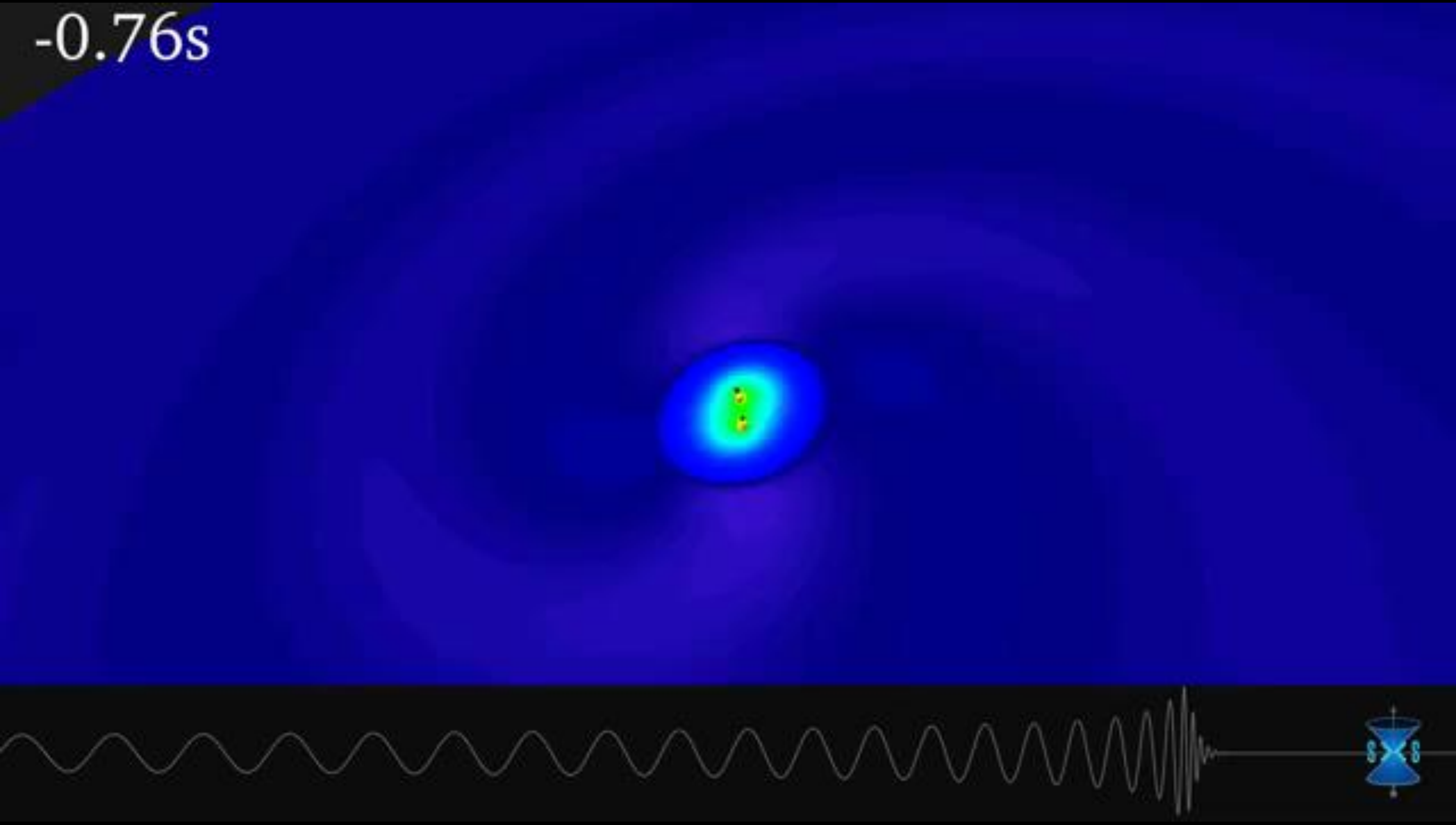
2つの重い星が、重力波を発しながら近づいていく様子
に対応している。

ブラックホール連星の合体の数値シミュレーション

こちらに届く重力波

[SXS Collaboration]

ブラックホール連星の合体の数値シミュレーション



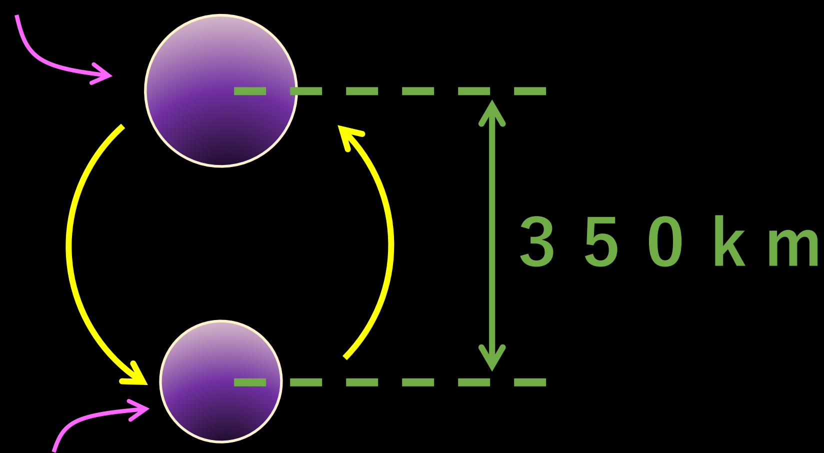
[SXS Collaboration]

何が分かったか？

重力波の波形を解析

➔
- ✓ ２つのブラックホールの衝突・合体が起きた
- ✓ 南の空の方向
- ✓ 地球から１３億光年先から飛んできた

太陽の３６倍の重さ



太陽の２９倍の重さ

今回の発見の意義

- 重力波が存在すること
- 一般相対性理論が正しそうであること
- ブラックホールの連星が存在すること
- そのような連星で、合体するものがあること

これらについて、直接的な証拠が世界で初めて得られた。

まとめ：一般相対性理論

- 一般相対性原理
  「どんな運動をする系から見ても物理法則は同じ」

- **等価原理**
  「十分小さな領域では、
  加速度運動による力と**重力**とは見分けがつかない」

✓ **重力場＝時間・空間のゆがみ**

✓ 時空のゆがみを表す計量は、**アインシュタイン方程式**を解くことで決まる。

  - 光も吸い込むほどの強重力場を持つ天体である**ブラックホール**
  - 重力場の波が光速で伝搬する**重力波**　　　　　などが予言される。

✓ 実験により、**理論の検証、ブラックホールの直接観測**などが進んでいる。

相対性理論の数理

- ✓ 光と時計の理論である**特殊相対性理論**
- ✓ 重力の理論である**一般相対性理論**

この２つの物理基礎理論を、式をいくらか使って紹介します

相対性理論の数理

✓ 光と時計の理論である**特殊相対性理論**

✓ 重力の理論である**一般相対性理論**

他分野の学問とのつながり

- ゆがんだ時空間を取り扱うための**微分幾何学**
- 微分方程式とその解を扱うための**解析学**
- **理論物理学・実験物理学**
  重力理論、宇宙論、天文学、素粒子理論、・・・
- **数値シミュレーション**

参考文献

◆“Captain Einstein's Virtual boat tour,” Department of Physics & Astronomy, Ghent University [URL: http://captaineinstein.org]

◆“Captain Einstein: a VR experience of relativity,” K. V. Acoleyen, J. V. Doorsselaere, arXiv:1806.11085

◆「ヘリウェル 特殊相対論」T. M. Helliwell 著、江里口良治 訳（丸善出版）

◆「相対性理論入門講義」風間洋一 著（培風館）

◆臨時別冊・数理科学「重力理論講義」前田恵一 著（サイエンス社）

◆日評ベーシックシリーズ「相対性理論」小林努 著（日本評論社）

◆「深化する一般相対論」田中貴浩 著（丸善出版）

◆「なっとくする相対性理論」松田卓也・二間瀬敏史 著（講談社）

◆アインシュタイン「相対性理論」内山龍雄 訳・解説（岩波文庫）

ご清聴ありがとうございました