

第10回観測的宇宙論ワークショップ (Nov.17-19, 2021)@オンライン, YITP

勾配展開法でみる 重力とゆらぎの一般的性質

新居 舜 (KMI, 名古屋大学)
← 京大基研

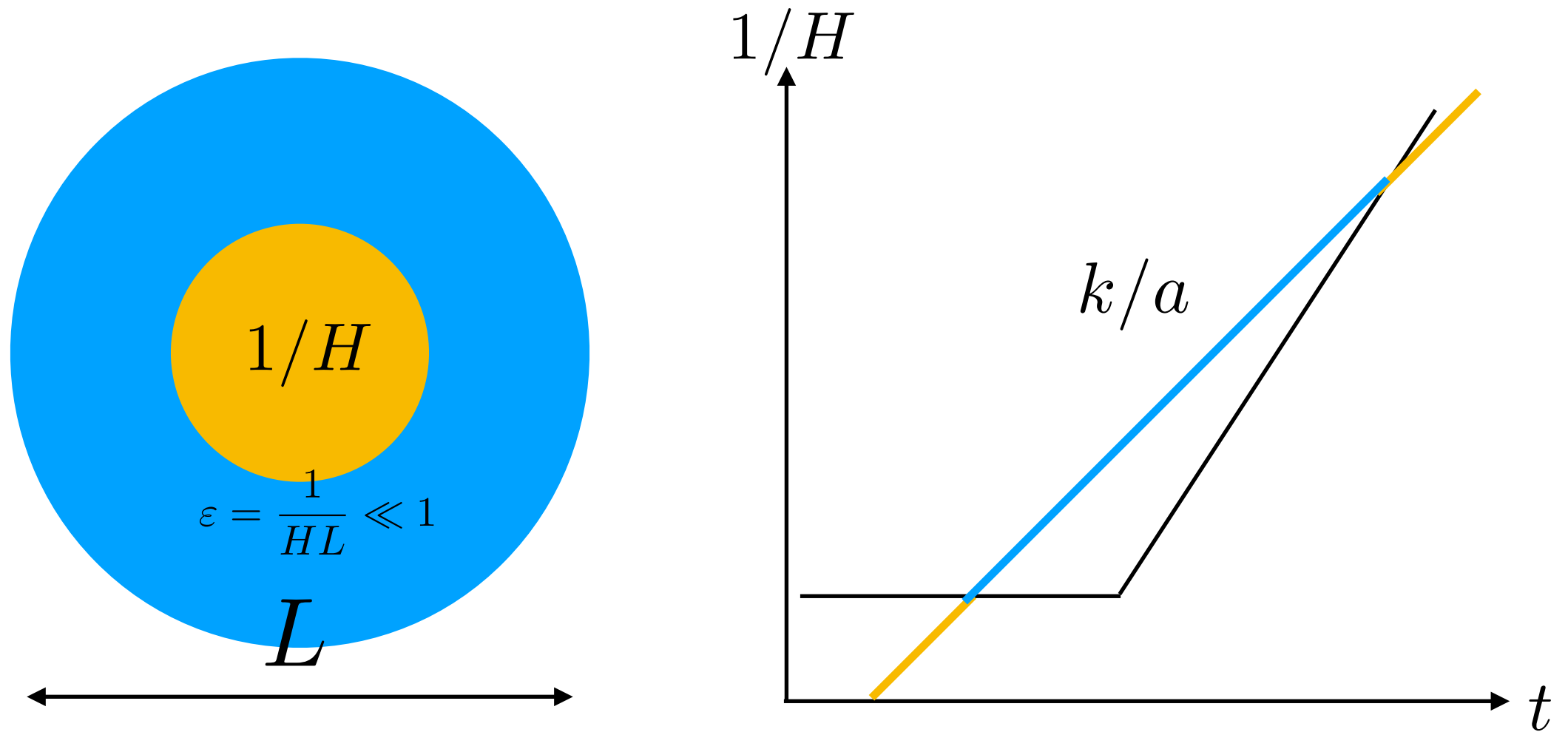
共同研究者：成子篤 (重力物理学研究センター、京大基研)

To appear soon...

今回示したこと

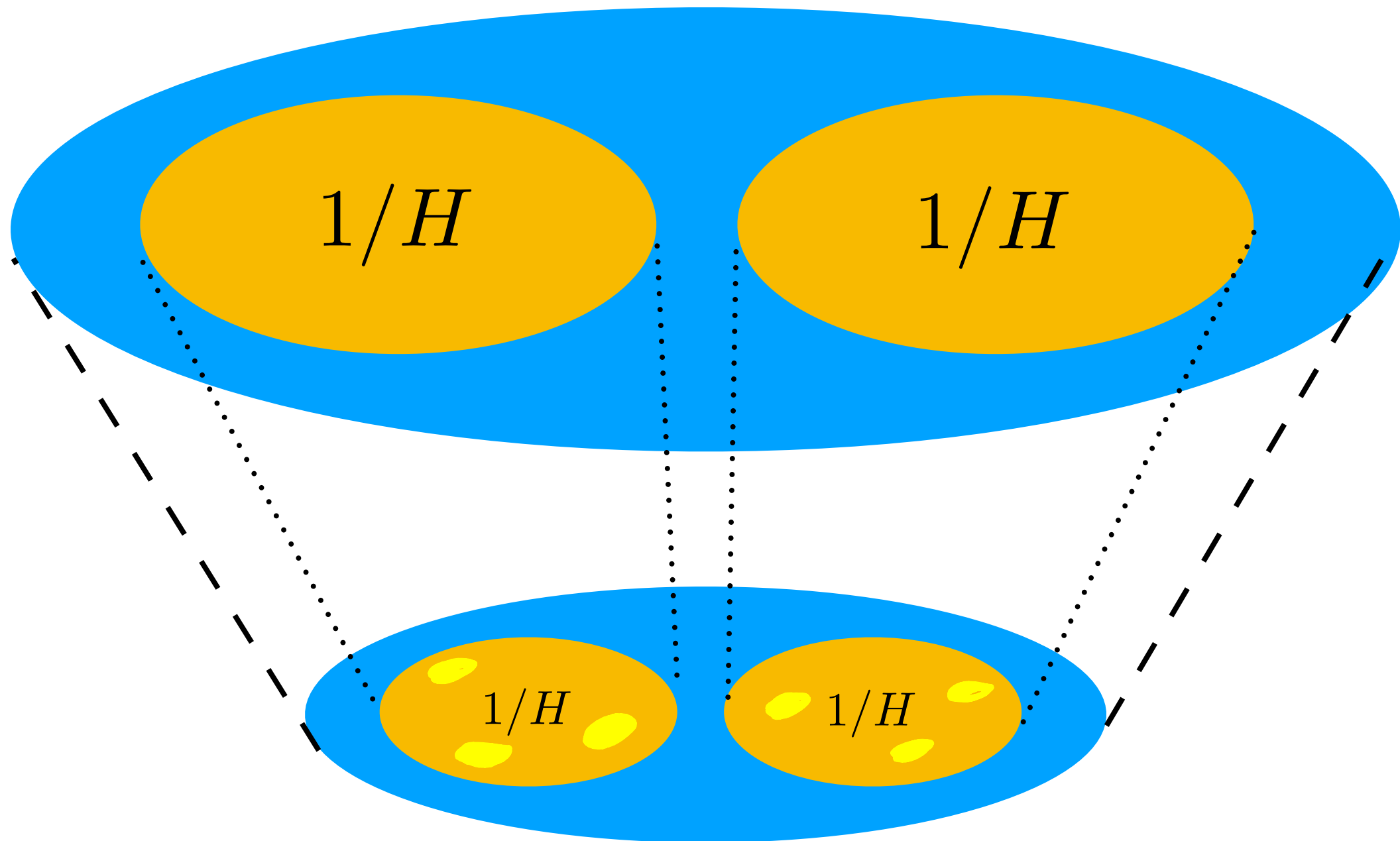
- 勾配展開法 (後述) に基づいて、超ハッブルスケールでの非線形曲率ゆらぎの'有効'作用を構築 (拡張スカラー・テンソル理論まで)
- 非線形曲率ゆらぎを特徴づける変数の導入
- 曲率の保存則と非線形曲率ゆらぎの解析解の導出

勾配展開法とは



- 時間微分 $\gg$ 空間微分
 - 考えている理論の詳細によらない (少なくとも局所性はある)
- 非線形性を含んでいる
- ハッブル半径より大きな領域で時空の進化を記述
 - leading order $\sim \delta N$ formalism
 - next-to-leading order $\sim$ 非線形曲率ゆらぎ

勾配展開法とは



ある種の有効場の理論としての側面がある

曲率ゆらぎの保存則

- 完全流体の場合、物質の保存則 + 断熱性から出る D. Wands + 2000
 - 重力場の式は関係ない
- 単一スカラー場の場合は、非等方シアが減衰することが大事
N.Sugiyama, E. Komatsu, and T. Futamase+ 2012
 - slow-roll 近似は外しても大丈夫
 - 重力場の方程式 (非等方シアの発展方程式)を評価することが必要
(K&S)
 - スカラー場一定面と等膨張面が同期する条件

$$\partial_\tau \phi = f(\phi) \quad \text{A.Naruko \& M.Sasaki 2011}$$

- 複スカラー場の場合は、曲率は保存しない
 - 等曲率ゆらぎ

長波長での曲率ゆらぎ (線形)

★ Scalar-Vector-Tensor 分解 (c.f. Kodama-Sasaki 1984)

$$\gamma_{ij} = a^2(\underline{t})[(1 + 2\delta\psi)\delta_{ij} + 2\partial_{(i}C_{j)} - (2/3)\partial_k C^k \delta_{ij} + h e^{TT}{}_{ij}]$$

$$\mathcal{R} = \delta\psi - \frac{1}{3}\partial_k C^k - \frac{\mathcal{H}}{2\epsilon} \delta\phi \quad \text{スカラー場のゆらぎ}$$

- Mukhanov-Sasaki 型の微分方程式

$$\partial_\tau^2 \mathcal{R} + 2\frac{\partial_\tau z}{z} \mathcal{R} + c^2 k^2 \mathcal{R} = 0 \quad \partial_\tau^2 h + 2\mathcal{H}h + k^2 h = 0$$

$$z \equiv \frac{a\partial_\tau\phi}{\mathcal{H}} = \frac{a}{\sqrt{2\epsilon}\mathcal{H}} \leftarrow \text{slow-roll parameter} \quad k\tau \ll 1$$

$$\partial_\tau^2 \mathcal{R} + 2\frac{\partial_\tau z}{z} \mathcal{R} \sim 0 \quad \partial_\tau^2 h + 2\mathcal{H}h \sim 0$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + C_{\mathcal{R}} \int_{\tau_{\text{ini.}}} \frac{d\tau'}{z^2(\tau')}$$

$$h = h_0 + C_h \int_{\tau_{\text{ini.}}} \frac{d\tau'}{a^2(\tau')}$$

c.f. 'Winberg's Adiabatic Modes (WAM)'
& §5" (S. Winberg 2003)

$$(3) R \simeq -4a^{-2}\partial^2 \mathcal{R}$$

非線形ゆらぎを特徴付ける変数

SA and A Naruko to appear

(covariant)

- ADM 形式 + Transverse-Traceless decomposition

J. York 1973, 1974

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt)$$

$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{(BG)} + \delta\gamma_{ij}$

$$\delta\gamma_{ij} = 2\delta\psi\gamma_{ij} + 2\underline{D}_{(i}E_{j)} - (2/3)D_k E^k + \gamma_{ij}^{TT}$$

$\gamma_{ij}^{(BG)}$ によって与えられる共変微分

$$\gamma^{(BG)ij} \gamma_{ij}^{TT} = 0$$

$$D^i \gamma_{ij}^{TT} = 0$$

- 空間のゲージ変換に対して不変な変数

$$\mathcal{R} \equiv \delta\psi - \frac{1}{3}D_k E^k, h_{ij} \equiv \frac{\gamma_{ij}^{TT}}{a^2 e^{2\psi}}$$

★ (非線形な) Scalar-Vector-Tensor 分解を与える。

長波長極限での曲率の振る舞い

SA and A Naruko to appear

- 空間計量を分解する

- 共形分解

$$\gamma_{ij} = a^2(t) e^{2\psi} f_{ij} \quad \det f_{ij} = 1$$

分離の不安定性がある
↔

- 長距離極限で非等方成分の保存モードだけが残る条件

$$\underbrace{K_{ij}^{TF}}_{\text{だから、} A_{ij} \text{ と書く}} = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{c.f. Y. Tanaka and M. Sasaki 2008 +}$$
$$f_{ij} = f_{ij}(x^k) \quad \star \quad \mathcal{O}(\varepsilon) \text{ まで 緩めでもいい}$$

- 長距離極限で体積成分の保存モードだけが残る条件

$$\dot{\psi} = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \psi = \psi(x^i)$$

この条件は、LOの運動方程式から導出できる

作用における勾配展開

$$S = S^{(0)} + S^{(2)} + S^{(4)} + \dots$$

$$S^{(0)} = S[\alpha^{(0)}, \gamma_{ij}^{(0)}],$$

$$S^{(2)} = \int dt d^3x \alpha e^{3\Psi} \left[(\text{H.C.})^{(0)} \delta\alpha^{(2)} + (\text{M.C.})_i^{(1)} \beta^{(1)i} + (\text{E.o.M})_{ij}^{(0)} \gamma^{(2)ij} + \frac{R[e^\Psi f_{ij}]}{a^2} \right],$$

$$S^{(4)} = \int dt d^3x \alpha e^{3\Psi} \left[\mathcal{L}_{\mathcal{A}} A_{ij}^2 + (\text{H.C.})^{(0)} \delta\alpha^{(4)} + (\text{M.C.})_i^{(1)} (\beta^{(3)i} + 3\psi^{(2)} \beta^{(1)i}) + (\text{E.o.M})_{ij}^{(0)} \gamma^{(4)ij} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [\alpha \partial_\alpha^2 (\alpha \mathcal{L})] \delta\alpha^{(2)2} + \frac{1}{2} [\partial_K^2 \mathcal{L}] K^{(2)2} + [\alpha \partial_{\alpha K}^2 \mathcal{L}] \delta\alpha^{(2)} K^{(2)} + [\alpha \partial_{\alpha R}^2 \mathcal{L}] \delta\alpha^{(2)} R^{(2)} + [\partial_{KR}^2 \mathcal{L}] K^{(2)} R^{(2)} \right].$$



- LO作用から、EL方程式が得られる
- LOのEL方程式で消える
- NLOの拘束条件で変数を減らす

$$S_{\text{pert.}} = \int d\tau d^3x e^{3\psi} \left[\frac{z_S^2}{2} \left((\partial_\tau \mathcal{R})^2 - \frac{c_S^2}{2} \mathcal{R} R[e^{2\psi} f_{ij}] \right) + \frac{z_T^2}{8} \left((\partial_\tau h_{ij})^2 - 2c_T^2 h^{ij} G_{ij}[e^{2\psi} f_{kl}] \right) \right]$$

時間スライスの同期

$$S^{(0)} = \int dt d^3x \alpha \sqrt{\gamma} \mathcal{L}^{(0)}(t, \alpha, K)$$

ハミルトニアン拘束条件 $\mathcal{L}^{(0)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial K} \frac{K}{\alpha} = 0$ ↑ t, λ

運動量拘束条件 $\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial K} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad k = k(t, \alpha)$

- 拘束条件 + 陰関数定理 $\rightarrow$

$$\alpha = \text{uniform}, \quad K = \text{uniform},$$

$$\text{uniform scalar} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{uniform expansion} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{uniform e-folding}$$

#座標変換はすべて時間にしか依らない

時間スライスが同期

非線形曲率ゆらぎの有効作用

$$S^{(0)} = S[\alpha^{(0)}, \gamma_{ij}^{(0)}],$$

$$S^{(2)} = \int dt d^3x \alpha e^{3\psi} \left[(\text{H.C})^{(0)} \delta\alpha^{(2)} + (\text{M.C})_i^{(1)} \beta^{(1)i} + (\text{E.o.M})_{ij}^{(0)} \gamma^{(2)ij} + \frac{R[e^\psi f_{ij}]}{a^2} \right],$$

$$S^{(4)} = \int dt d^3x \alpha e^{3\psi} \left[A_{ij}^2 + (\text{H.C})^{(0)} \delta\alpha^{(4)} + (\text{M.C})_i^{(1)} (\beta^{(3)i} + 3\delta\psi^{(2)} \beta^{(1)i}) + (\text{E.o.M})_{ij}^{(0)} \gamma^{(4)ij} \right. \\ \left. + (\text{cross terms among } \delta\alpha^{(2)}, \gamma_{ij}^{(2)}) + (\text{terms with } (\delta\alpha^{(2)}, \gamma_{ij}^{(2)}) \times \text{spatial curvature}) \right].$$

• TT分解から $A_{ij} = \frac{\alpha^2(t) e^{2\psi(t)}}{\alpha(t)} \left(D_i \sigma_j - \frac{1}{3} D_k \sigma^k \gamma_{ij}^{(\text{BG})} + \frac{\dot{h}_{ij}}{2} \right) + O(\epsilon^4)$

$$K = \frac{3H}{\alpha} + 3 \left(\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\alpha} - \frac{H}{\alpha} \delta\alpha \right) + D_k \sigma^k + O(\epsilon^4)$$

$$\sigma^k = \frac{\dot{E}^k}{\alpha} - \frac{P^k}{\alpha}$$

• 運動量拘束条件

- 理論と対比はハミルトン拘束条件を組み合わせた

divergence part : $\dot{\mathcal{R}} - H\delta\alpha = 0$

divergence-free part : $D_j (D^{(i} \sigma^{j)}) = 0$

★ $\alpha = \alpha(t)$

$\dot{\psi} = O(\epsilon^2)$

が脱結合を

示すために必要

$$S_{\text{pert.}} = \int d\tau d^3x e^{3\psi} \left[\frac{z_S^2}{2} \left((\partial_\tau \mathcal{R})^2 - \frac{c_S^2}{2} \mathcal{R} R[e^{2\psi} f_{ij}] \right) + \frac{z_T^2}{8} \left((\partial_\tau h_{ij})^2 - 2c_T^2 h^{ij} G_{ij}[e^{2\psi} f_{kl}] \right) \right]$$

Scalar 成分

decouple になる

Tensor 成分

★ 空間座標変換により不変

長波長での曲率ゆらぎ (非線形)

- Mukhanov-Sasaki 型 + ソースの微分方程式

$$d\tau \equiv dt/a$$

$$\underbrace{\partial_\tau^2 \mathcal{R} + 2 \frac{2\partial_\tau z}{z} \partial_\tau \mathcal{R}}_{\text{WAM}} + \underbrace{\frac{c_s^2}{4} R[e^{2\psi} f_{ij}]}_{\text{1-ス (非線形)}} = 0$$

$$\underbrace{\partial_\tau^2 h_{ij} + \frac{2\partial_\tau z_T}{z_T} \partial_\tau h_{ij}}_{\text{WAM}} + \underbrace{2c_T^2 e^{-2\Psi} G_{ij}^{TT} [e^{2\Psi} f_{kl}]}_{\text{1-ス (非線形)}} = 0$$

- 解析解

$$\mathcal{R}(\tau, x^i) = \underbrace{\mathcal{R}_{\text{ini}}(x^i) + C(x^i) \int_{\tau_i}^\tau \frac{d\tau'}{z_S^2(\tau')}}_{\text{WAM}} - \underbrace{\frac{R[e^{2\Psi} f_{ij}]}{4} \int_{\tau_i}^\tau \frac{d\tau'}{z_S^2(\tau')} \int_{\tau_i}^{\tau'} d\tau'' c_S^2(\tau'') z_S^2(\tau'')}_{\text{1-ス (非線形)}}$$

$$\underbrace{h_{ij} = h_{ij,\text{ini}}(x^k) + C_{ij}(x^k) \int_{\tau_i}^\tau \frac{d\tau'}{z_T^2(\tau')}}_{\text{WAM}} - \underbrace{2e^{-2\Psi} G_{ij}^{TT} [e^{2\Psi} f_{ij}] \int_{\tau_i}^\tau \frac{d\tau'}{z_T^2(\tau')} \int_{\tau_i}^{\tau'} d\tau'' c_T^2(\tau'') z_T^2(\tau'')}_{\text{1-ス (非線形)}}$$

$$^{(3)}R \simeq -4a^{-2} \partial^2 \mathcal{R} \quad (\text{線形の場合})$$

$$^{(3)}R[\gamma_{ij}] \approx \frac{1}{a^2(t)} [R[e^{2\psi} f_{kl}] - e^{-2\psi} h^{ij} R_{ij}[e^{2\psi} f_{kl}] - 2\mathcal{R}_{\text{NL}} R[e^{2\psi} f_{kl}] - 4e^{-2\psi} f^{ij} D_i D_j \mathcal{R}]$$

☆ 3次元空間曲率の近似値を与える

場の再定義による不変性

- Disformal transformation J. Bekenstein 1993 +

$$g_{\mu\nu} \rightarrow C(\phi, X)g_{\mu\nu} + D(\phi, X)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

- 曲率の保存則

$$\psi(x^i) \rightarrow \psi(x^i) \quad f_{ij}(x^k) \rightarrow f_{ij}(x^k)$$

c.f. H.Motohashi and J.White 2015

- 非線形曲率ゆらぎの変換性

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} - \frac{XC_X}{C}\delta\alpha \quad h_{ij} \rightarrow h_{ij}$$

* 超ハッブルスケールで非線形に成り立つ

勾配展開法を用いたスカラー場+重力の研究

先行研究

本研究

計算する
ゲージ

uniform expansion/
energy

uniform scalar
(unitary gauge)

解析方法

運動方程式の
逐次近似

作用の逐次近似

勾配展開法の
定式化

K-essense ✓

Cubic Galileon ✓

Horndeski/GLPV ?

c.f. Y. Takamizu 2018

K-essense ✓

Cubic Galileon ✓

Horndeski/GLPV ✓

DHOST ✓

まとめ

- 拡張スカラー・テンソル理論において、勾配展開法を定式化した
- 空間曲率の性質

- 超ハッブルスケールで時間スライスが同期する

$$K_{ij}^{TF} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

- 勾配展開の2次で成立する、曲率ゆらぎの運動方程式が導出できる

- 場の再定義に対して不変

- 応用面 (議論したいこと)

- Consistency relationsの破れ、原始ブラックホール形成 etc.
- より広範な理論における曲率ゆらぎの定式化
- 曲率ゆらぎの量子化

c.f. T. Tanaka and Y. Urakawa 2021