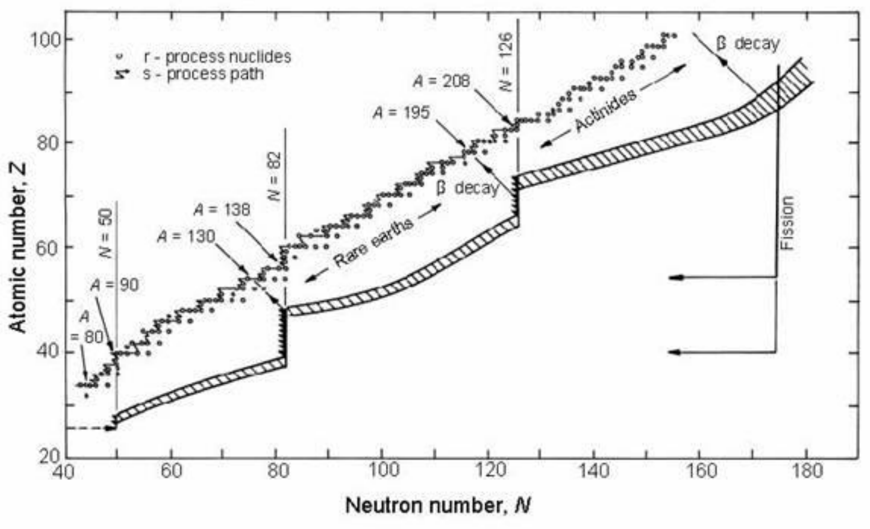
Introduction : fission and cluster decay

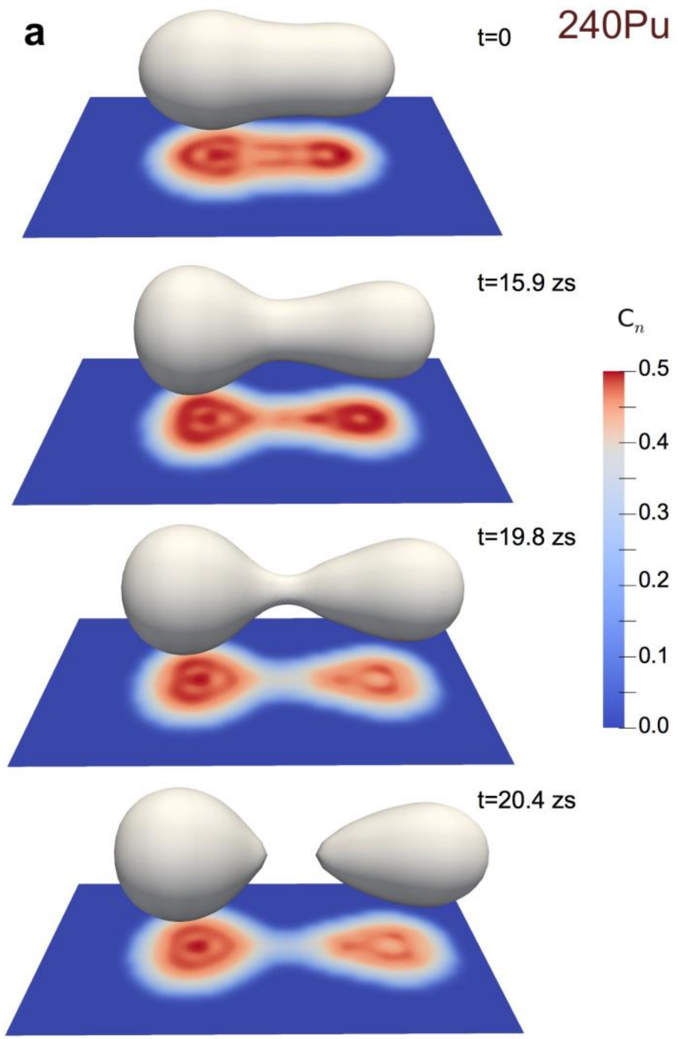
- 核分裂：重い原子核が2つの原子核に分裂する現象
  →大振幅集団運動

- 理論的にチャレンジングな問題

- r過程元素合成などの様々な現象でも重要



- クラスター崩壊（$^{223}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{209}\mathrm{Pb} + {}^{14}\mathrm{C}$ 等）
  →非対称度が大きい核分裂とみなすこともできる



G. Scamps and C. Simenel, Nature 564 382 (2018).

先行研究:pair hopping model

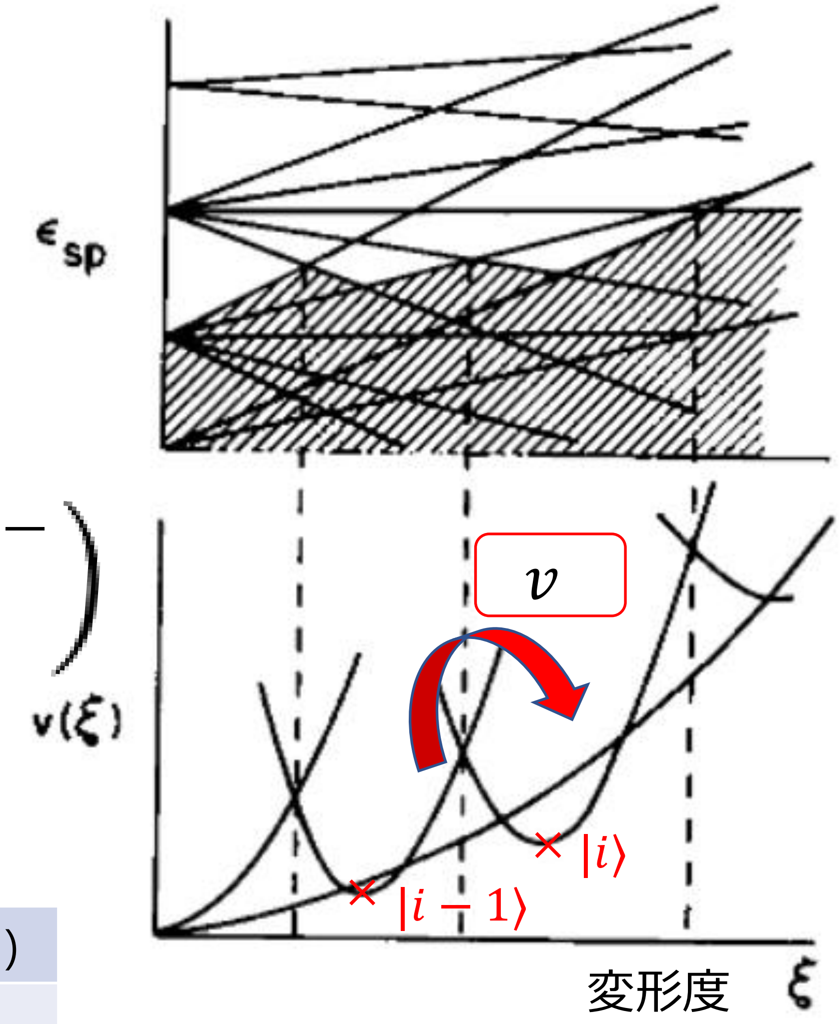
- Band Crossing →原子核の形状の発展
  残留相互作用によるクーパー対のホッピング

$$H = H_{HF} + H_{pair} = H_{HF} - G\Sigma_{\nu,\nu'} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\nu}'} a_{\nu'}$$

$$\langle i|H|j\rangle = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & E_{i-1} & v & & \\ & v & E_i & v & \\ & & v & E_{i+1} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} E_i\text{:配位}i\text{でのHFエネルギー} \\ v = \langle i-1|H_{pair}|i\rangle \\ \quad \simeq -2.9\ \mathrm{MeV} \end{array} \right)$$

- 実験との比較 ⇒ 実験値をよく再現

decay rate	実験値 (s^{-1})	pair hopping model (s^{-1})
$^{232}U \to \alpha + ^{228}Th$	3.2×10^{-10}	1.1×10^{-11}
$^{232}U \to ^{24}Ne + ^{208}Pb$	6.0×10^{-22}	7.8×10^{-22}
$^{223}Ra \to ^{14}C + ^{209}Pb$	4.4×10^{-16}	3.9×10^{-14}



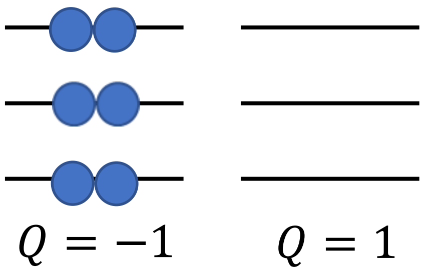
F. Barranco et al., Nucl. Phys. A 512, 253 (1990).

先行研究:maximum coupling approximation

・P+QQ模型のハミルトニアン

$$\hat{H} = \sum_{k=0}^{N_{\rm orb}-1} \epsilon_k \hat{n}_k + v_Q \hat{Q}\hat{Q} - G \sum_{k \neq k'} \hat{P}_k^\dagger \hat{P}_{k'}, \quad (\hat{n}_k = a_k^\dagger a_k + a_{\bar{k}}^\dagger a_{\bar{k}}, \hat{Q} = \sum_k q_k \hat{n}_k, \hat{P}_k^\dagger = a_k^\dagger a_{\bar{k}}^\dagger)$$

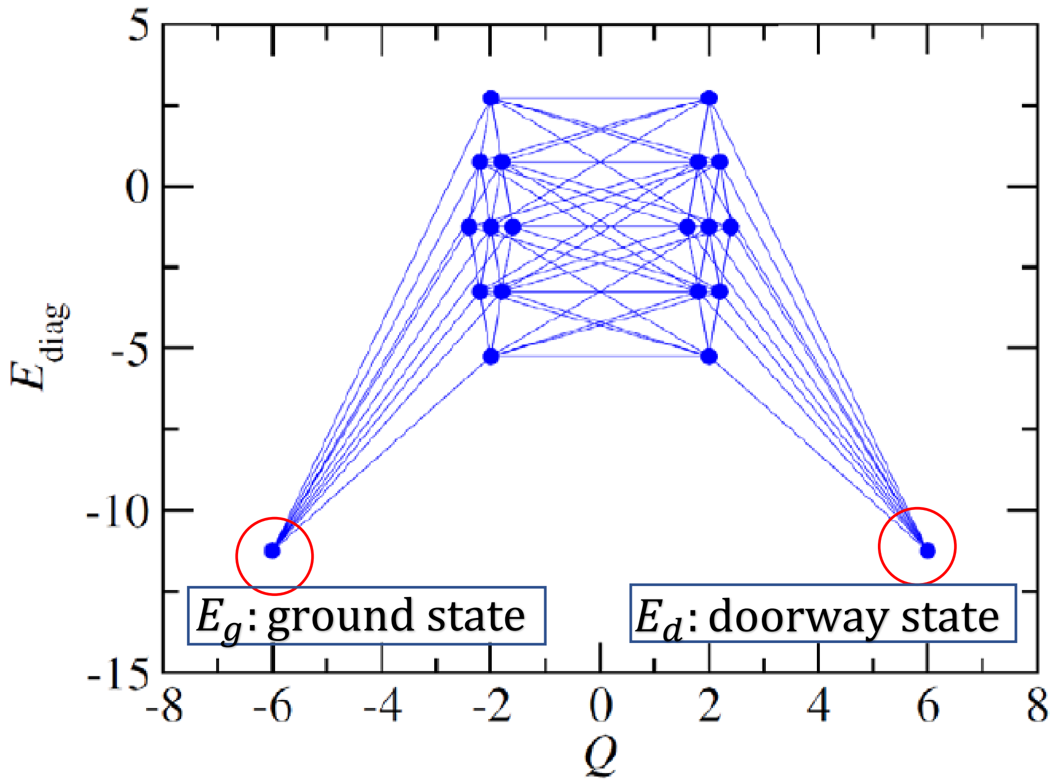
・３個のクーパー対をつめる
⇒ ${}_6\mathrm{C}_3$=20個の配位



・右端の戸口状態は複素エネルギーを持つ

$$E_d - E_g = \Delta - i\Gamma_d/2$$

・ $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} E_g & \boldsymbol{v}_g^T & 0 \\ \boldsymbol{v}_g & \mathbf{H}_b & \boldsymbol{v}_d \\ 0 & \boldsymbol{v}_d^T & E_d \end{pmatrix}$ を対角化
⇒ decay width



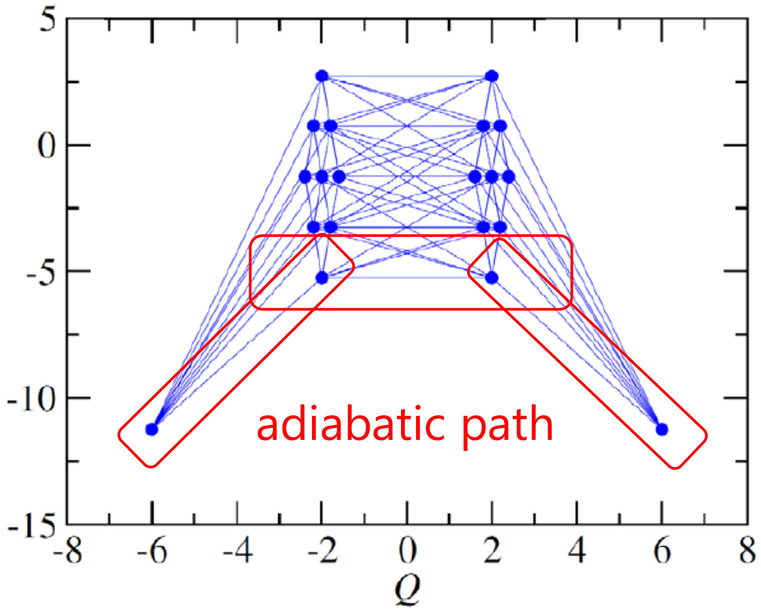
K. Hagino and G.F. Bertsch,
Phys. Rev. C 102, 024316(2020).

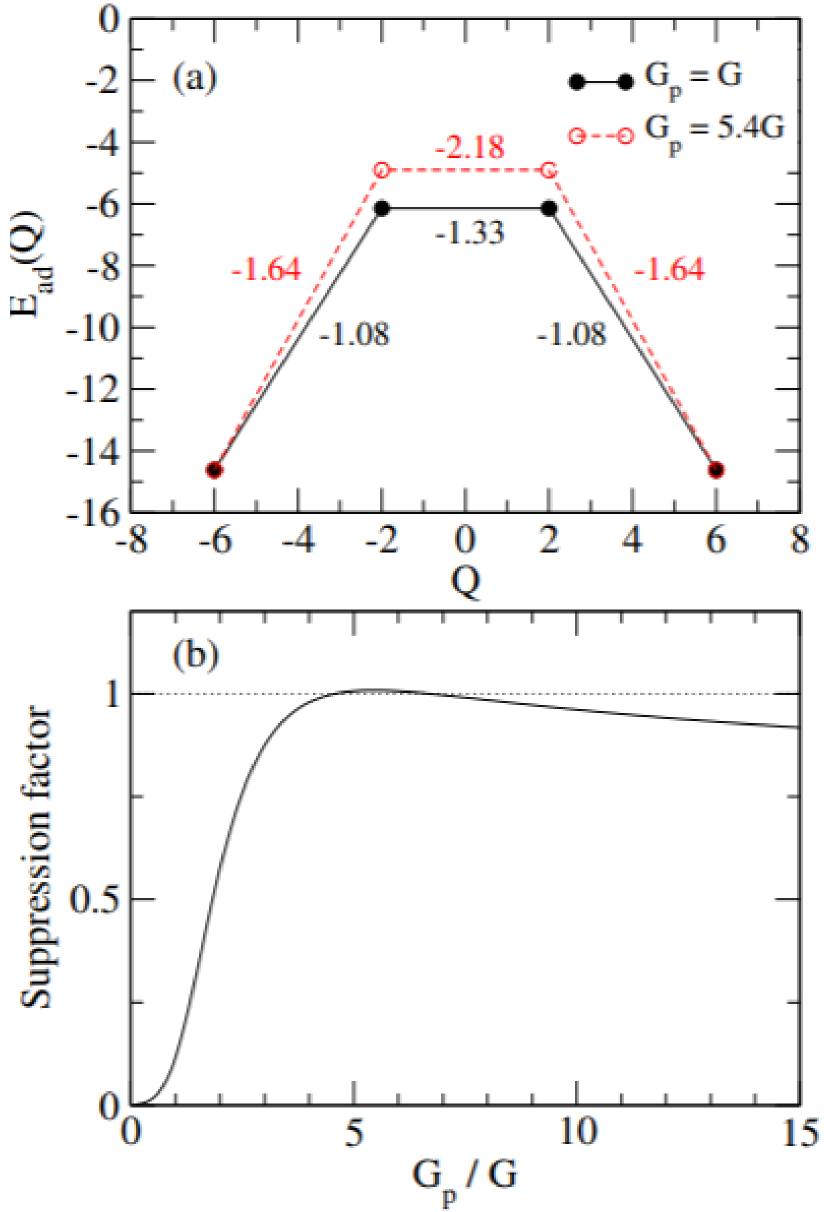
先行研究:maximum coupling approximation

- full な対角化は計算量が大きい
  (この模型では 20 × 20 行列)

- 断熱近似は崩壊幅を過小評価
  (この模型では 4 × 4 行列)

- ペアリングを強めることで、full な対角化をした場合と同程度の崩壊幅





バリア(対角要素):高
結合(非対角要素):大

⇒ **最適な pairing strength**

Motivation

pair hopping model：トイモデル

↓

平均場+GCMに基づく微視的計算

➢**微視的に定式化するメリット**

✓核分裂の微視的理解の進展

✓微視的ハミルトニアンを用いた反応理論への接続が可能

✓励起状態を含めた拡張ができる (particle-hole 励起の重ね合わせ)

✓集団慣性質量を導入する必要がない (cf. potential energy surface + WKB approximation)

Constraint HF + BCS calculation

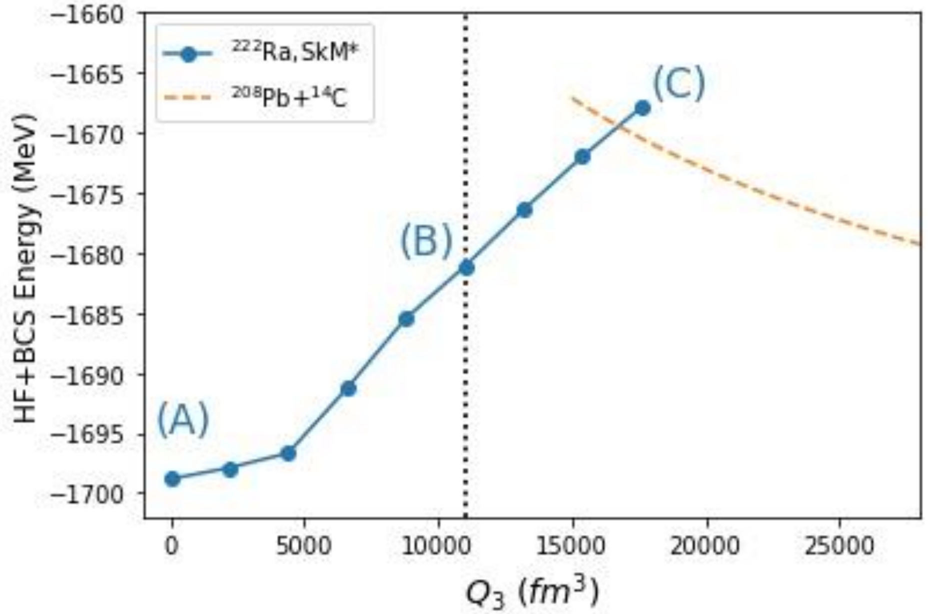
扱うクラスター崩壊: $^{222}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{208}\mathrm{Pb} + {}^{14}\mathrm{C}$

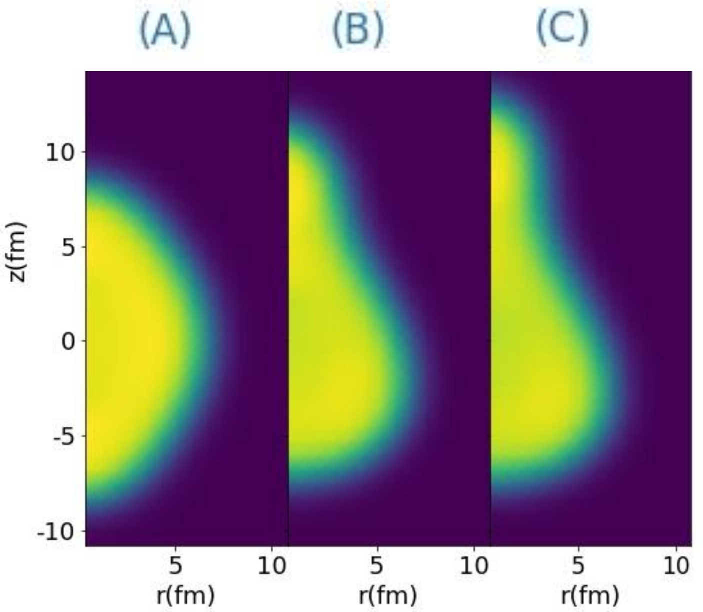
HF + BCS calculation

- Skyrme 相互作用 (SkM*)
- Volume pairing: $V_{pair}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = V_0 \frac{1-P_\sigma}{2} \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

  $\Rightarrow V_0$は $\Delta_\mathrm{n} = -\frac{1}{2}[\mathrm{S_n}(\mathrm{N}+1,\mathrm{Z}) - \mathrm{S_n}(\mathrm{N},\mathrm{Z})]$ を再現

  (proton も同様)
- mass octupole moment $Q_3 \equiv Q_{30}$で拘束
- 軸対称2次元空間メッシュ表示を用いる





Generator Coordinate Method

GCMによるBCS 波動関数$|\Phi(Q_3)\rangle$の重ね合わせ

$$|\Psi_k\rangle = \int dQ_3 f_k(Q_3)\,|\Phi(Q_3)\rangle$$

⇒Hill-Wheeler eq.

$$\int dQ_3' f_k(Q_3')(E_k \langle\Phi(Q_3)|\Phi(Q_3')\rangle - \langle\Phi(Q_3)|H|\Phi(Q_3')\rangle) = 0$$

→ 集団波動関数: $g_k = N^{1/2} f_k; \quad N(Q_3, Q_3') \equiv \langle\Phi(Q_3)|\Phi(Q_3')\rangle$

以下では基底状態を取り扱う $(k = 0)$

崩壊率の計算

$$w = SfP$$

w:decay rate

S:クラスター生成確率

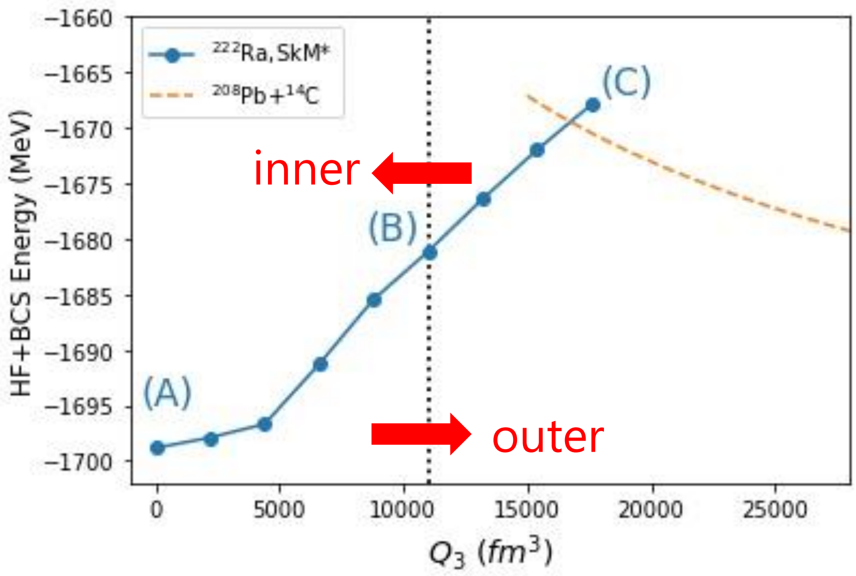
f:ポテンシャルバリアへの衝突振動数

P:ポテンシャルバリアの透過確率

GCMを用いて微視的に S を計算:ポテンシャル障壁の内側

↓

クラスター模型を用いて fP を計算:ポテンシャル障壁の外側



崩壊率の計算

$$w = SfP$$

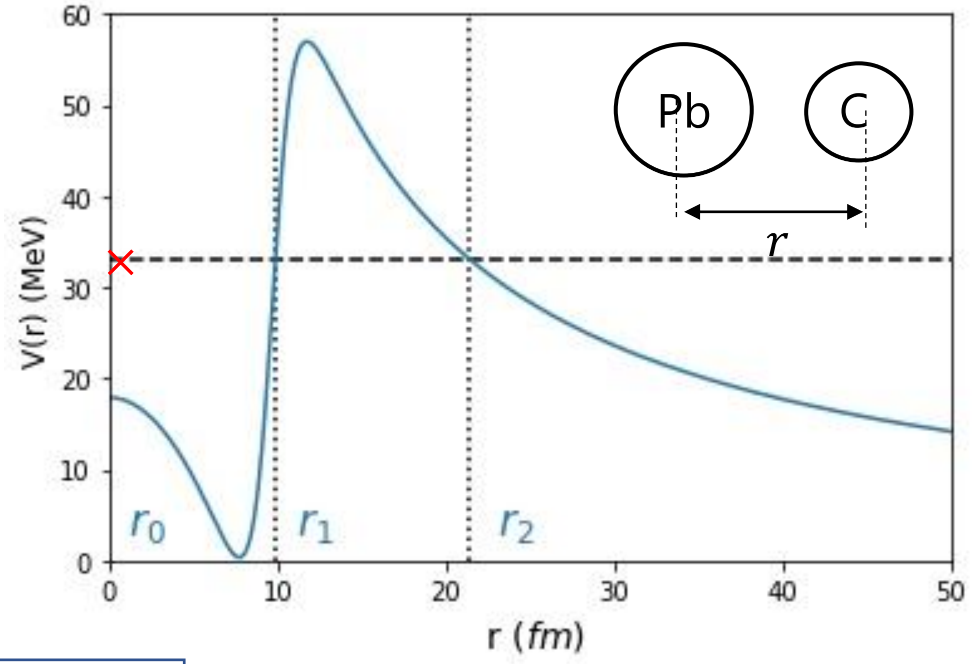
クラスター模型+WKB近似を用いて fP を求める

${}^{222}\mathrm{Ra} \to {}^{208}\mathrm{Pb} + {}^{14}\mathrm{C}$ のQ値:Q = 33.05 MeV

${}^{208}\mathrm{Pb} + {}^{14}\mathrm{C}$ 間のポテンシャル(クーロン力+核力)

$$V = V_{coulomb} + V_N$$

V_NとしてWoods-Saxon 型をもちいる。



⇒WKB 公式

$$f^{-1} = \frac{4\mu}{\hbar^2}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{k(r)}\cos^2\left(\int_{r_0}^{r}k(r')dr' - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$P = \exp\left(-2\int_{r_1}^{r_2}dr|k(r)|\right),$$

Spectroscopic factor の計算

ポテンシャル障壁の内側: $(r_0 \leq r \leq r_1)$
でクラスターが生成

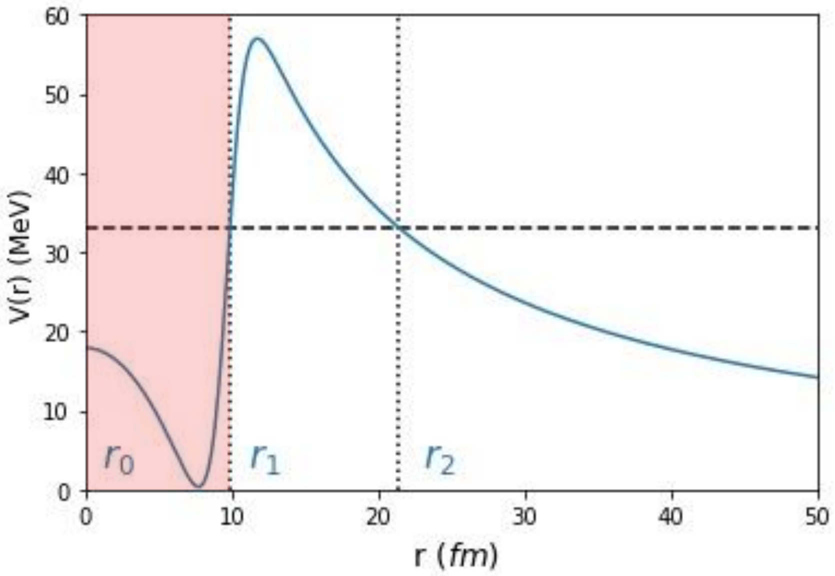
Q_3とrの関係式

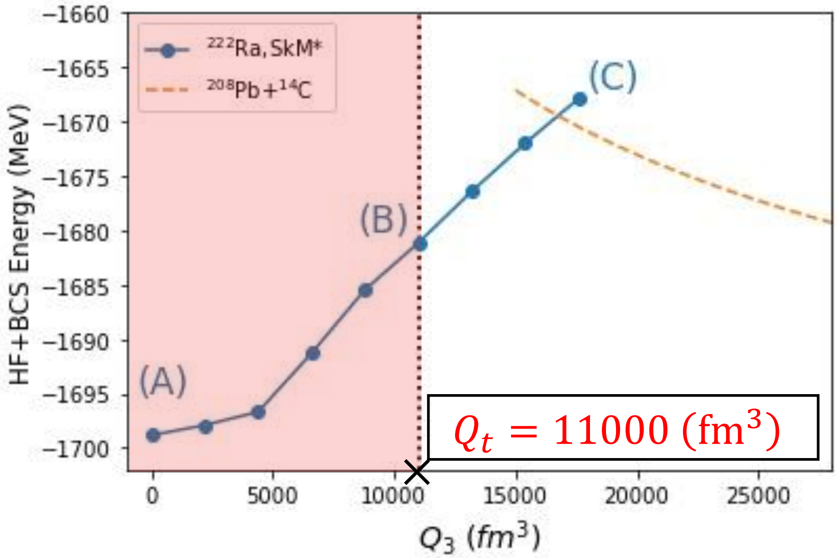
$$Q_3(r) = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{(A_1 - A_2)}{A_1 + A_2} r^3$$

$(Q_3(r_0) \leq Q_3 \leq Q_3(r_1) \equiv Q_t)$ の範囲でGCM

(B) という配位が含まれる確率: $|g(Q_t)|^2$

⇒クラスター生成確率:$S = |g(Q_t)|^2$





maximum coupling approximation

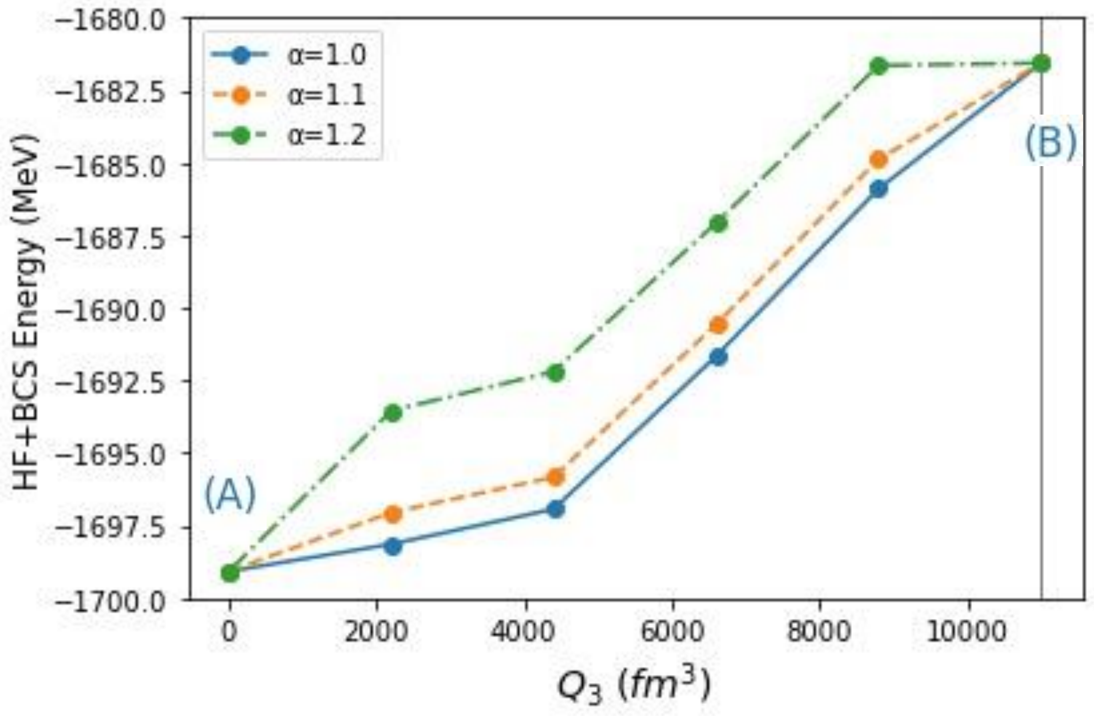
ペアリングの強度を強めた many-body Hamiltonian

$$H_{HF} + H_{pair} \rightarrow H_{HF} + \alpha H_{pair} \qquad (\alpha \geq 1)$$

BCS波動関数も変化する: $|\Phi(Q_3)\rangle \rightarrow |\Phi^{(\alpha)}(Q_3)\rangle$
(Thouless の定理)

$$|\Phi^{(\alpha)}(Q_3)\rangle \propto \prod_{ij} \left(1 + \underline{C_{ij}^{(\alpha)} \alpha_i^\dagger \alpha_j^\dagger}\right) |\Phi(Q_3)\rangle$$

excited states を含む計算
⇒断熱近似を超えた効果の取り扱い



maximum coupling approximation

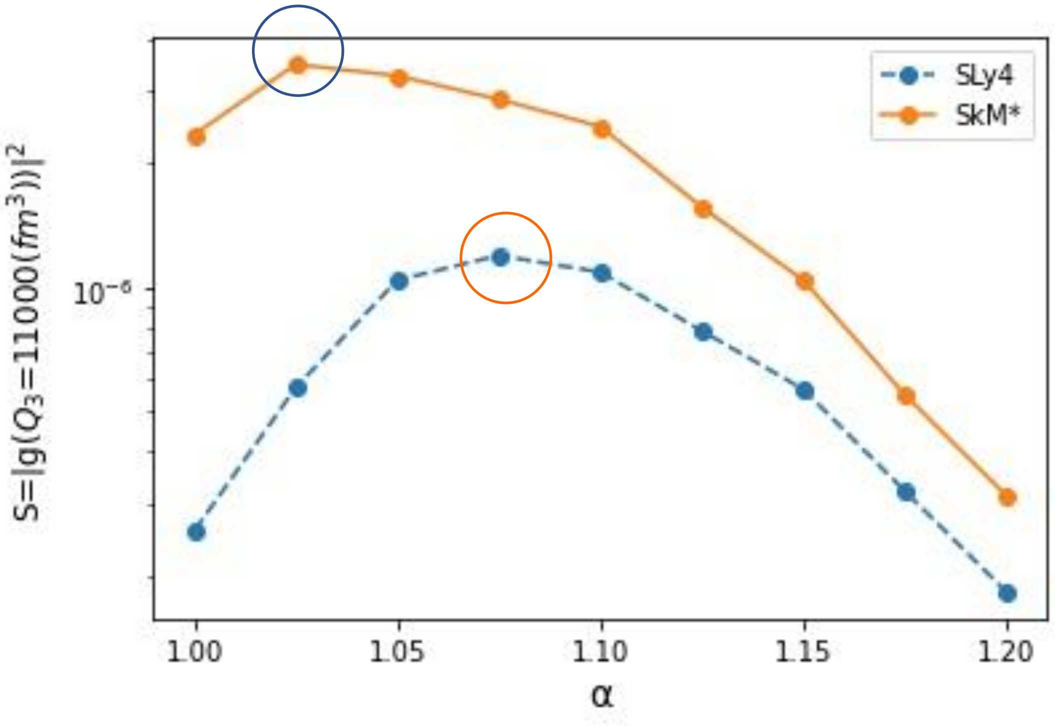
Hill-Wheeler eq.

$$\sum_j H(q_i, q_j) f(q_j) = E \sum_j N(q_i, q_j) f(q_j)$$

ペアリングを強くすると

・対角要素$H(q_i, q_i)$が大きくなる
・<u>状態間の結合$N(q_i, q_j)$が大きくなる</u>
<u>⇒Q_3が大きい配位が混じりやすい</u>

Spectroscopic factor S



pairing strength α>1 にピーク

計算結果:崩壊率の計算

decay rate を実験値、他計算と比較

✓実験値を1 – 2桁の精度で再現

✓MCA の効果は factor 倍程度

$$\frac{w(\alpha=1.025)}{w(\alpha=1.0)} = 1.35 : (\mathrm{SkM}^*)$$

$$\frac{w(\alpha=1.075)}{w(\alpha=1.0)} = 4.66 : (\mathrm{SLy4})$$

decay rate $w(s^{-1})$	**method**
1.18×10^{-10}	GCM(SkM*)
4.07×10^{-11}	GCM(SLy4)
$6.7(\pm 1.8) \times 10^{-12}$	experiment[1]
$5.6(\pm 2.2) \times 10^{-12}$	experiment[2]
$6.20(\pm 1.18) \times 10^{-12}$	experiment[3]
8.73×10^{-10}	the least action method[4]

[1] P. B. Price et al., Phys. Rev. Lett. 54, 297 (1985).
[2] E. Hourani et al., Phys. Lett. B 160, 375 (1985).
[3] M. Hussonnois et al., Phys. Rev. C 43, 2599 (1991).
[4] M. Warda and L.M. Robledo, Phys. Rev. C 84 044608 (2011).

重いクラスターの放出

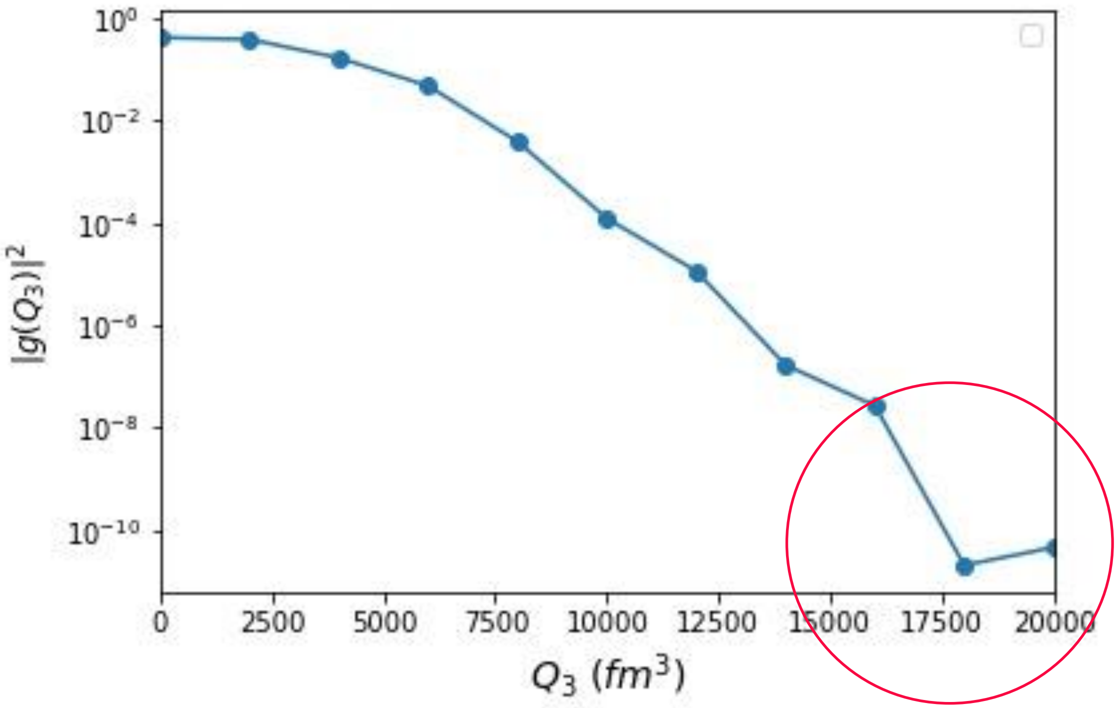
同様の計算を ^{228}Th→^{20}O+^{208}Pb 、^{232}U→^{24}Ne+^{208}Pb
に対して行う。

$Q_t = 16000\mathrm{fm}^3$ (^{228}Th)
$Q_t = 20000\mathrm{fm}^3$ (^{232}U)

⇒Q_tが大きいことによる、数値誤差の問題

$6000\mathrm{fm}^3 \leq Q_3 \leq 12000\mathrm{fm}^3$ の領域で線形補完する

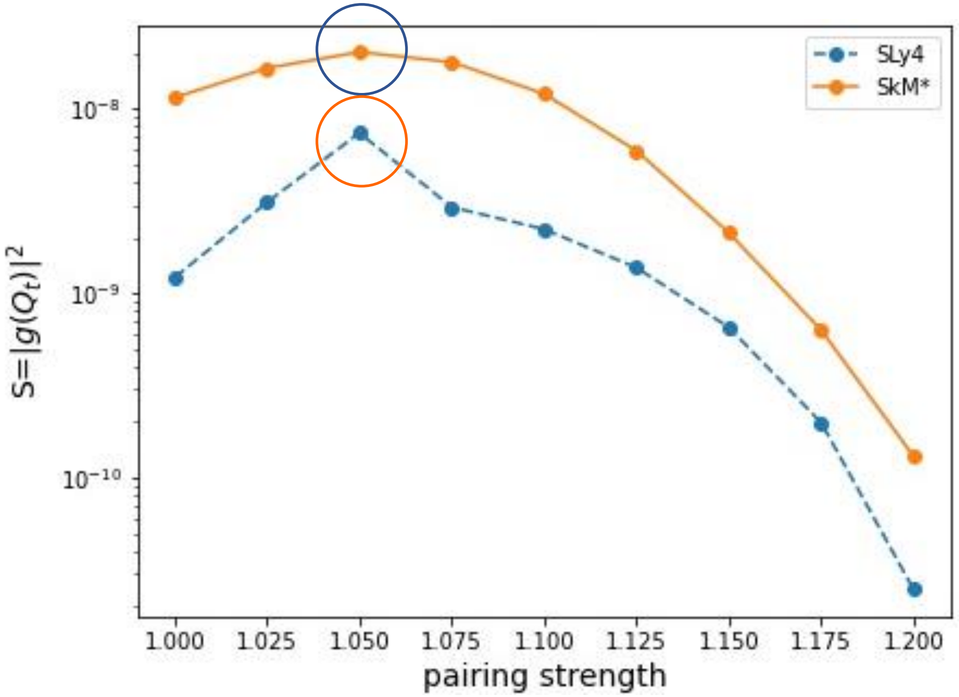
^{232}Uの集団波動関数　$|g(Q_3)|^2$



重いクラスターの放出

✓ ^{228}Th→^{20}O+^{208}Pb

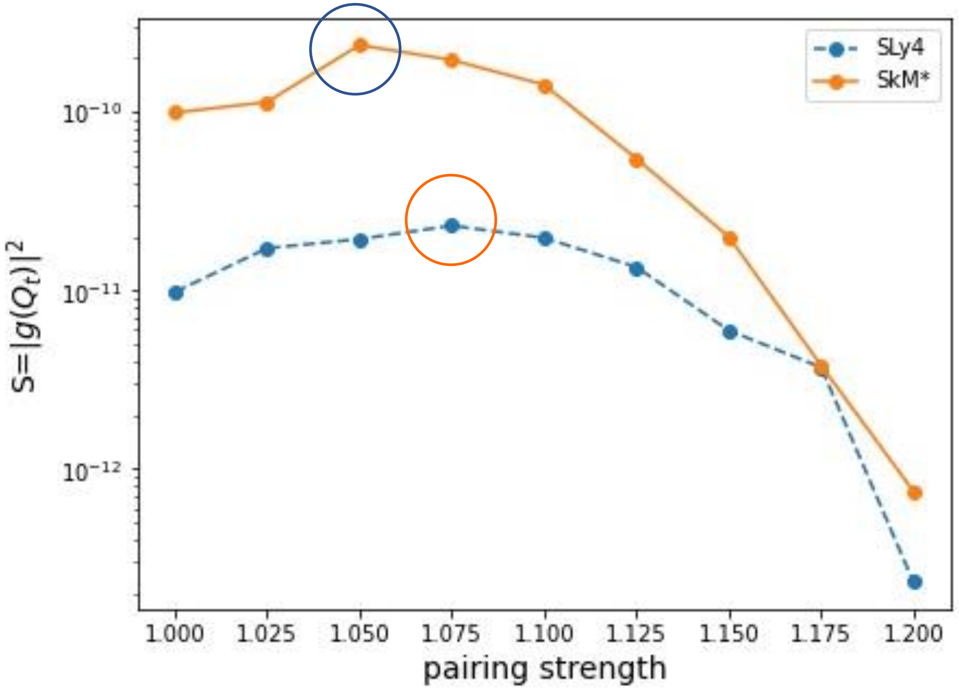
Spectroscopic factor S of ^{228}Th



$$\frac{S(\alpha=1.05)}{S(\alpha=1.0)} = 1.76\ (\text{SkM}*)$$
$$\frac{S(\alpha=1.05)}{S(\alpha=1.0)} = 6.06\ (\text{SLy4})$$

✓ ^{232}U→^{24}Ne+^{208}Pb

Spectroscopic factor S of ^{232}U



$$\frac{S(\alpha=1.05)}{S(\alpha=1.0)} = 1.97\ (\text{SkM}*)$$
$$\frac{S(\alpha=1.075)}{S(\alpha=1.0)} = 2.39\ (\text{SLy4})$$

計算結果:重いクラスターの放出

decay rate を比較

✓ ^{228}Th では実験値を2 – 3桁の精度で再現

✓ ^{232}U では実験値との差が大きくなる
⇒フィッティングによる不定性

$^{228}\mathrm{Th} \to {}^{20}\mathrm{O} + {}^{208}\mathrm{Pb}$

decay rate $w(s^{-1})$	method
1.11×10^{-18}	GCM(SkM*)
4.07×10^{-19}	GCM(SLy4)
2.05×10^{-20}	the least action method[4]
$1.29(\pm 0.22) \times 10^{-21}$	experiment[5]

$^{232}\mathrm{U} \to {}^{24}\mathrm{Ne} + {}^{208}\mathrm{Pb}$

decay rate $w(s^{-1})$	method
3.18×10^{-16}	GCM(SkM*)
3.01×10^{-17}	GCM(SLy4)
3.10×10^{-24}	the least action method[4]
$2.83(\pm 0.22) \times 10^{-21}$	experiment[6]

[4] M. Warda and L.M. Robledo, Phys. Rev. C 84 044608 (2011).
[5] R. Bonetti et al., Nucl. Phys. A556, 115 (1993).
[6] R. Bonetti et al., Phys. Rev. C 44, 888 (1991).

conclusion & future perspectives

まとめ

- pair hopping model →平均場+GCMを用いた微視的計算
- $^{222}Ra \rightarrow ^{14}C + ^{208}Pb$ クラスター崩壊へ適用
- 最大結合近似により 崩壊率がfactor倍程度変化する
- decay rate の実験値を同程度のオーダーで再現
- 重いクラスター放出の場合は数値的な問題点

今後の発展

- 自発核分裂への適用を目指した、full に微視的な理論の構築
- odd-even 効果の寿命への影響
- particle-hole 励起を直接取り入れた誘起核分裂への応用