

Chooz 限界程度の 1-3 角を持つ ニュートリノ振動の摂動論

首都大学東京大学院 理工学研究科 物理学専攻
浅野 克博

2011 年 2 月 18 日

要旨

ニュートリノ振動確率の近似公式として、Cervera 等によって導かれたものが広く使われている。それは振動確率を同程度に小さい2つのパラメータに関して2次まで摂動展開することによって導かれる。その一つは実験で測定されている質量2乗の差の比、 $(m_2^2 - m_1^2)/(m_3^2 - m_1^2) \equiv \Delta m_{21}^2/\Delta m_{31}^2 \cong 0.03$ である。もう一つは混合角 θ_{13} であり、Chooz 実験によって上限値が $\sin \theta_{13} \cong 0.2$ であることが知られている。最近の報告から、太陽実験と原子炉実験を併せた解析で θ_{13} が Chooz 実験による上限程度であることが示唆されている。この場合には、振動確率は $\sin \theta_{13}$ を Chooz 実験の上限程度である $\sqrt{\Delta m_{21}^2/\Delta m_{31}^2}$ と同程度とした摂動展開で系統的に求めることができる。本論文では、この摂動展開を行い、Cervera 公式に対する補正項を求め、数値計算によって求められた厳密な振動確率と比較した。この結果、この補正項が厳密な振動確率と Cervera 公式とのずれをよく説明することを示した。

目次

第1章 導入	3
第2章 基礎事項	4
2.1 真空中でのニュートリノ振動	4
2.2 物質中でのニュートリノ振動	6
2.3 振動確率	8
第3章 摂動展開	9
3.1 摂動展開の方法	9
3.2 S行列要素の計算	11
3.3 振動確率	14
3.3.1 Cervera 等の近似公式との関係	14
3.3.2 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ の振動確率	14
3.3.3 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ の振動確率	16
第4章 結果解析	18
4.1 設定条件	18
4.2 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ の振動確率	18
4.3 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ の振動確率	29
第5章 結論と議論	39
付録A 他のチャネルの振動確率	40

第1章 導入

ニュートリノ質量の存在に起因するニュートリノ振動現象は、その質量をゼロとする素粒子標準模型を超える物理探索の手段として精力的に研究されている [1][2][3]。現在までの実験で、3 世代ニュートリノ振動を記述するのに必要なパラメターのうち、混合角の θ_{12} 、 θ_{23} と、 $\Delta m_{31}^2 \equiv m_3^2 - m_1^2$ の符号を除く各質量の 2 乗差については、ほぼ決定している。しかし、 θ_{13} は、Chooz 実験 [4][5] などによって小さい上限値 0.2 が知られているのみであり、CP 位相 δ に至っては未定である。

こうしたなか、Cervera 等によって導かれた振動確率の近似公式 [6] が将来の長基線ニュートリノ実験計画立案のための基礎研究の手段として広く使われている。Cervera 等の近似公式は、 $\epsilon \cong \sin \theta_{13}$ と $\Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2 \equiv (m_2^2 - m_1^2) / (m_3^2 - m_1^2) (\cong 0.03)$ とを同程度とし、これらに関して ϵ の 2 乗のオーダーまで摂動展開することによって得られる。この解析的近似式を用いて種々の理論的解析が行われてきた。一例としては、「パラメター縮退」と呼ばれている多重解の問題の分析がある [7]。

一方、最近の太陽ニュートリノや原子炉ニュートリノを含む諸実験の分析から、 θ_{13} の最適値は Chooz 実験上限程度との報告 [8][9][10][11][12] があり、この可能性の考慮が必要となった。この場合には、 $\sqrt{\epsilon} \cong \sin \theta_{13} (\cong 0.2)$ ととっておき、これと $\epsilon \cong \Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2$ に関して ϵ の 2 乗のオーダーまで摂動展開すれば Chooz 限界程度の大きな θ_{13} の値にも適用できる近似公式を作れる。

本論文で、我々はニュートリノ振動の全チャネルについて、このように大きな θ_{13} にも適用できる近似公式を導出した。さらに、ニュートリノと反ニュートリノについて、基線長と Δm_{31}^2 の符号と CP 位相 δ の値によって場合分けをし、我々の近似公式を Cervera 等の近似公式と厳密な数値計算で比較した。これによって、Cervera 等の近似公式では近似が悪い領域で我々の近似公式が有効であることを示し、また、その理由を考察した。

第2章 基礎事項

この章では、ニュートリノ振動の基礎理論を説明する [13]。2.1 節で、ニュートリノのフレーバーの固有状態と質量の固有状態を結びつける、牧・中川・坂田行列 [14] を説明し、真空中でのニュートリノ振動の発展方程式を導く。2.2 節で、物質との相互作用によるポテンシャルを示し、物質中でのニュートリノ振動の発展方程式を導く。2.3 節で、振動確率を定義する。

2.1 真空中でのニュートリノ振動

ニュートリノのフレーバーの固有状態（弱い相互作用の固有状態）である ν_e, ν_μ, ν_τ と質量の固有状態である ν_1, ν_2, ν_3 とは同一ではなく、フレーバーの固有状態は質量の固有状態の重ね合わせである。

$$\nu_\alpha = \sum_i (U_{MNS})_{\alpha i} \nu_i \quad (\alpha = e, \mu, \tau \quad i = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

混合行列 U_{MNS} は、牧・中川・坂田行列と呼ばれ、ユニタリー行列で、よく使われる表示では次のように表される。

$$\begin{aligned} U_{MNS} &= U_{23} U_{13} U_{12} \quad (2.2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & e^{-i\delta} s_{13} \\ -e^{i\delta} c_{12} s_{13} s_{23} - s_{12} c_{23} & -e^{i\delta} s_{12} s_{13} s_{23} + c_{12} c_{23} & c_{13} s_{23} \\ -e^{i\delta} c_{12} s_{13} s_{23} + s_{12} c_{23} & -e^{i\delta} s_{12} s_{13} s_{23} - c_{12} c_{23} & c_{13} c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 $c_{12} = \cos \theta_{12}$ $s_{12} = \sin \theta_{12}$ などである。

一般の $N \times N$ 複素ユニタリ行列の実数パラメータの数は $2N^2$ 個ある。そのうちユニタリ条件での N^2 個と、ニュートリノの位相に吸収できる $(2N - 1)$ 個 (-1 は U_{MNS} 全体にかかる位相を残すため) とを差し引いて、独立な実数パラメータの数は、

$$2N^2 - N^2 - (2N - 1) = (N - 1)^2 = \frac{N(N - 1)}{2} + \frac{(N - 1)(N - 2)}{2}$$

である。第3辺第1項は N 次元空間の回転面の数 ${}_N C_2$ 、第3辺第2項は CP 位相の数である。 $N = 3$ で回転面の数=3、CP 位相の数=1 となる [15]。

質量の固有状態の時間発展の方程式は、 E_i をエネルギー固有値として、

$$i \frac{\partial}{\partial t} \nu_i(t) = E_i \nu_i(t)$$

である。自然単位を用いているので、 $x = t$ とし、(2.1) を代入すると、

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu_{fla}(x) = U_{MNS} \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} U_{MNS}^\dagger \nu_{fla}(x)$$

$$\nu_{fla}(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \\ \nu_\tau(x) \end{pmatrix}$$

と書ける。 m_i を質量、 p を運動量として、 $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$ $m_i \ll E_i$ $E_i \cong E \cong p$ から

$$E_i \cong p + \frac{m_i^2}{2E}$$

と近似できる。これを用いるとフレーバーの固有状態の発展方程式は、

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu_{fla}(x) = U_{MNS} \begin{pmatrix} p + \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & p + \frac{m_3^2}{2E} \end{pmatrix} U_{MNS}^\dagger \nu_{fla}(x)$$

である。これを次のようにして、より簡単な式にする。

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial x} \nu_{fla}(x) &= U_{MNS} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3^2 - m_1^2}{2E} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p + \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & p + \frac{m_3^2}{2E} \end{pmatrix} \right) U_{MNS}^\dagger \nu_{fla}(x) \\ &= \left(\frac{m_3^2 - m_1^2}{2E} U_{MNS} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2 - m_1^2}{m_3^2 - m_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{MNS}^\dagger + \left(p + \frac{m_1^2}{2E} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \nu_{fla}(x) \end{aligned}$$

と変形し、

$$\tilde{\nu}_{fla}(x) = \exp\left(i\left(p + \frac{m_1^2}{2E}\right)x\right) \nu_{fla}(x)$$

とおいて代入すると、

$$i \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\nu}_{fla}(x) = \frac{m_3^2 - m_1^2}{2E} U_{MNS} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2 - m_1^2}{m_3^2 - m_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{MNS}^\dagger \tilde{\nu}_{fla}(x)$$

となる。つまり、単位行列に比例した項

$$\left(p + \frac{m_1^2}{2E}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は、 $\nu_{fla}(x)$ に吸収することができる。

よって、真空中でのフレーバーの固有状態の発展方程式は、

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu_{fla}(x) = \Delta U_{MNS} H_{vac} U_{MNS}^\dagger \nu_{fla}(x)$$

$$H_{vac} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで、

$$\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2 \quad \Delta \equiv \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \quad r_\Delta \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$$

と定義されている。

2.2 物質中でのニュートリノ振動

物質中でのニュートリノ振動は、L.Wolfenstein によって最初に考察され [16]、S.P.Mikheyev と A.Y.Smirnov によって太陽内部を通過するニュートリノに適用された [17]。

ニュートリノが物質中を通過する場合、物質との相互作用によるポテンシャルが真空中を通過する場合のハミルトニアンに加わる。物質はほとんどが電子と原子核（ほとんどが u クォークと d クォーク）で占められるので、図 2.1 の相互作用を考えればよい。電子ニュートリノと電子との荷電弱カレント弾性散乱（図 2.1(a)）の不変散乱振幅 M は、 $\frac{g}{\sqrt{2}}$ を弱結合定数、 M_W を W ボゾンの質量、 q を W ボゾンの運動量として、

$$M = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e \frac{-(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_e$$

である。 M_W は 80 GeV であるので、本論文で論じているニュートリノのエネルギーが 10 GeV 以下では $q^2 \ll M_W^2$ としてよい。 $\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$ とおいて、Fiertz の組み換え定理を用いると、 G_F を Fermi 結合定数として、

$$M = 2\sqrt{2}G_F (\bar{\nu}_e \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_e) (\bar{e} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e)$$

と書ける。電子が静止しているとする、 N_e を物質中の偏極していない電子の数密度として、 $\mu = 0$ で、 $2\bar{e} \gamma^0 \frac{1 - \gamma_5}{2} e = N_e$ であるので、電子と電子ニュートリノの荷電弱カレント弾性散乱の有効ポテンシャルエネルギーは、

$$V_e = \sqrt{2}G_F N_e$$

と書ける。電子数密度 N_e は、 ρ を物質密度、 m_N を核子の質量、 Y_e を原子中の電子数と核子数の比とすると、

$$N_e = \frac{\rho}{m_N} Y_e$$

である。ここで、ニュートリノは地球内部を通過するので Y_e を $\frac{1}{2}$ としてよい。また、中性弱カレント弾性散乱 (図 2.1(b)) の有効ポテンシャルエネルギーを V_n とする。 ρ は地球内部をニュートリノが通過する道筋の密度分布の平均として一定とした。それによって V_e と V_n は一定となる。 $\nu_\alpha + d \rightarrow \alpha^- + u$ ($\alpha = e, \mu, \tau$) の反応 (図 2.1(c)) は、この生成物から再びニュートリノが生成されることはほとんどないので、ニュートリノ振動への寄与は無視してよい。これらを用いるとフレーバーの固有状態の発展方程式は、

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu_{fla}(x) = \left(U_{MNS} \begin{pmatrix} p + \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & p + \frac{m_3^2}{2E} \end{pmatrix} U_{MNS}^\dagger + \begin{pmatrix} V_e + V_n & 0 & 0 \\ 0 & V_n & 0 \\ 0 & 0 & V_n \end{pmatrix} \right) \nu_{fla}(x)$$

である。これを次のようにして、より簡単な式にする。

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu_{fla}(x) = \left(\frac{m_3^2 - m_1^2}{2E} U_{MNS} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3^2 - m_1^2}{2E} \end{pmatrix} U_{MNS}^\dagger + \begin{pmatrix} V_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \left(p + \frac{m_1^2}{2E} + V_n \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \nu_{fla}(x)$$

と変形し、

$$\tilde{\nu}_{fla}(x) = \exp\left(i\left(p + \frac{m_1^2}{2E} + V_n\right)x\right) \nu_{fla}(x)$$

とおいて代入すると、単位行列に比例した項、

$$\left(p + \frac{m_1^2}{2E} + V_n \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は、 $\nu_{fla}(x)$ に吸収することができる。

よって、物質中でのフレーバーの固有状態の発展方程式は

$$i \frac{\partial}{\partial x} \nu_{fla}(x) = H_{mat} \nu_{fla}(x) \tag{2.3}$$

$$H_{mat} \equiv \Delta \left(U_{MNS} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{MNS}^\dagger + \begin{pmatrix} r_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

と書ける。ここで、

$$\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2 \quad \Delta \equiv \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \quad r_\Delta \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \quad r_A \equiv \frac{a}{\Delta m_{31}^2} \quad a \equiv 2\sqrt{2}G_F N_e E$$

と定義されている。

反ニュートリノであれば、 H_{mat} が複素共役をとるので CP 位相の δ の符号を逆にし、ニュートリノのカレントの符号が逆になるので a の符号を逆にすればよい。

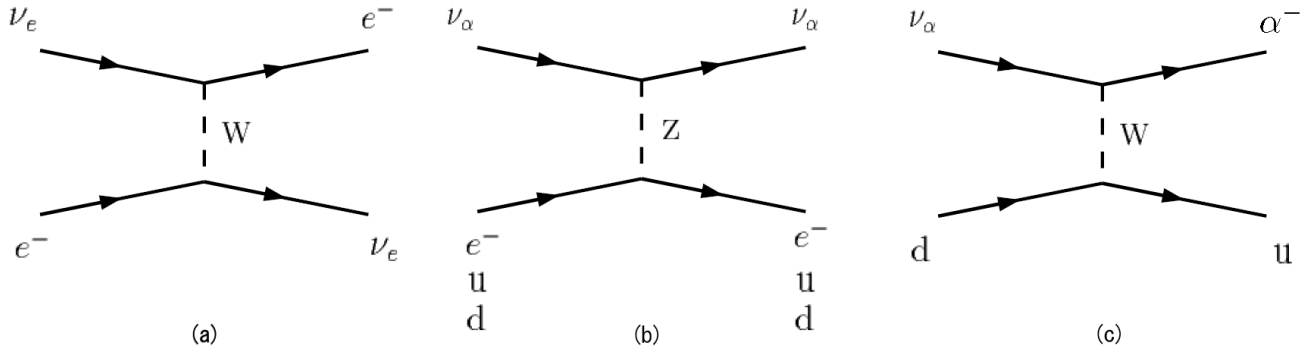


図 2.1: ニュートリノと物質との相互作用。(a) 荷電弱カレント弾性散乱。(b) 中性弱カレント弾性散乱。(c) $\nu_\alpha + d \rightarrow \alpha^- + u$ ($\alpha = e, \mu, \tau$)。

2.3 振動確率

次に、(2.3) の微分方程式を解いて、振動確率を導く。
距離を L として、

$$\nu_{fla}(L) = S(L)\nu_{fla}(0) \quad S(L) \equiv \exp(-iH_{mat}L) \quad S \equiv \begin{pmatrix} S_{ee} & S_{e\mu} & S_{e\tau} \\ S_{\mu e} & S_{\mu\mu} & S_{\mu\tau} \\ S_{\tau e} & S_{\tau\mu} & S_{\tau\tau} \end{pmatrix}$$

と解ける。すると、 ν_β から ν_α への振動確率 $P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha)$ は、

$$P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha)(L) = |\langle \nu_\alpha(L) | \nu_\beta(0) \rangle|^2 = |\langle \sum_\gamma S_{\alpha\gamma}(L) \nu_\gamma(0) | \nu_\beta(0) \rangle|^2 = |S_{\alpha\beta}(L)|^2 \quad (2.4)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = e, \mu, \tau)$$

と書ける。

第3章 摂動展開

この章では、ニュートリノ振動確率の摂動展開を説明する [18]。3.1 節で、摂動展開の方法を説明する。3.2 節で、S 行列を求める。3.3 節で、 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ と $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ の振動確率を求め、Cervera 等の近似公式との関係を説明する。

3.1 摂動展開の方法

以下、 $\nu_{fla}(x)$ を $\nu(x)$ と書く。振動確率は (2.4) で得られるが、計算を簡単にするために、(2.2) の U_{23}, U_{13}, U_{12} を用いて、

$$\tilde{\nu} \equiv U_{23}^\dagger \nu \quad \tilde{H} \equiv U_{23}^\dagger H U_{23}$$

とおくと [19]、(2.3) の微分方程式は、

$$i \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\nu}(x) = \tilde{H} \tilde{\nu}(x) \quad (3.1)$$

$$\tilde{H} \equiv \Delta \left(U_{13} U_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{12}^\dagger U_{13}^\dagger + \begin{pmatrix} r_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

と書けて、解は、

$$\tilde{\nu}(L) = \tilde{S}(L) \tilde{\nu}(0)$$

$$\tilde{S}(L) \equiv \exp(-i\tilde{H}x) = U_{23}^\dagger \exp(-iHx) U_{23}$$

となる。ここで、

$$\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2 \quad \Delta \equiv \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \quad r_\Delta \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \quad r_A \equiv \frac{a}{\Delta m_{31}^2} \quad a \equiv 2\sqrt{2}G_F N_e E$$

と定義されている。よって、振動確率は、

$$P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha)(L) = |(U_{23} \tilde{S}(L) U_{23}^\dagger)_{\alpha\beta}|^2 \quad (3.2)$$

と書ける。

摂動論におけるニュートリノ振動に関するパラメターの値は、

$$r_A \sim O(1) \quad \Delta L \sim O(1)$$

と仮定されている。

本論文で、我々は2つの摂動展開パラメーターの大きさを次のように仮定する。

$$s_{13} \equiv \sin \theta_{13} \cong \sqrt{\epsilon} \quad r_{\Delta} \equiv \frac{\Delta m_{21}}{\Delta m_{31}} \cong \epsilon$$

そして、これらに関して ϵ の2乗のオーダーまで($\sqrt{\epsilon}$ を基準にするなら4次まで)摂動展開を行う。すると、 $\sqrt{\epsilon}$ のべき乗で摂動展開項の次数が分かり見通しが良い。そうしておいて、 \tilde{H} を行列要素が ϵ の0乗、 $\frac{1}{2}$ 乗、1乗、 $\frac{3}{2}$ 乗、2乗の行列 $\tilde{H}^{(0)}$ 、 $\tilde{H}^{(\frac{1}{2})}$ 、 $\tilde{H}^{(1)}$ 、 $\tilde{H}^{(\frac{3}{2})}$ 、 $\tilde{H}^{(2)}$ に分ける。

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(\frac{1}{2})} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(\frac{3}{2})} + \tilde{H}^{(2)} \\ \tilde{H}^{(0)} &= \Delta \begin{pmatrix} r_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \tilde{H}^{(\frac{1}{2})} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta s_{13} e^{i\delta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{H}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \Delta s_{13}^2 + \Delta r_{\Delta} s_{12}^2 & \Delta r_{\Delta} s_{12} c_{12} & 0 \\ \Delta r_{\Delta} s_{12} c_{12} & \Delta r_{\Delta} c_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta s_{13}^2 \end{pmatrix} \\ \tilde{H}^{(\frac{3}{2})} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Delta s_{13} (r_{\Delta} s_{12}^2 + \frac{1}{2} s_{13}^2) e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & -\Delta r_{\Delta} s_{13} s_{12} c_{12} e^{-i\delta} \\ -\Delta s_{13} (r_{\Delta} s_{12}^2 + \frac{1}{2} s_{13}^2) e^{i\delta} & -\Delta r_{\Delta} s_{13} s_{12} c_{12} e^{i\delta} & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{H}^{(2)} &= \begin{pmatrix} -\Delta r_{\Delta} s_{13}^2 s_{12}^2 & -\frac{1}{2} \Delta r_{\Delta} s_{13}^2 s_{12} c_{12} & 0 \\ -\frac{1}{2} \Delta r_{\Delta} s_{13}^2 s_{12} c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta r_{\Delta} s_{13}^2 s_{12}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\hat{v} \equiv \exp(i\tilde{H}^{(0)}x)\tilde{v}$ とおいて、(3.1)に代入すると、

$$i \frac{\partial}{\partial x} \hat{v}(x) = \hat{H}(x) \hat{v}(x)$$

$$\hat{H}(x) \equiv \exp(i\tilde{H}^{(0)}x) (\tilde{H}^{(\frac{1}{2})} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(\frac{3}{2})} + \tilde{H}^{(2)}) \exp(-i\tilde{H}^{(0)}x)$$

と書ける。これを0からLまで積分して、

$$\hat{v}(L) = \hat{v}(0) + (-i) \int_0^L dx_1 \hat{H}(x_1) \hat{v}(x_1)$$

となる。右辺の $\hat{v}(x_1)$ に繰り返し代入していくと、

$$\hat{v}(L) = \hat{v}(0) + (-i) \int_0^L dx_1 \hat{H}(x_1) \hat{v}(0) + (-i)^2 \int_0^L dx_1 \hat{H}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 \hat{H}(x_2) \hat{v}(x_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \{I + (-i) \int_0^L dx_1 \hat{H}(x_1) + (-i)^2 \int_0^L dx_1 \hat{H} \int_0^{x_1} dx_2 \hat{H}(x_2) \\
&\quad + (-i)^3 \int_0^L dx_1 \hat{H} \int_0^{x_1} dx_2 \hat{H}(x_2) \int_0^{x_2} dx_3 \hat{H}(x_3) + \dots\} \tilde{\nu}(0)
\end{aligned}$$

と書ける。つまり、

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}(L) &= \tilde{S}(L) \tilde{\nu}(0) \\
\tilde{S}(L) &\equiv \exp(-i\tilde{H}^0 x) \{I + (-i) \int_0^L dx_1 \hat{H}(x_1) + (-i)^2 \int_0^L dx_1 \hat{H} \int_0^{x_1} dx_2 \hat{H}(x_2) \\
&\quad + (-i)^3 \int_0^L dx_1 \hat{H} \int_0^{x_1} dx_2 \hat{H}(x_2) \int_0^{x_2} dx_3 \hat{H}(x_3) + \dots\}
\end{aligned}$$

である。この $\tilde{S}(L)$ を用いて、(3.2) の

$$P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha)(L) = |(U_{23} \tilde{S}(L) U_{23}^\dagger)_{\alpha\beta}|^2$$

で振動確率を求めることができる。

3.2 S 行列要素の計算

前節の方法を用いて、 ϵ の小さいオーダーから逐次的に求めていく。以下、 $\tilde{H}^{(\frac{1}{2})}$, $\tilde{H}^{(1)}$, $\tilde{H}^{(\frac{3}{2})}$, $\tilde{H}^{(2)}$ を $H^{(\frac{1}{2})}$, $H^{(1)}$, $H^{(\frac{3}{2})}$, $H^{(2)}$ と書くことにする。振動確率を ϵ の 2 乗のオーダーまで求めるために、 \tilde{S} 行列を ϵ の 2 乗のオーダーまで求めておく。行列要素が ϵ の $\frac{1}{2}$ 乗、1 乗、 $\frac{3}{2}$ 乗、2 乗である \tilde{S} 行列を $\tilde{S}^{(\frac{1}{2})}$ 、 $\tilde{S}^{(1)}$ 、 $\tilde{S}^{(\frac{3}{2})}$ 、 $\tilde{S}^{(2)}$ と書くと、次のようにして求めることができる。

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \tilde{S}^{(0)} + \tilde{S}^{(\frac{1}{2})} + \tilde{S}^{(1)} + \tilde{S}^{(\frac{3}{2})} + \tilde{S}^{(2)} \\
\tilde{S}^{(0)} &= e^{-i\tilde{H}_0 L} I \\
\tilde{S}^{(\frac{1}{2})} &= e^{-i\tilde{H}_0 L} (-i) \int_0^L dx_1 H^{(\frac{1}{2})}(x_1) \\
\tilde{S}^{(1)} &= e^{-i\tilde{H}_0 L} \{(-i) \int_0^L dx_1 H^{(1)}(x_1) + (-i)^2 \int_0^L dx_1 H^{(\frac{1}{2})}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(\frac{1}{2})}(x_2)\} \\
\tilde{S}^{(\frac{3}{2})} &= e^{-i\tilde{H}_0 L} \{(-i) \int_0^L dx_1 H^{(\frac{3}{2})}(x_1) \\
&\quad + (-i)^2 \int_0^L dx_1 H^{(\frac{1}{2})}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(1)}(x_2) + (-i)^2 \int_0^L dx_1 H^{(1)}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(\frac{1}{2})}(x_2) \\
&\quad + (-i)^3 \int_0^L dx_1 H^{(\frac{1}{2})}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(\frac{1}{2})}(x_2) \int_0^{x_2} dx_3 H^{(\frac{1}{2})}(x_3)\} \\
\tilde{S}^{(2)} &= e^{-i\tilde{H}_0 L} \{(-i) \int_0^L dx_1 H^{(2)}(x_1) \\
&\quad + (-i)^2 \int_0^L dx_1 H^{(1)}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(1)}(x_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-i)^2 \int_0^L dx_1 H^{(\frac{1}{2})}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(\frac{3}{2})}(x_2) + (-i)^2 \int_0^L dx_1 H^{(\frac{3}{2})}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(\frac{1}{2})}(x_2) \\
& +(-i)^3 \int_0^L dx_1 H^{(\frac{1}{2})}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(\frac{1}{2})}(x_2) \int_0^{x_2} dx_3 H^{(1)}(x_3) \\
& +(-i)^3 \int_0^L dx_1 H^{(\frac{1}{2})}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(1)}(x_2) \int_0^{x_2} dx_3 H^{(\frac{1}{2})}(x_3) \\
& +(-i)^3 \int_0^L dx_1 H^{(1)}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(\frac{1}{2})}(x_2) \int_0^{x_2} dx_3 H^{(\frac{1}{2})}(x_3) \\
& +(-i)^4 \int_0^L dx_1 H^{(\frac{1}{2})}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 H^{(\frac{1}{2})}(x_2) \int_0^{x_2} dx_3 H^{(\frac{1}{2})}(x_3) \int_0^{x_3} dx_4 H^{(\frac{1}{2})}(x_4) \}
\end{aligned}$$

計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{ee}^{(0)} &= e^{-i\Delta r_A L} \\
\tilde{S}_{ee}^{(1)} &= s_{13}^2 \frac{1}{1-r_A} \left\{ (i\Delta r_A L - \frac{1}{1-r_A}) e^{-i\Delta r_A L} + \frac{1}{1-r_A} e^{-i\Delta L} \right\} + r_\Delta (-i\Delta s_{12}^2 L e^{-i\Delta r_A L}) \\
\tilde{S}_{ee}^{(2)} &= s_{13}^4 \frac{1}{(1-r_A)^2} \left\{ r_A \left(-\frac{\Delta^2 r_A}{2} L^2 - i\frac{\Delta(r_A+1)}{1-r_A} L + \frac{r_A+2}{(1-r_A)^2} \right) e^{-i\Delta r_A L} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1-r_A} \left(-i\Delta r_A L - \frac{r_A(r_A+2)}{1-r_A} \right) e^{-i\Delta L} \right\} \\
&\quad + r_\Delta s_{13}^2 \frac{1}{1-r_A} s_{12}^2 \left\{ (\Delta^2 r_A L^2 + i\frac{\Delta(1+r_A)}{1-r_A} L - \frac{2r_A}{(1-r_A)^2}) e^{-i\Delta r_A L} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2r_A}{(1-r_A)^2} e^{-i\Delta L} \right\} \\
&\quad + r_\Delta^2 s_{12}^2 \left\{ \frac{1}{r_A^2} c_{12}^2 + \left(-\frac{1}{2} \Delta^2 s_{12}^2 L^2 - i\frac{\Delta}{r_A} c_{12}^2 L - \frac{1}{r_A^2} c_{12}^2 \right) e^{-i\Delta r_A L} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{e\mu}^{(1)} &= r_\Delta \frac{1}{r_A} s_{12} c_{12} (-1 + e^{-i\Delta r_A L}) \\
\tilde{S}_{e\mu}^{(2)} &= r_\Delta s_{13}^2 s_{12} c_{12} \left\{ -\frac{1}{2r_A} + \left(i\frac{\Delta}{1-r_A} L + \frac{1-2r_A-r_A^2}{2r_A(1-r_A)^2} \right) e^{-i\Delta r_A L} + \frac{r_A}{(1-r_A)^2} e^{-i\Delta L} \right\} \\
&\quad + r_\Delta^2 \frac{1}{r_A} s_{12} c_{12} \left[i\Delta c_{12}^2 L + \frac{1}{r_A} (s_{12}^2 - c_{12}^2) + \left\{ -i\Delta s_{12}^2 L + \frac{1}{r_A} (c_{12}^2 - s_{12}^2) \right\} e^{-i\Delta r_A L} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{e\tau}^{(\frac{1}{2})}(\delta) &= e^{-i\delta} s_{13} \frac{1}{1-r_A} (-e^{-i\Delta r_A L} + e^{-i\Delta L}) \\
\tilde{S}_{e\tau}^{(\frac{3}{2})}(\delta) &= e^{-i\delta} \left[s_{13}^3 \frac{1}{(1-r_A)^2} \left\{ (-i\Delta r_A L + \frac{(1+r_A)^2}{2(1-r_A)}) e^{-i\Delta r_A L} + (-i\Delta r_A L - \frac{(1+r_A)^2}{2(1-r_A)}) e^{-i\Delta L} \right\} \right. \\
&\quad \left. + r_\Delta s_{13} \frac{1}{1-r_A} s_{12}^2 \left\{ (i\Delta L - \frac{r_A}{1-r_A}) e^{-i\Delta r_A L} + \frac{r_A}{1-r_A} e^{-i\Delta L} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\tilde{S}_{\mu\mu}^{(0)} = 1$$

$$\tilde{S}_{\mu\mu}^{(1)} = r_{\Delta}(-i\Delta c_{12}^2 L)$$

$$\tilde{S}_{\mu\mu}^{(2)} = r_{\Delta}^2 c_{12}^2 \left(-\frac{1}{2} \Delta^2 c_{12}^2 L^2 + i \frac{\Delta}{r_A} s_{12}^2 L - \frac{1}{r_A^2} s_{12}^2 + \frac{1}{r_A^2} s_{12}^2 e^{-i\Delta r_A L} \right)$$

$$\tilde{S}_{\mu\tau}^{(\frac{3}{2})}(\delta) = e^{-i\delta} r_{\Delta} s_{13} s_{12} c_{12} \left(\frac{1+r_A}{r_A} - \frac{1}{r_A(1-r_A)} e^{-i\Delta r_A L} + \frac{r_A}{1-r_A} e^{-i\Delta L} \right)$$

$$\tilde{S}_{\tau\tau}^{(0)} = e^{-i\Delta L}$$

$$\tilde{S}_{\tau\tau}^{(1)} = s_{13}^2 \frac{1}{1-r_A} \left\{ \frac{1}{1-r_A} e^{-i\Delta r_A L} + \left(-i\Delta r_A L - \frac{1}{1-r_A} \right) e^{-i\Delta L} \right\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\tau\tau}^{(2)} = & s_{13}^4 \frac{r_A}{(1-r_A)^2} \left\{ \frac{1}{1-r_A} \left(i\Delta L - \frac{2+r_A}{1-r_A} \right) e^{-i\Delta r_A L} \right. \\ & \left. + \left(-\frac{\Delta^2 r_A}{2} L^2 + i \frac{\Delta(1+r_A)}{1-r_A} L + \frac{2+r_A}{(1-r_A)^2} \right) e^{-i\Delta L} \right\} \\ & + r_{\Delta} s_{13}^2 \frac{1}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 \left\{ \left(-i\Delta L + \frac{2r_A}{1-r_A} \right) e^{-i\Delta r_A L} + r_A \left(-i\Delta r_A L - \frac{2}{1-r_A} \right) e^{-i\Delta L} \right\} \end{aligned}$$

この他の \tilde{S} 行列要素について、

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_{ee}^{(\frac{1}{2})}, \tilde{S}_{ee}^{(\frac{3}{2})}, \\ & \tilde{S}_{e\mu}^{(0)}, \tilde{S}_{e\mu}^{(\frac{1}{2})}, \tilde{S}_{e\mu}^{(\frac{3}{2})}, \\ & \tilde{S}_{e\tau}^{(0)}, \tilde{S}_{e\tau}^{(1)}, \tilde{S}_{e\tau}^{(2)}, \\ & \tilde{S}_{\mu\mu}^{(\frac{1}{2})}, \tilde{S}_{\mu\mu}^{(\frac{3}{2})}, \\ & \tilde{S}_{\mu\tau}^{(0)}, \tilde{S}_{\mu\tau}^{(\frac{1}{2})}, \tilde{S}_{\mu\tau}^{(1)}, \tilde{S}_{\mu\tau}^{(2)}, \\ & \tilde{S}_{\tau\tau}^{(\frac{1}{2})}, \tilde{S}_{\tau\tau}^{(\frac{3}{2})} \end{aligned}$$

はゼロである。 \tilde{S} 行列間の関係は、

$$\tilde{S}_{\mu e} = \tilde{S}_{e\mu}, \tilde{S}_{\tau e}(\delta) = \tilde{S}_{e\tau}(-\delta), \tilde{S}_{\tau\mu}(\delta) = \tilde{S}_{\mu\tau}(-\delta)$$

となっている。

$S(L)$ を求めるには、次のようにすればよい。

$$\begin{aligned} S(L) &= U_{23} \tilde{S}(L) U_{23}^{\dagger} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}_{ee} & \tilde{S}_{e\mu} & \tilde{S}_{e\tau} \\ \tilde{S}_{\mu e} & \tilde{S}_{\mu\mu} & \tilde{S}_{\mu\tau} \\ \tilde{S}_{\tau e} & \tilde{S}_{\tau\mu} & \tilde{S}_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & -s_{23} \\ 0 & s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ee} &= \tilde{S}_{ee} \\ S_{e\mu} &= c_{23} \tilde{S}_{e\mu} + s_{23} \tilde{S}_{e\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{e\tau} &= -s_{23}\tilde{S}_{e\mu} + c_{23}\tilde{S}_{e\tau} \\
S_{\mu e} &= c_{23}\tilde{S}_{\mu e} + s_{23}\tilde{S}_{\tau e} \\
S_{\mu\mu} &= c_{23}^2\tilde{S}_{\mu\mu} + s_{23}^2\tilde{S}_{\tau\tau} + s_{23}c_{23}(\tilde{S}_{\mu\tau} + \tilde{S}_{\tau\mu}) \\
S_{\mu\tau} &= -s_{23}^2\tilde{S}_{\tau\mu} + c_{23}^2\tilde{S}_{\mu\tau} + s_{23}c_{23}(-\tilde{S}_{\mu\mu} + \tilde{S}_{\tau\tau}) \\
S_{\tau e} &= -s_{23}\tilde{S}_{\mu e} + c_{23}\tilde{S}_{\tau e} \\
S_{\tau\mu} &= -s_{23}^2\tilde{S}_{\mu\tau} + c_{23}^2\tilde{S}_{\tau\mu} + s_{23}c_{23}(-\tilde{S}_{\mu\mu} + \tilde{S}_{\tau\tau}) \\
S_{\tau\tau} &= s_{23}^2\tilde{S}_{\mu\mu} + c_{23}^2\tilde{S}_{\tau\tau} + s_{23}c_{23}(-\tilde{S}_{\mu\tau} - \tilde{S}_{\tau\mu})
\end{aligned}$$

S 行列間の関係は、

$$S_{\mu e}(\delta) = S_{e\mu}(-\delta), \quad S_{\tau e}(\delta) = S_{e\tau}(-\delta), \quad S_{\tau\mu}(\delta) = S_{\mu\tau}(-\delta),$$

$$S_{e\mu}(s_{23}, c_{23}) = S_{e\tau}(c_{23}, -s_{23}), \quad S_{\mu\mu}(s_{23}, c_{23}) = S_{\tau\tau}(c_{23}, -s_{23}), \quad S_{\tau\mu}(s_{23}, c_{23}) = -S_{\mu\tau}(c_{23}, -s_{23})$$

となっている。

3.3 振動確率

3.3.1 Cervera 等の近似公式との関係

S 行列要素を用いて、 $\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha$ の振動確率は、

$$P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha)(L) = |S(L)_{\alpha\beta}|^2$$

で求めることができる。

Cervera 等の近似公式は、2 つの摂動展開パラメーターの大きさを、

$$s_{13} \equiv \sin \theta_{13} \sim r_\Delta \equiv \frac{\Delta m_{21}}{\Delta m_{31}} \cong \epsilon'$$

というように同程度と仮定し、これらに関して ϵ' の 2 乗のオーダーまで摂動展開して導かれる。本論文で、我々は 2 つの摂動展開パラメーターの大きさを、

$$s_{13} \equiv \sin \theta_{13} \cong \sqrt{\epsilon} \quad r_\Delta \equiv \frac{\Delta m_{21}}{\Delta m_{31}} \cong \epsilon$$

と仮定し、これらに関して ϵ の 2 乗のオーダーまで摂動展開する。従って、 $P^{(0)} + P^{(\frac{1}{2})} + P^{(1)} + P^{(\frac{3}{2})} + (P^{(2)} \text{ のうち } r_\Delta^2 \text{ の項})$ は Cervera 等の近似公式に含まれる項であり、 $P^{(2)}$ のうちの、 s_{13}^4 の項 + $r_\Delta s_{13}^2$ の項は Cervera 等の近似公式に含まれない項である。

3.3.2 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) の振動確率

$\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ の振動確率を ϵ のオーダー別に分けた解析式は次の通りである。

$$P = P^{(1)} + P^{(\frac{3}{2})} + P^{(2)}$$

$$\begin{aligned}
P^{(1)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= s_{13}^2 \frac{4}{(1-r_A)^2} s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \\
P^{(\frac{3}{2})}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)(\delta) &= r_\Delta s_{13} \left\{ \cos\left(\delta - \frac{\Delta}{2}L\right) \right\} \frac{8}{r_A(1-r_A)} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \sin\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \\
P^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= r_\Delta^2 \frac{4}{r_A^2} s_{12}^2 c_{12}^2 c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \\
&\quad + s_{13}^4 \frac{4}{(1-r_A)^3} s_{23}^2 \left\{ \Delta r_A L \sin(\Delta(1-r_A)L) - \frac{(1+r_A)^2}{1-r_A} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\} \\
&\quad + r_\Delta s_{13}^2 \frac{2}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 s_{23}^2 \left\{ -\Delta L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \frac{4r_A}{1-r_A} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2 \quad \Delta \equiv \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \quad r_\Delta \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \quad r_A \equiv \frac{a}{\Delta m_{31}^2} \quad a \equiv 2\sqrt{2}G_F N_e E$$

と定義されている。 $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ の振動確率は、 δ と a の符号を逆にすれば得られる。

$\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) について、 ϵ の $\frac{5}{2}$ 乗のオーダーの計算については、 $S^{(0)} = 0$ であるので $S^{(\frac{5}{2})}$ を求める必要がなく、

$$P^{(\frac{5}{2})}(\delta) = S^{(\frac{1}{2})} S^{(2)*} + S^{(1)} S^{(\frac{3}{2})*} + S^{(\frac{3}{2})} S^{(1)*} + S^{(2)} S^{(\frac{5}{2})*}$$

と比較的容易であり、CP 位相 δ がある項なので求めた。

$$\begin{aligned}
P^{(\frac{5}{2})}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)(\delta) &= \\
&\quad r_\Delta s_{13}^3 \frac{2}{(1-r_A)^2} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} [\\
&\quad (\cos \delta) \left\{ -2\Delta L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \Delta L \sin(\Delta r_A L) + \Delta L \sin(\Delta L) - \frac{2(1+r_A)}{1-r_A} \cos(\Delta(1-r_A)L) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{1-r_A} \cos(\Delta r_A L) + \frac{2}{1-r_A} \cos(\Delta L) + \frac{2(1+r_A)}{1-r_A} \right\} \\
&\quad + (\sin \delta) \left[\frac{2}{1-r_A} \left\{ -\sin(\Delta(1-r_A)L) - \sin(\Delta r_A L) + \sin(\Delta L) \right\} + 2\Delta L \cos(\Delta(1-r_A)L) \right. \\
&\quad \left. - \Delta L \cos(\Delta r_A L) - \Delta L \cos(\Delta L) \right] \\
&\quad + r_\Delta^2 s_{13} \frac{2}{r_A(1-r_A)} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} [\\
&\quad (\cos \delta) \left[\Delta s_{12}^2 L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \Delta(c_{12}^2 - s_{12}^2) L \sin(\Delta r_A L) - \Delta c_{12}^2 L \sin(\Delta L) \right. \\
&\quad \left. + \frac{c_{12}^2 - s_{12}^2 + (s_{12}^2 - c_{12}^2)r_A + s_{12}^2 r_A^2}{r_A(1-r_A)} \left\{ \cos(\Delta(1-r_A)L) + \cos(\Delta r_A L) - \cos(\Delta L) - 1 \right\} \right] \\
&\quad + (\sin \delta) \left[\frac{c_{12}^2 - s_{12}^2 + (s_{12}^2 - c_{12}^2)r_A + s_{12}^2 r_A^2}{r_A(1-r_A)} \left\{ \sin(\Delta(1-r_A)L) + \sin(\Delta r_A L) - \sin(\Delta L) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \Delta s_{12}^2 L \cos(\Delta(1-r_A)L) + \Delta(s_{12}^2 - c_{12}^2) L \cos(\Delta r_A L) + \Delta c_{12}^2 L \cos(\Delta L) \right]
\end{aligned}$$

CP 位相 δ は ϵ の半整数乗のオーダーの振動確率のみに現れる。なぜなら、ゼロである行列要素を除くと、 $\tilde{H}^{(\frac{1}{2})}$ と $\tilde{H}^{(\frac{3}{2})}$ の要素には皆 δ があり、 $\tilde{H}^{(1)}$ と $\tilde{H}^{(2)}$ の要素には皆 δ がない。(積分していてもよい) 半整数乗の \tilde{H} 同士を掛けて、 ϵ の整数乗のオーダーにすると、全要素に δ がなくなってしまう。(積分していてもよい、) 半整数乗の \tilde{H} と整数乗の \tilde{H} を掛けて、 ϵ の半整数乗のオーダーにすると全要素に δ があるようになる。振動確率の計算は各 ϵ のオーダーの (積分していてもよい) \tilde{H} 同士を掛け合わせて加算したものである、上記のことが理解できる。

3.3.3 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ の振動確率

$\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ の振動確率を ϵ のオーダー別に分けた解析式は次の通りである。

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(\frac{3}{2})} + P^{(2)}$$

$$P^{(0)}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - 4s_{23}^2 c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}L\right)$$

$$P^{(1)}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = r_\Delta 2\Delta c_{12}^2 s_{23}^2 c_{23}^2 L \sin(\Delta L) \\ + s_{13}^2 \frac{2}{1-r_A} s_{23}^2 \left\{ \frac{1}{1-r_A} c_{23}^2 \cos(\Delta r_A L) - \Delta r_A c_{23}^2 L \sin(\Delta L) - \frac{1}{1-r_A} c_{23}^2 \cos(\Delta L) \right. \\ \left. - \frac{2}{1-r_A} s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\}$$

$$P^{(\frac{3}{2})}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)(\delta) = r_\Delta s_{13}(\cos \delta) \frac{8}{r_A(1-r_A)} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} \left\{ c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) + r_A^2 (s_{23}^2 - c_{23}^2) \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}L\right) \right. \\ \left. - s_{23}^2 \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \sin\left(\frac{\Delta}{2}L\right) \cos\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) - s_{23}^2 \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \cos\left(\frac{\Delta}{2}L\right) \sin\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\}$$

$$P^{(2)}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = r_\Delta^2 c_{12}^2 c_{23}^2 \left\{ -\frac{4}{r_A^2} s_{12}^2 c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) + (-\Delta^2 c_{12}^2 L^2 - \frac{2}{r_A^2} s_{12}^2) s_{23}^2 \cos(\Delta L) \right. \\ \left. - \frac{2\Delta}{r_A} s_{12}^2 s_{23}^2 L \sin(\Delta L) + \frac{2}{r_A^2} s_{12}^2 s_{23}^2 \cos(\Delta(1-r_A)L) \right\} \\ + s_{13}^4 \frac{1}{(1-r_A)^2} s_{23}^2 \left\{ -\frac{4\Delta r_A}{1-r_A} s_{23}^2 L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \frac{4(1+r_A)^2}{(1-r_A)^2} s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right. \\ \left. + \frac{2\Delta r_A}{1-r_A} c_{23}^2 L \sin(\Delta r_A L) - \frac{2r_A(2+r_A)}{(1-r_A)^2} c_{23}^2 \cos(\Delta r_A L) + r_A(-\Delta^2 r_A L^2 + \frac{2(2+r_A)}{(1-r_A)^2}) c_{23}^2 \cos(\Delta L) \right. \\ \left. + \frac{2\Delta r_A(1+r_A)}{1-r_A} c_{23}^2 L \sin(\Delta L) \right\} \\ + r_\Delta s_{13}^2 \frac{2}{1-r_A} s_{23}^2 \left\{ r_A(\Delta^2 c_{12}^2 L^2 - \frac{2}{(1-r_A)^2} s_{12}^2) c_{23}^2 \cos(\Delta L) + \frac{\Delta}{1-r_A} (-c_{12}^2 - r_A^2 s_{12}^2) c_{23}^2 L \sin(\Delta L) \right. \\ \left. + \frac{\Delta}{1-r_A} (c_{12}^2 - s_{12}^2) c_{23}^2 L \sin(\Delta r_A L) + \frac{2r_A}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 c_{23}^2 \cos(\Delta r_A L) \right. \\ \left. + \frac{\Delta}{1-r_A} s_{12}^2 s_{23}^2 L \sin(\Delta(1-r_A)L) - \frac{4r_A}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\}$$

ここで、

$$\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2 \quad \Delta \equiv \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \quad r_\Delta \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \quad r_A \equiv \frac{a}{\Delta m_{31}^2} \quad a \equiv 2\sqrt{2}G_F N_e E$$

と定義されている。 $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ の振動確率は、 a の符号を逆にすれば得られる。 δ は $\cos \delta$ として現われているので、符号を逆にしても振動確率は同じである。

第4章 結果解析

この章では、前章で求められた近似公式を数値計算での厳密な振動確率と比較することによって近似の精度を検証する。 θ_{13} の値としては、大きな値 $\sin \theta_{13} = 0.18$ と小さな値 $\sin \theta_{13} = 0.032$ の2つの代表的な値を用い、Cervera 等の近似公式とも比較する [19]。4.1 節で、ニュートリノ振動に関するパラメーターの値と本論文で設定した条件を述べる。4.2 節で $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) の振動確率について、4.3 節で $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) の振動確率について近似精度の検証結果を述べる。

4.1 設定条件

$\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) の振動チャンネルと $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) の振動チャンネルについて、伝播距離 L を 1000[km] と 4000[km] とし、エネルギーを 1-10[GeV] とした。そして、現在までの実験で分かっていない、 Δm_{31}^2 の符号 (正なら正常階層性、負なら逆階層性と呼ばれている) と CP 位相 δ の値 (0 と $\pi/2$ とした) とで場合分けをして、数値計算による厳密な値と比較した。

ニュートリノ振動に関する値は、

$$\Delta m_{21}^2 = 7.7 * 10^{-5} [eV^2] \quad |\Delta m_{31}^2| = 2.4 * 10^{-3} [eV^2] \quad \tan^2 \theta_{12} = 0.44 \quad \theta_{23} = \frac{\pi}{4}$$

$$\rho = \begin{cases} 2.8 [g/cm^3] (\text{距離 } 1000 [km] \text{ のとき}) \\ 3.6 [g/cm^3] (\text{距離 } 4000 [km] \text{ のとき}) \end{cases}$$

とした [20]。ここで、 $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2 (i, j = 1, 2, 3)$ と定義されている。物質密度 ρ は地球の化学組成模型 (Preliminary Reference Earth Model) [21] からの平均値を用いた。

4.2 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) の振動確率

小さい θ_{13} の場合

$\sin \theta_{13} = \Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2 = 0.032 (\cong \epsilon \text{ 程度})$ として、Cervera 等の近似公式を厳密解と比較した。

図 4.1 と図 4.2 に示されているように、 $L=1000$ [km] では、どの領域でも近似が非常に良い結果であった。また、図 4.3 と図 4.4 に示されているように、 $L=4000$ [km] では、厳密な値からわずかにずれているが近似が良い結果であった。

ここでは、我々の近似公式はプロットしなかった。その理由は、Cervera 等の近似公式に含まれる項 (以下、Cervera の項と呼ぶ) だけで近似が良く、そして、 θ_{13} が小さいので、より高次

の、Cervera 等の近似公式に含まれない項 (以下、Non-Cervera の項と呼ぶ) は無視できる程小さい値であり我々の近似公式は Cervera 等の近似公式とほとんど等しくなるからである。

大きい θ_{13} の場合

$\sin \theta_{13} = \sqrt{\Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2} = 0.18 (\cong \sqrt{\epsilon} \text{ 程度})$ として、Cervera 等の近似公式と我々の近似公式を厳密解と比較した。

図 4.5 と図 4.6 に示されているように、 $L=1000[\text{km}]$ では、Cervera 等の近似公式だけでも厳密な値からわずかにずれているが近似が良いといえる結果であった。しかし、図 4.7 と図 4.8 に示されているように、 $L=4000[\text{km}]$ で、図 4.7(a) と図 4.8(a) で示されている $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ の振動チャンネルで正常階層性の場合と、図 4.7(d) と図 4.8(d) で示されている $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ の振動チャンネルで逆階層性の場合に 3-8[GeV] 付近で Cervera の項だけでは近似が悪い結果であった。そして、Non-Cervera の項を加えた我々の近似公式で良い近似になった。

近似公式の各項別にみると、2つの項が特に大きな値を持っている。図 4.9(a) で示されている Cervera の項のうちの $\sin^2 \theta_{13}$ の項

$$s_{13}^2 \frac{4}{(1-r_A)^2} s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right)$$

で、厳密な値から大きくずれるまで増加して近似が悪くなり、図 4.9(c) で示されている Non-Cervera の項うちの $\sin^4 \theta_{13}$ の項

$$s_{13}^4 \frac{4}{(1-r_A)^3} s_{23}^2 \left\{ \Delta r_A L \sin(\Delta(1-r_A)L) - \frac{(1+r_A)^2}{1-r_A} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right) \right\}$$

を加えると、減少して近似が良くなるといえた。これらの項には $1/(1-r_A)$ が含まれていた。 r_A は、 V_e を物質との相互作用ポテンシャルとして、 $r_A \equiv (2V_e E)/(\Delta m_{31}^2)$ というものである。分母がゼロになるエネルギーは 7[GeV] であり、Cervera 等の近似公式では近似が悪く、我々の近似公式で良い近似である付近とほぼ一致している。また、図 4.9(b) で示されているのは Cervera の項のうちの r_Δ^2 の項

$$r_\Delta^2 \frac{4}{r_A^2} s_{12}^2 c_{12}^2 c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2} L\right)$$

であり、図 4.9(d) で示されているのは Non-Cervera の項のうちの $r_\Delta \sin^2 \theta_{13}$ の項

$$r_\Delta s_{13}^2 \frac{2}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 s_{23}^2 \left\{ -\Delta L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \frac{4r_A}{1-r_A} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right) \right\}$$

である。

CP 位相 δ に関して、 $L=4000[\text{km}]$ で、図 4.10(a) と (b) に Cervera の項のうちの CP 位相 δ が含まれる ϵ の 3/2 乗のオーダーの項 ($r_\Delta \sin \theta_{13}$ の項)

$$P^{(\frac{3}{2})}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)(\delta) = r_\Delta s_{13} \left\{ \cos\left(\delta - \frac{\Delta}{2} L\right) \right\} \frac{8}{r_A(1-r_A)} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2} L\right) \sin\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right)$$

を、図 4.10(c) と (d) に Non-Cervera の項のうちの CP 位相 δ が含まれる ϵ の $5/2$ 乗のオーダーの項 ($r_\Delta \sin^2 \theta_{13}$ の項 + $r_\Delta^3 \sin \theta_{13}$ の項)

$$\begin{aligned}
P^{(5/2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)(\delta) = & \\
& r_\Delta s_{13}^3 \frac{2}{(1-r_A)^2} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} [\\
& (\cos \delta) \left\{ -2\Delta L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \Delta L \sin(\Delta r_A L) + \Delta L \sin(\Delta L) - \frac{2(1+r_A)}{1-r_A} \cos(\Delta(1-r_A)L) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{1-r_A} \cos(\Delta r_A L) + \frac{2}{1-r_A} \cos(\Delta L) + \frac{2(1+r_A)}{1-r_A} \right\} \\
& + (\sin \delta) \left[\frac{2}{1-r_A} \left\{ -\sin(\Delta(1-r_A)L) - \sin(\Delta r_A L) + \sin(\Delta L) \right\} + 2\Delta L \cos(\Delta(1-r_A)L) \right. \\
& \quad \left. - \Delta L \cos(\Delta r_A L) - \Delta L \cos(\Delta L) \right] \\
& + r_\Delta^2 s_{13} \frac{2}{r_A(1-r_A)} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} [\\
& (\cos \delta) \left[\Delta s_{12}^2 L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \Delta(c_{12}^2 - s_{12}^2) L \sin(\Delta r_A L) - \Delta c_{12}^2 L \sin(\Delta L) \right. \\
& \quad \left. + \frac{c_{12}^2 - s_{12}^2 + (s_{12}^2 - c_{12}^2)r_A + s_{12}^2 r_A^2}{r_A(1-r_A)} \left\{ \cos(\Delta(1-r_A)L) + \cos(\Delta r_A L) - \cos(\Delta L) - 1 \right\} \right] \\
& + (\sin \delta) \left[\frac{c_{12}^2 - s_{12}^2 + (s_{12}^2 - c_{12}^2)r_A + s_{12}^2 r_A^2}{r_A(1-r_A)} \left\{ \sin(\Delta(1-r_A)L) + \sin(\Delta r_A L) - \sin(\Delta L) \right\} \right. \\
& \quad \left. - \Delta s_{12}^2 L \cos(\Delta(1-r_A)L) + \Delta(s_{12}^2 - c_{12}^2) L \cos(\Delta r_A L) + \Delta c_{12}^2 L \cos(\Delta L) \right] \\
&]
\end{aligned}$$

を示した。 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ の振動チャンネルで正常階層性の場合と $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ の振動チャンネルで逆階層性の場合に $4-5\text{GeV}$ 付近で、 ϵ の $3/2$ 乗のオーダーの項 ($r_\Delta \sin \theta_{13}$ の項) の増減と比較すると、 ϵ の $5/2$ 乗のオーダーの項 ($r_\Delta \sin^3 \theta_{13}$ の項 + $r_\Delta^2 \sin \theta_{13}$ の項) の増減は、向きが逆で絶対値が半分位あり、無視はできない結果であった。

我々の近似公式の近似の良い領域と悪い領域を全体的に把握しやすいように、ニュートリノのエネルギー E と伝播距離 L に対して、図 4.11 と図 4.12 に数値計算による厳密な値を示し、図 4.13 と図 4.14 に我々の近似公式と数値計算による厳密な値の差の絶対値 ($|Prob^{ours} - Prob^{exact}|$) を示した。

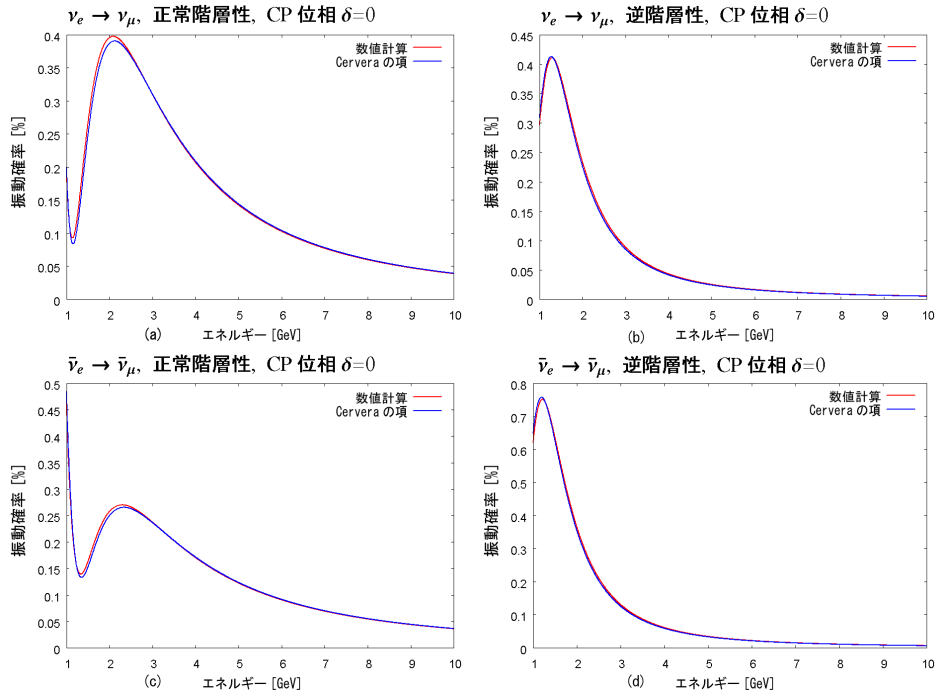


図 4.1: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。小さい $\sin \theta_{13}=0.032$ で、距離 $L=1000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=0$ 。Cervera 等の近似公式だけで近似が非常に良い。

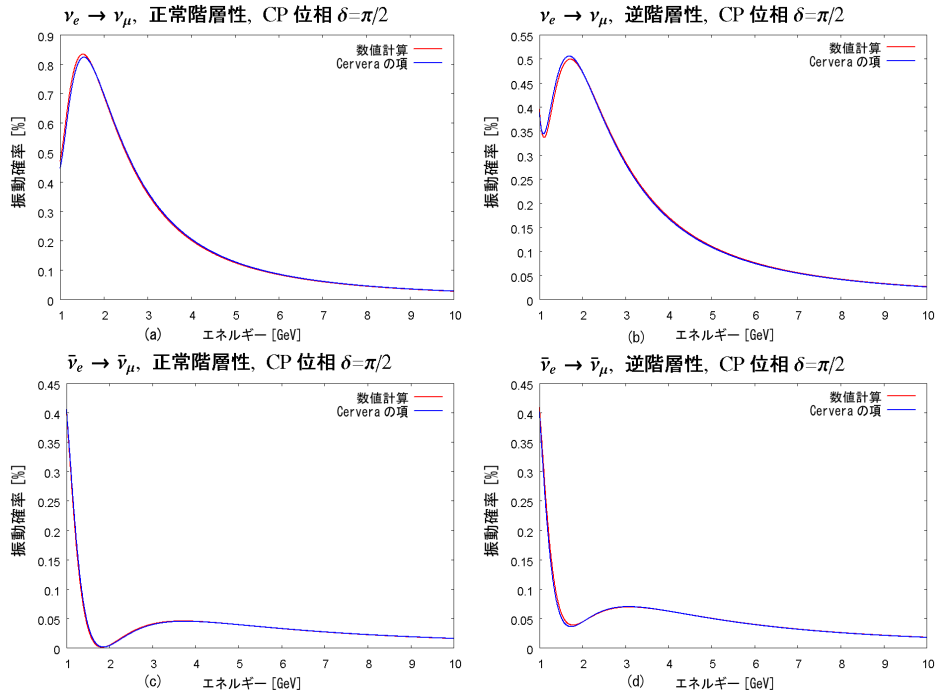


図 4.2: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。小さい $\sin \theta_{13}=0.032$ で、距離 $L=1000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 。Cervera 等の近似公式だけで近似が非常に良い。

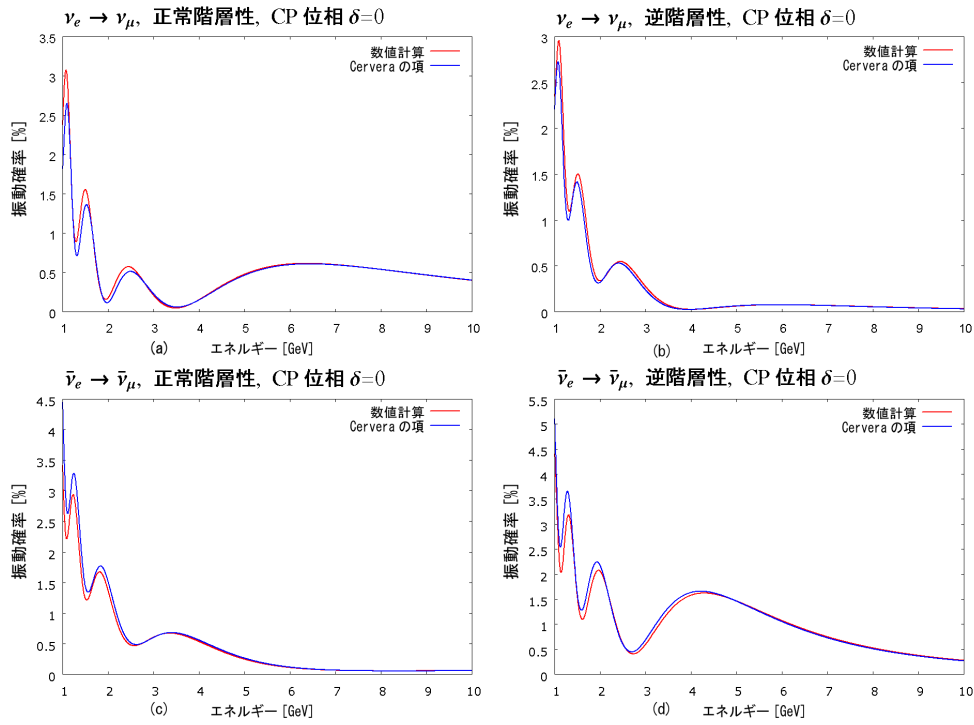


図 4.3: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。小さい $\sin \theta_{13}=0.032$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=0$ 。

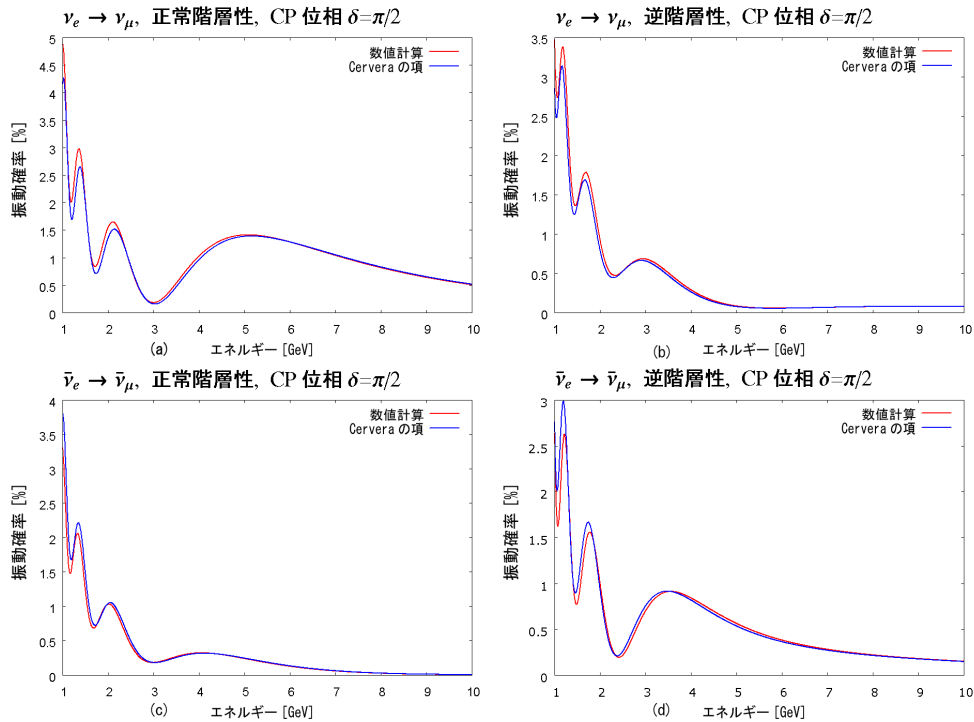


図 4.4: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。小さい $\sin \theta_{13}=0.032$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 。

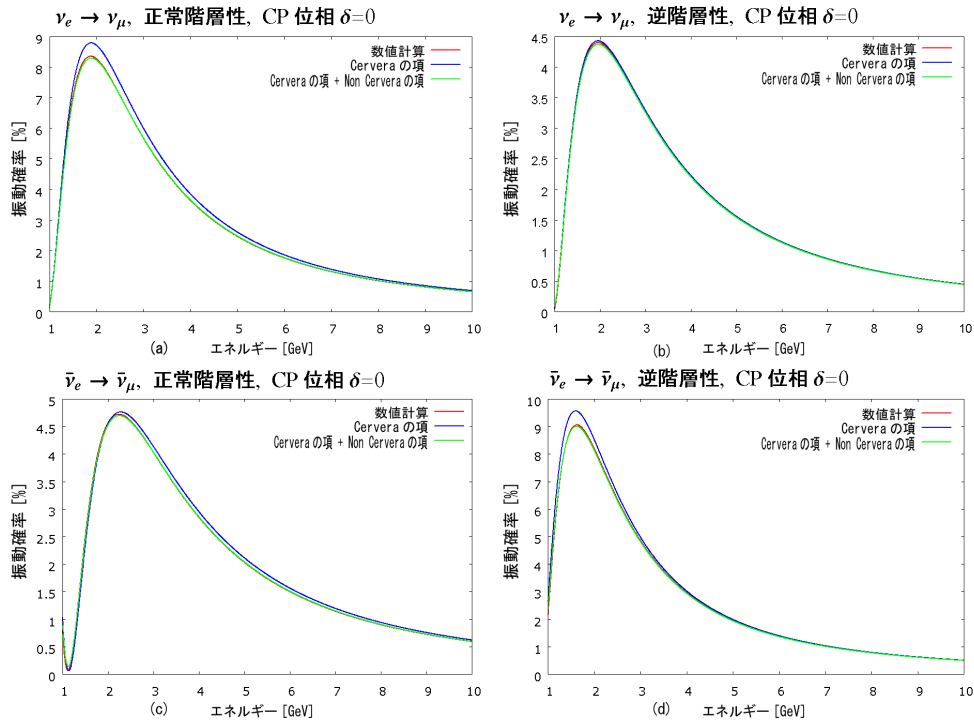


図 4.5: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。大きい $\sin\theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=1000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=0$ 。

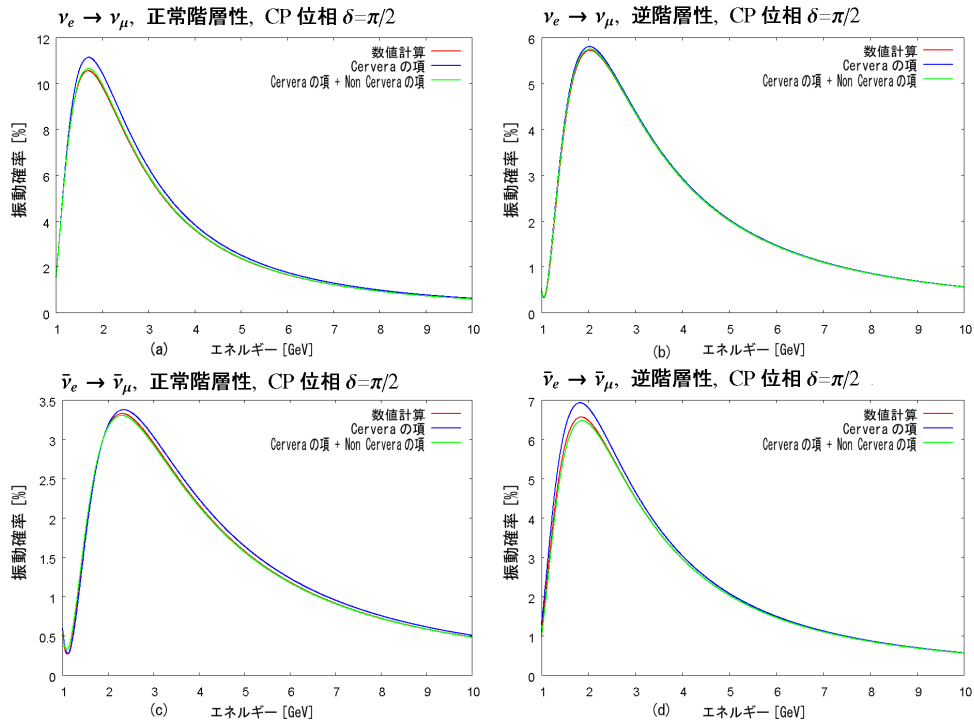


図 4.6: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。大きい $\sin\theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=1000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 。

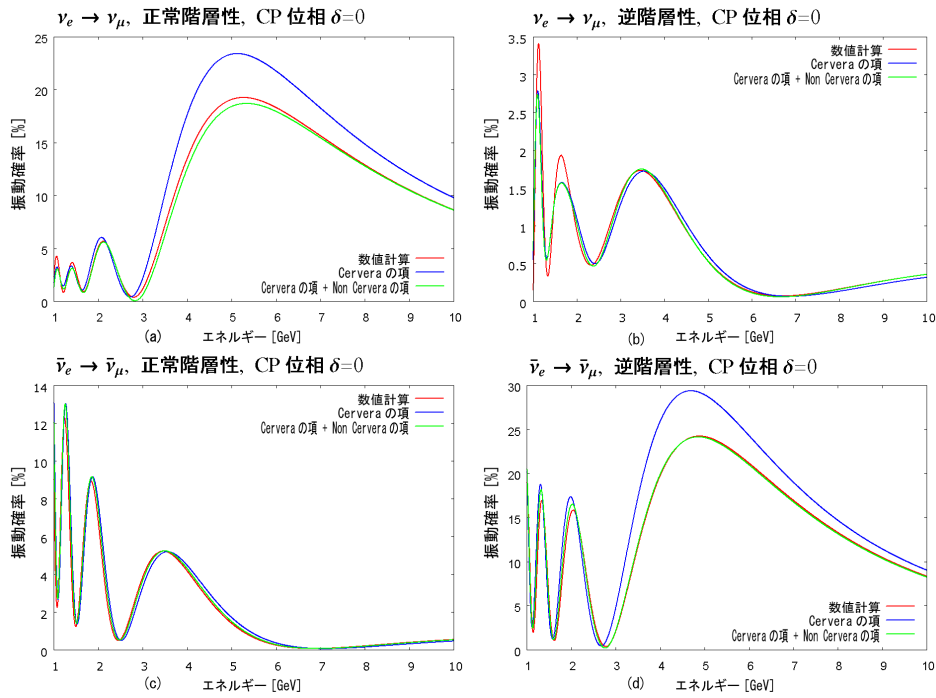


図 4.7: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=0$ 。図 (a) と図 (d) の 3-8GeV 付近が Cervera 等の近似公式だけでは近似が悪い。

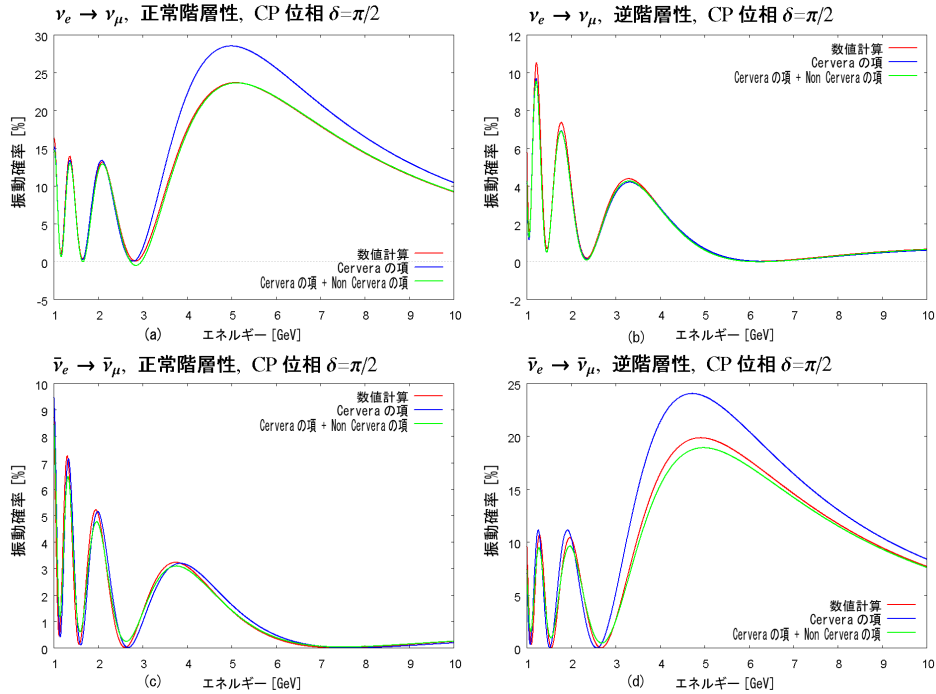


図 4.8: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 。図 (a) と図 (d) の 3-8GeV 付近が Cervera 等の近似公式だけでは近似が悪い。

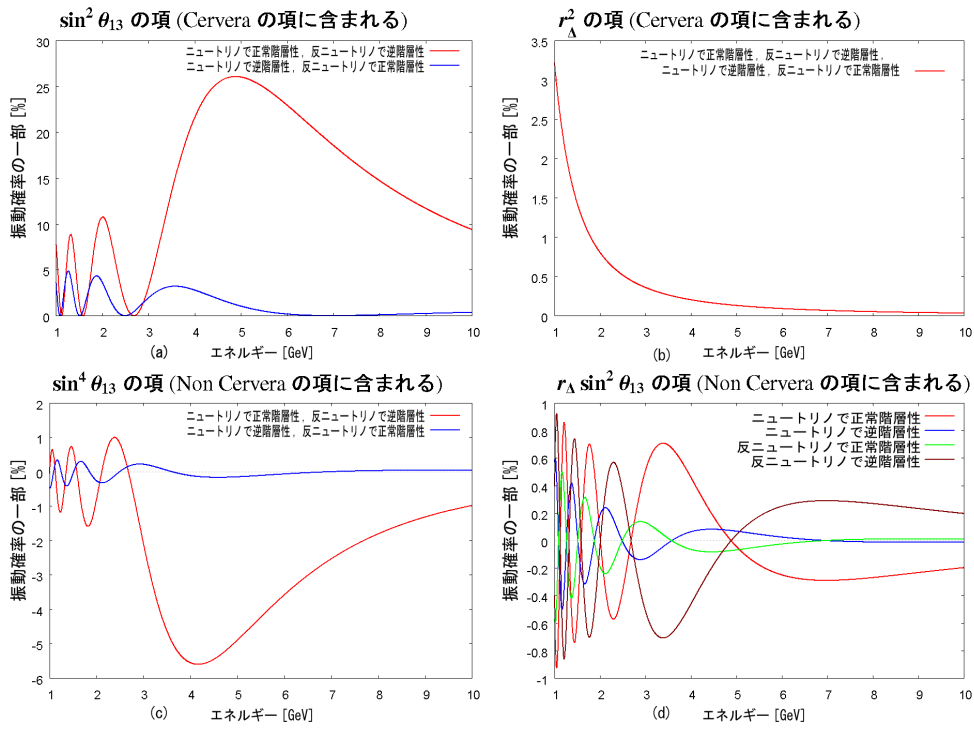


図 4.9: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ 。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 。単項ごとのプロットで、図 (a) に ϵ の 1 乗のオーダーの項であり、図 (b), 図 (c), 図 (d) は ϵ の 2 乗のオーダーに含まれる項である。ニュートリノで正常階層性の場合と反ニュートリノで逆階層性の場合とで、 $\sin^2 \theta_{13}$ の項 (Cervera の項に含まれる) が正方向に大きくなり、 $\sin^4 \theta_{13}$ の項 (Non Cervera の項に含まれる) が負方向に大きくなる。Cervera 等の近似公式では近似が悪く、Non Cervera の項を加えた我々の近似公式で近似が良くなるのはこれらの項による。

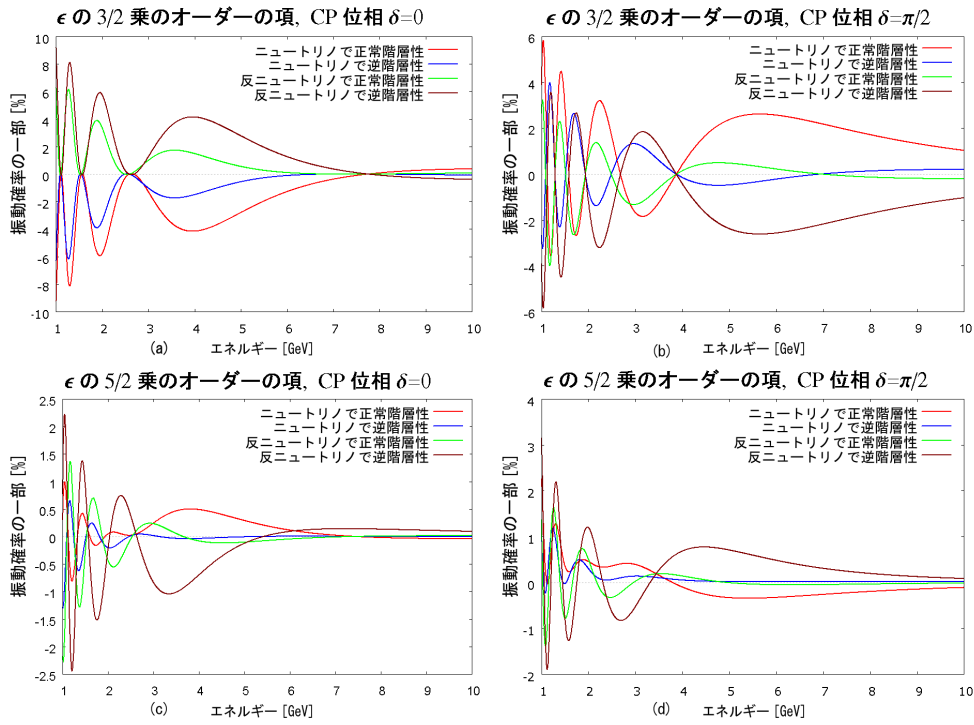


図 4.10: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。大きい $\sin\theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 。CP 位相 δ は ϵ の半整数乗のオーダーの項にだけ含まれる。 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ の振動チャンネルで正常階層性の場合と $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ の振動チャンネルで逆階層性の場合で、4-5GeV 付近では、図 (a) と図 (b) で示されている ϵ の $3/2$ 乗のオーダーの項 ($r_\Delta \sin\theta_{13}$ の項) による振動確率の増減と比較すると、図 (c), 図 (d) で示されている ϵ の $5/2$ 乗の項 ($r_\Delta \sin^3\theta_{13}$ の項 + $r_\Delta^2 \sin\theta_{13}$ の項) のものは向きが逆で大きさが半分位にまでなっている。

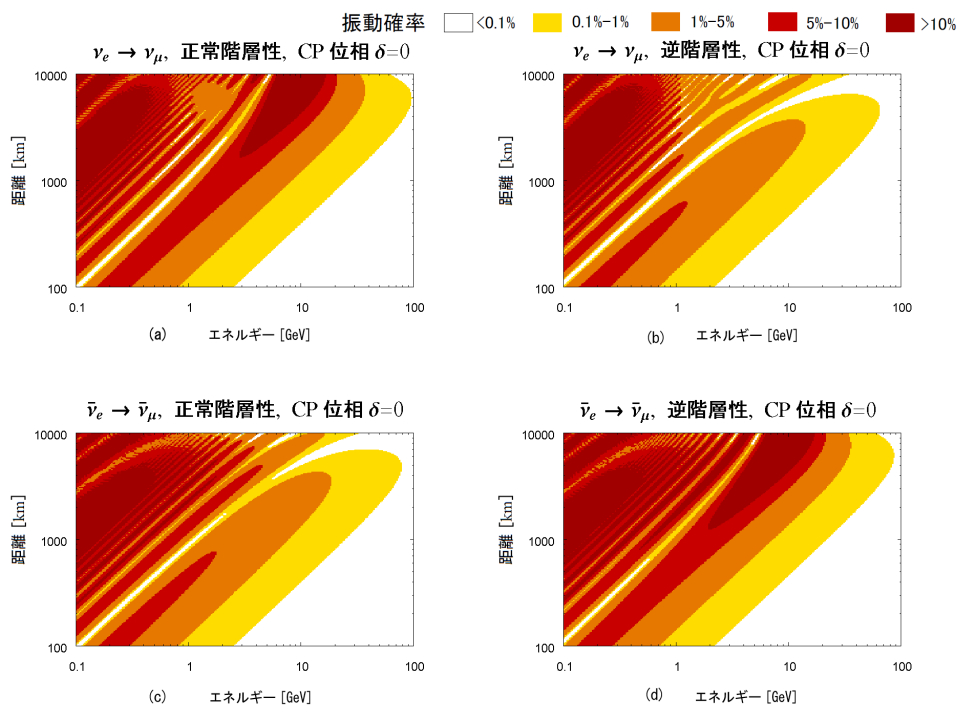


図 4.11: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) での数値計算による厳密な値。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、CP 位相 $\delta=0$ 、物質密度 $\rho=3.0[g/cm^3]$ 。

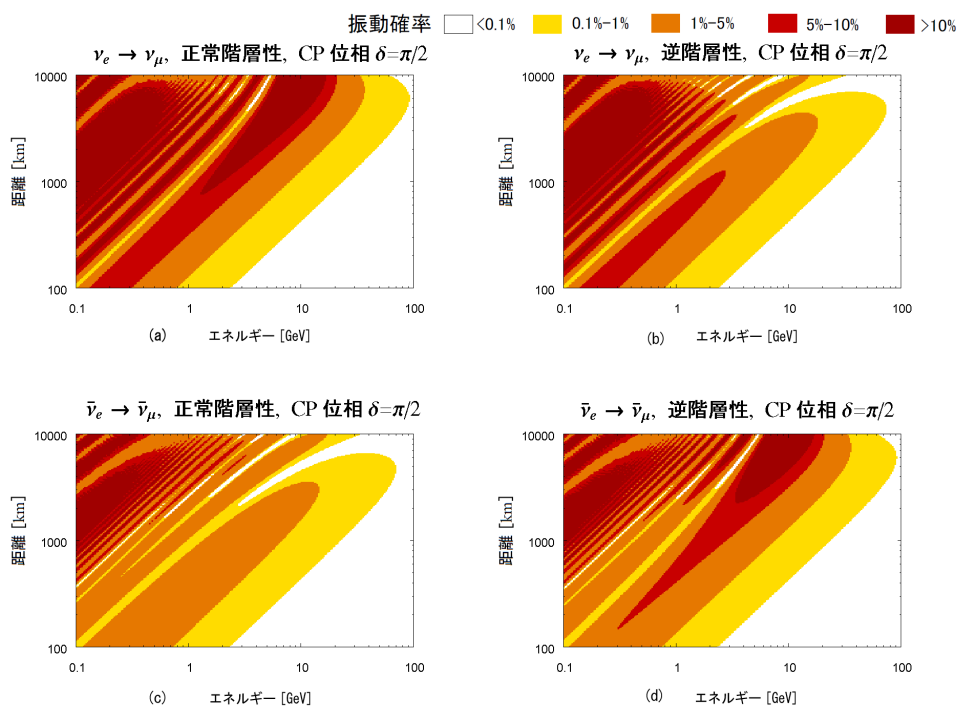


図 4.12: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) での数値計算による厳密な値。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 、物質密度 $\rho=3.0[g/cm^3]$ 。

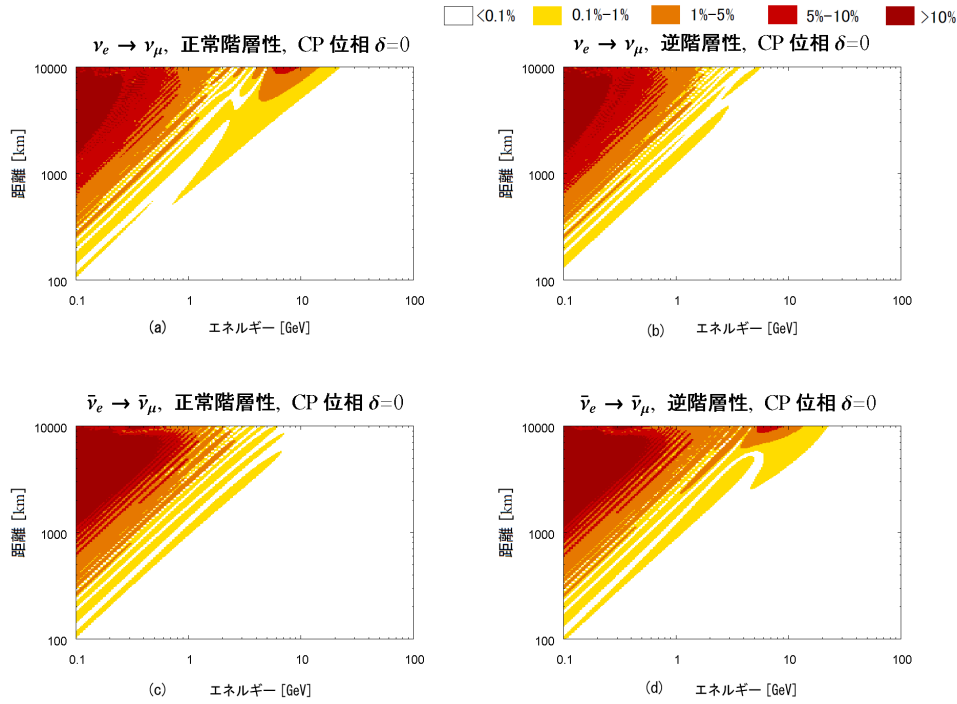


図 4.13: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) での我々の近似公式と数値計算による厳密な値の差の絶対値 ($|Prob^{ours} - Prob^{exact}|$)。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、CP 位相 $\delta=0$ 、物質密度 $\rho=3.0[g/cm^3]$ 。

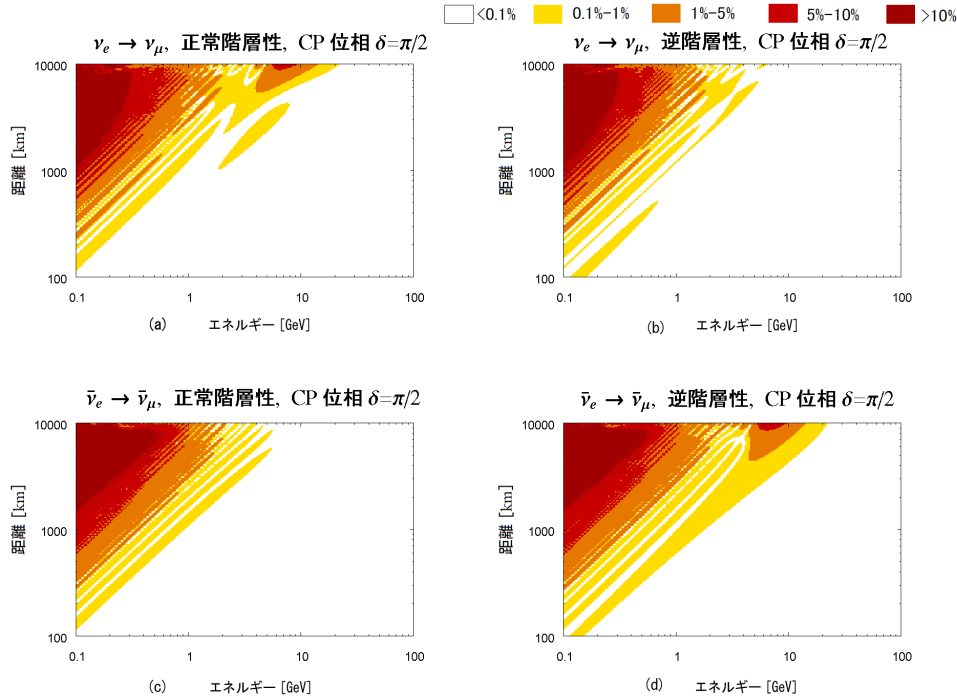


図 4.14: $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) での我々の近似公式と数値計算による厳密な値の差の絶対値 ($|Prob^{ours} - Prob^{exact}|$)。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 、物質密度 $\rho=3.0[g/cm^3]$ 。

4.3 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ の振動確率

小さい θ_{13} の場合

$\sin \theta_{13} = \Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2 = 0.032 (\cong \epsilon \text{ 程度})$ として、Cervera 等の近似公式を厳密解と比較した。

図 4.15 と図 4.16 に示されているように、 $L=1000[\text{km}]$ では、どの領域でも近似が非常に良い結果であった。また、図 4.17 と図 4.18 に示されているように、 $L=4000[\text{km}]$ でも、近似が良い結果であった。

ここでは、我々の近似公式はプロットしなかった。Cervera の項だけで近似が良く、そして、 θ_{13} が小さいので、より高次の Non-Cervera の項は無視できる程小さい値であり我々の近似公式は Cervera 等の近似公式とほとんど等しくなるからである。

大きい θ_{13} の場合

$\sin \theta_{13} = \sqrt{\Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2} = 0.18 (\cong \sqrt{\epsilon} \text{ 程度})$ として、Cervera 等の近似公式と我々の近似公式を厳密解と比較した。

図 4.19 と図 4.20 に示されているように、 $L=1000[\text{km}]$ では、Cervera 等の近似公式だけでも近似が良い結果であった。しかし、図 4.21 と図 4.22 に示されているように、 $L=4000[\text{km}]$ で、図 4.21(a) と図 4.22(a) で示されている $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ の振動チャンネルで正常階層性の場合と、図 4.21(d) と図 4.22(d) で示されている $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ の振動チャンネルで逆階層性の場合に 3-8[GeV] 付近で Cervera の項だけでは近似が悪い結果であった。そして、Non-Cervera の項を加えた我々の近似公式で近似が良くなる結果であった。

近似公式の各項別にみると、図 4.23(c) で示されている Cervera の項のうちの $\sin^2 \theta_{13}$ の項

$$s_{13}^2 \frac{2}{1-r_A} s_{23}^2 \left\{ \frac{1}{1-r_A} c_{23}^2 \cos(\Delta r_A L) - \Delta r_A c_{23}^2 L \sin(\Delta L) - \frac{1}{1-r_A} c_{23}^2 \cos(\Delta L) - \frac{2}{1-r_A} s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right) \right\}$$

で、厳密な値から大きくずれて近似が悪くなり、図 4.24(b) で示されている Non-Cervera の項のうちの $\sin^4 \theta_{13}$ の項

$$s_{13}^4 \frac{1}{(1-r_A)^2} s_{23}^2 \left\{ -\frac{4\Delta r_A}{1-r_A} s_{23}^2 L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \frac{4(1+r_A)^2}{(1-r_A)^2} s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right) + \frac{2\Delta r_A}{1-r_A} c_{23}^2 L \sin(\Delta r_A L) - \frac{2r_A(2+r_A)}{(1-r_A)^2} c_{23}^2 \cos(\Delta r_A L) + r_A(-\Delta^2 r_A L^2 + \frac{2(2+r_A)}{(1-r_A)^2}) c_{23}^2 \cos(\Delta L) + \frac{2\Delta r_A(1+r_A)}{1-r_A} c_{23}^2 L \sin(\Delta L) \right\}$$

を加えると、近似が良くなるといえた。これらの項には $1/(1-r_A)$ が含まれており、分母がゼロになるエネルギーの 7[GeV] は、Cervera 等の近似公式では近似が悪く、我々の近似公式で近

似が良くなる付近とほぼ一致している。また、図 4.23(a) で示されているのは Cervera の項のうちの ϵ の 0 乗のオーダーの項

$$1 - 4s_{23}^2 c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}L\right)$$

であり、図 4.23(b) で示されているのは Cervera の項のうちの r_Δ の項

$$r_\Delta 2\Delta c_{12}^2 s_{23}^2 c_{23}^2 L \sin(\Delta L)$$

であり、図 4.23(d) で示されているのは Cervera の項のうちの r_Δ^2 の項

$$r_\Delta^2 c_{12}^2 c_{23}^2 \left\{ -\frac{4}{r_A^2} s_{12}^2 c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) + (-\Delta^2 c_{12}^2 L^2 - \frac{2}{r_A^2} s_{12}^2) s_{23}^2 \cos(\Delta L) \right. \\ \left. - \frac{2\Delta}{r_A} s_{12}^2 s_{23}^2 L \sin(\Delta L) + \frac{2}{r_A^2} s_{12}^2 s_{23}^2 \cos(\Delta(1-r_A)L) \right\}$$

である。

図 4.24(a) で示されているのは Non-Cervera の項のうちの $r_\Delta \sin^2 \theta_{13}$ の項

$$r_\Delta s_{13}^2 \frac{2}{1-r_A} s_{23}^2 \left\{ r_A (\Delta^2 c_{12}^2 L^2 - \frac{2}{(1-r_A)^2} s_{12}^2) c_{23}^2 \cos(\Delta L) + \frac{\Delta}{1-r_A} (-c_{12}^2 - r_A^2 s_{12}^2) c_{23}^2 L \sin(\Delta L) \right. \\ \left. + \frac{\Delta}{1-r_A} (c_{12}^2 - s_{12}^2) c_{23}^2 L \sin(\Delta r_A L) + \frac{2r_A}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 c_{23}^2 \cos(\Delta r_A L) \right. \\ \left. + \frac{\Delta}{1-r_A} s_{12}^2 s_{23}^2 L \sin(\Delta(1-r_A)L) - \frac{4r_A}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\}$$

であり、図 4.24(c) と図 4.24(d) で示されているのは Cervera の項のうちの CP 位相 δ が含まれる ϵ の 3/2 乗のオーダーの項 ($r_\Delta \sin \theta_{13}$ の項)

$$P^{(\frac{3}{2})}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)(\delta) = r_\Delta s_{13}(\cos \delta) \frac{8}{r_A(1-r_A)} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} \left\{ c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) + r_A^2 (s_{23}^2 - c_{23}^2) \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}L\right) \right. \\ \left. - s_{23}^2 \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \sin\left(\frac{\Delta}{2}L\right) \cos\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) - s_{23}^2 \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \cos\left(\frac{\Delta}{2}L\right) \sin\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\}$$

である。

我々の近似公式の近似の良い領域と悪い領域を全体的に把握しやすいように、ニュートリノのエネルギー E と伝播距離 L に対して、図 4.25 と図 4.26 に数値計算による厳密な値を示し、図 4.27 と図 4.28 に我々の近似公式と数値計算による厳密な値の差の絶対値 ($|Prob^{ours} - Prob^{exact}|$) を示した。

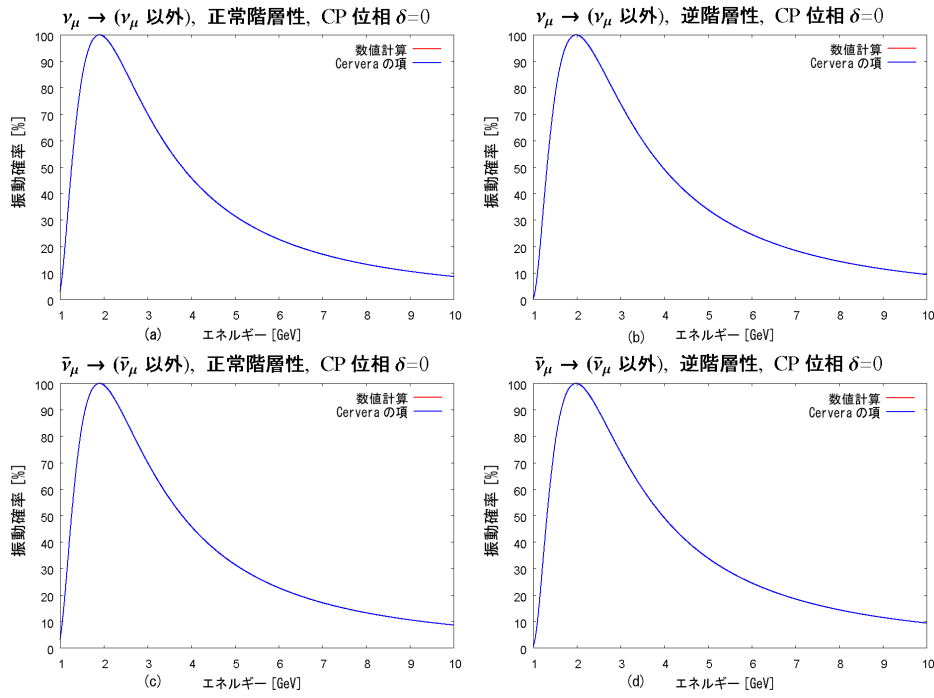


図 4.15 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。小さい $\sin \theta_{13}=0.032$ で、距離 $L=1000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=0$ 。Cervera 等の近似公式だけで近似が非常に良い。

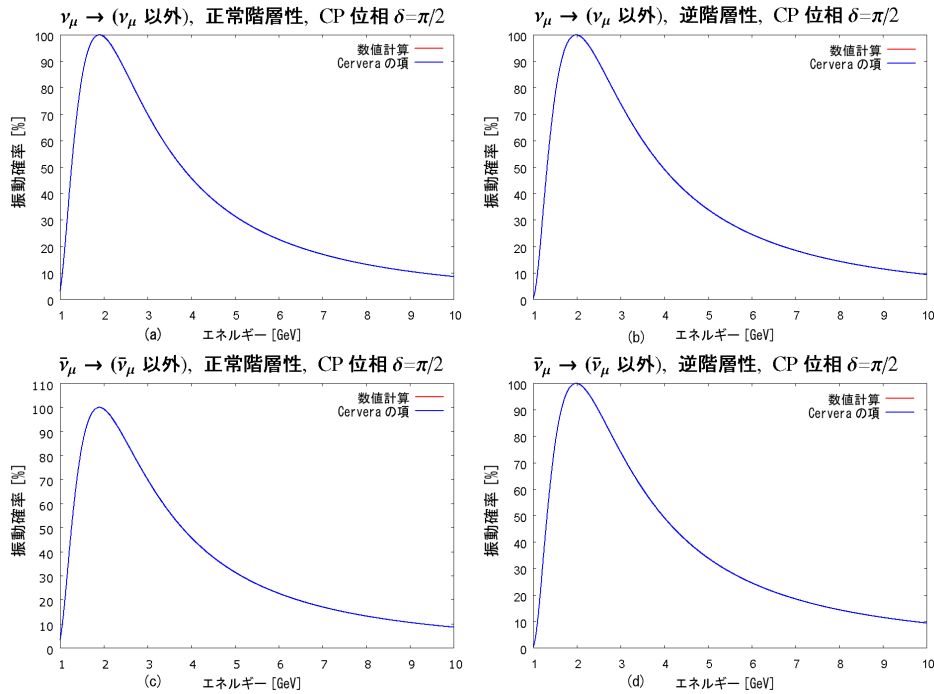


図 4.16 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。小さい $\sin \theta_{13}=0.032$ で、距離 $L=1000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 。Cervera 等の近似公式だけで近似が非常に良い。

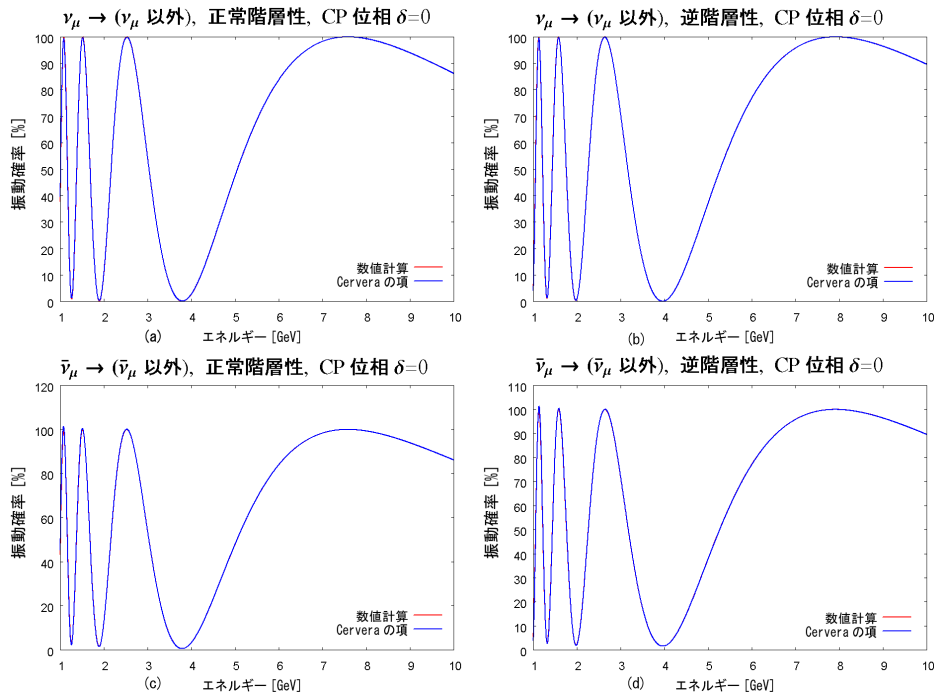


図 4.17: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ 。小さい $\sin \theta_{13}=0.032$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=0$ 。

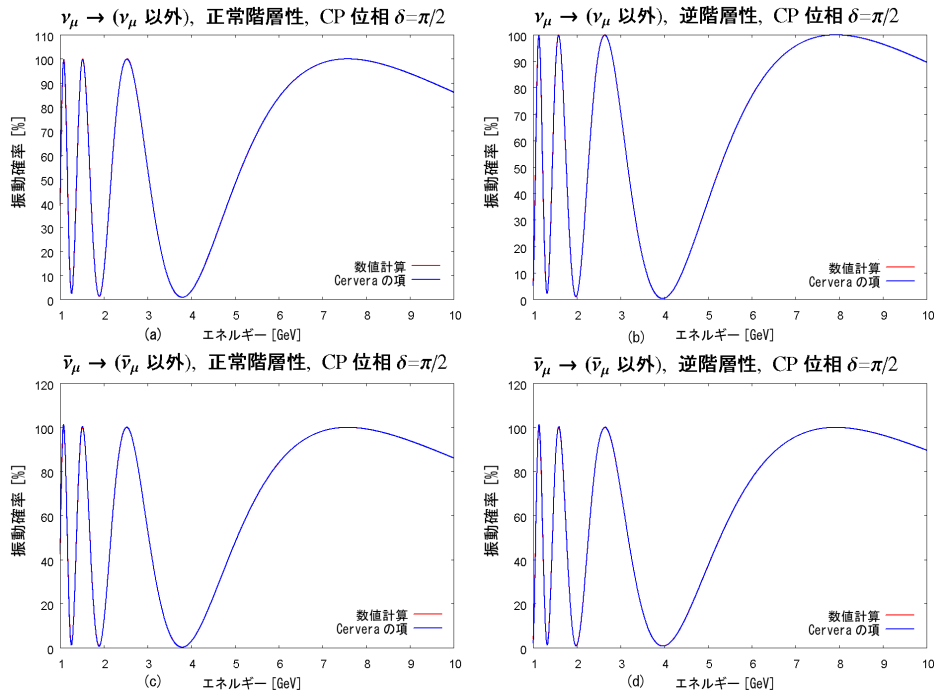


図 4.18: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ 。小さい $\sin \theta_{13}=0.032$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 。

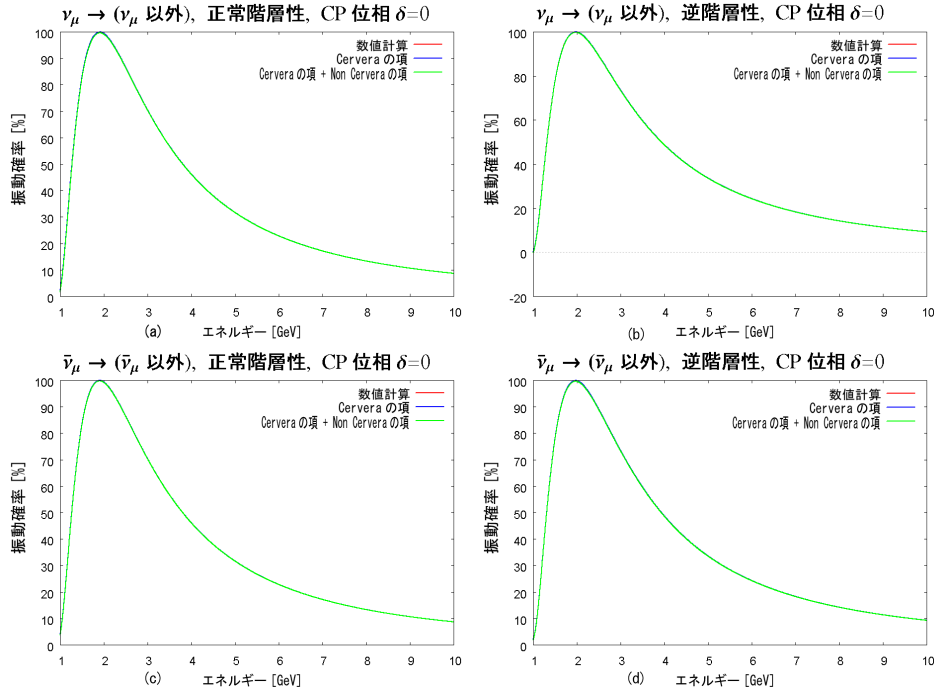


図 4.19: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=1000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=0$ 。

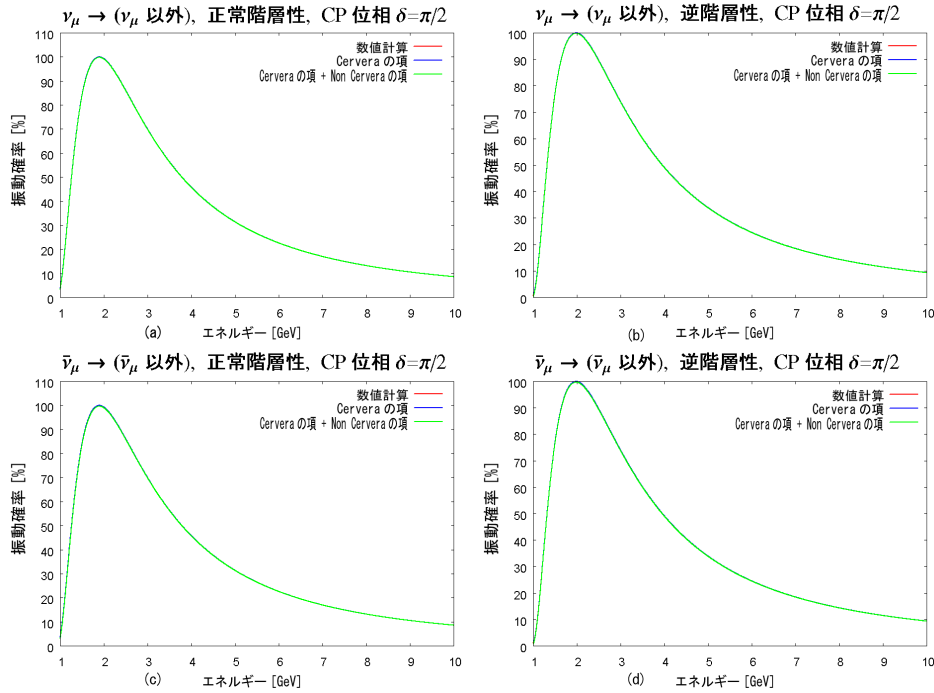


図 4.20: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$)。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=1000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 。

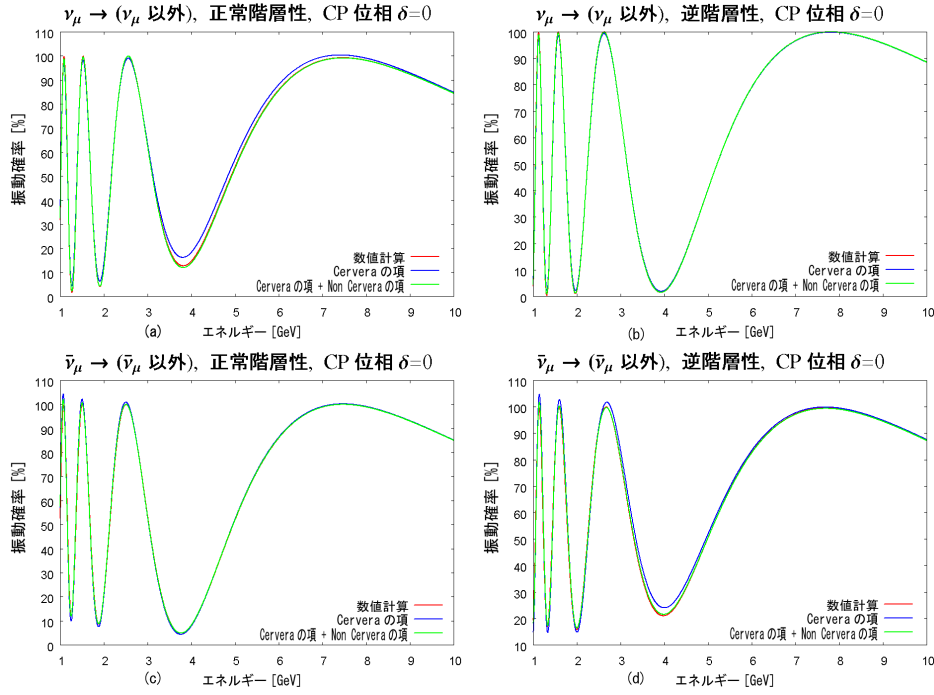


図 4.21: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ 。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=0$ 。図 (a) と図 (d) の 3-8GeV 付近が Cervera 等の近似公式だけでは近似が悪い。

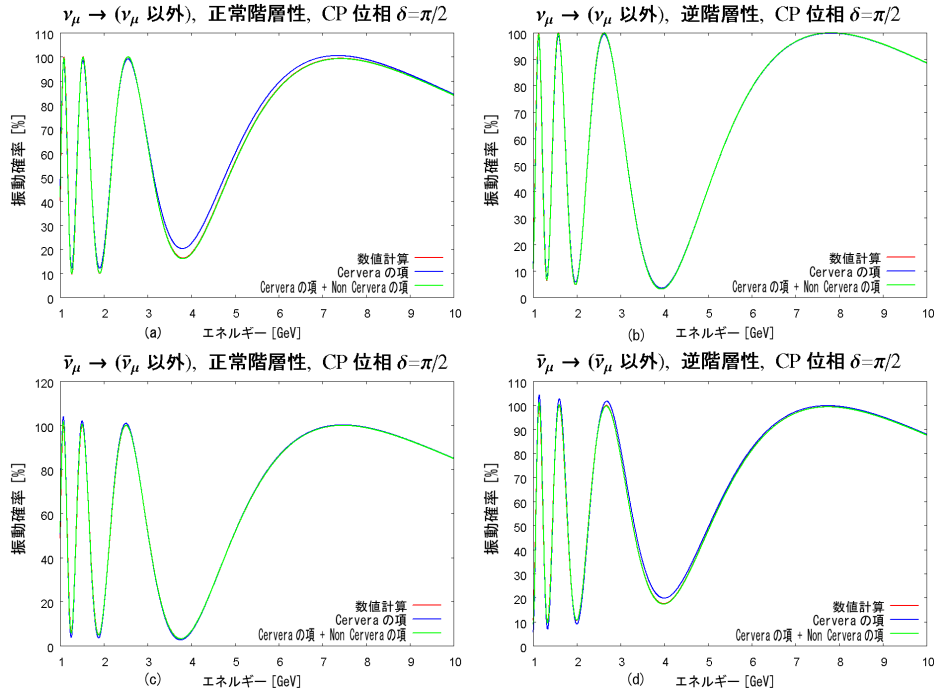


図 4.22: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ 。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 。図 (a) と図 (d) の 3-8GeV 付近が Cervera 等の近似公式だけでは近似が悪い。

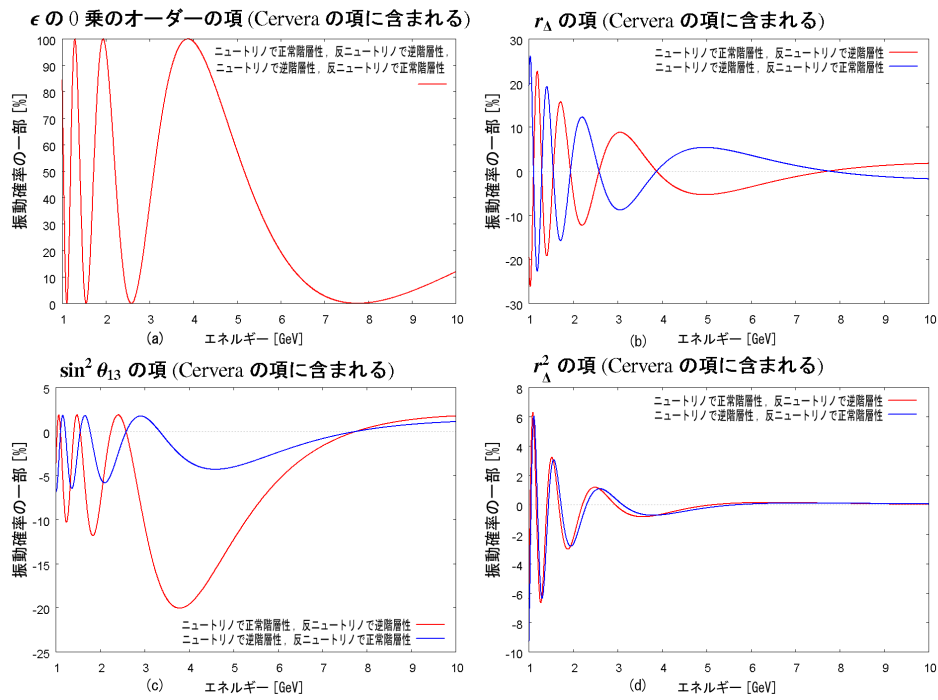


図 4.23: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ 。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 。単項ごとのプロットで、図 (a) は ϵ の 0 乗のオーダーの項であり、図 (b) と図 (c) は ϵ の 1 乗のオーダーに含まれる項であり、図 (d) は ϵ の 2 乗のオーダーの項のうちの Cervera の項に含まれる項である。ニュートリノで正常階層性の場合と反ニュートリノで逆階層性の場合とで、主に図 (c) で示されている $\sin^2 \theta_{13}$ の項 (Cervera の項に含まれる) によって近似が悪くなる。

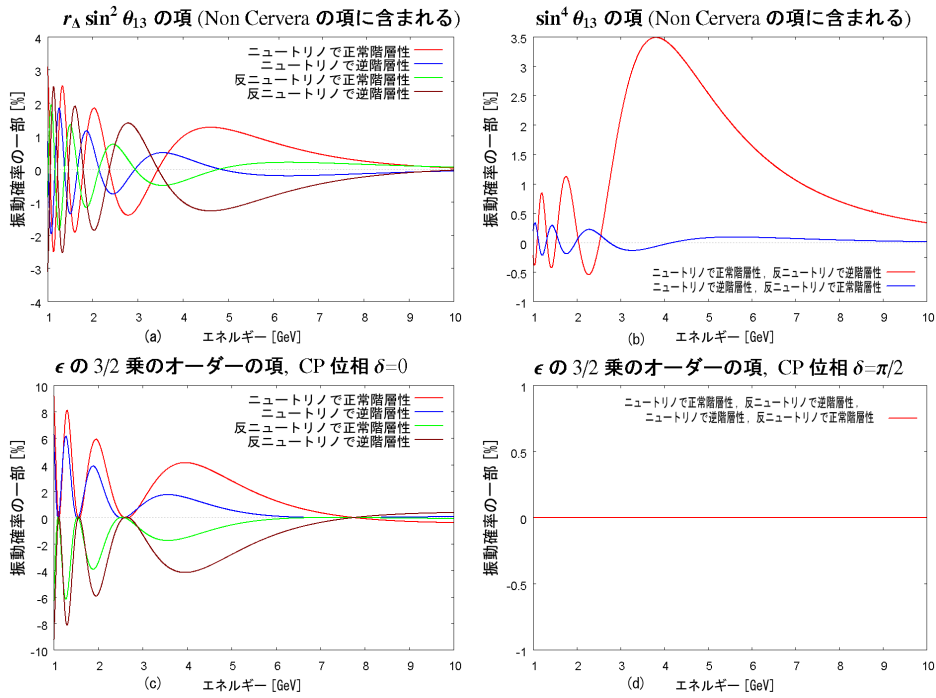


図 4.24: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ 。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、距離 $L=4000\text{km}$ 。ニュートリノで正常階層性の場合と反ニュートリノで逆階層性の場合とで、主に図 (b) で示されている $\sin^4 \theta_{13}$ の項 (Non Cervera の項に含まれる) によって近似が良くなる。

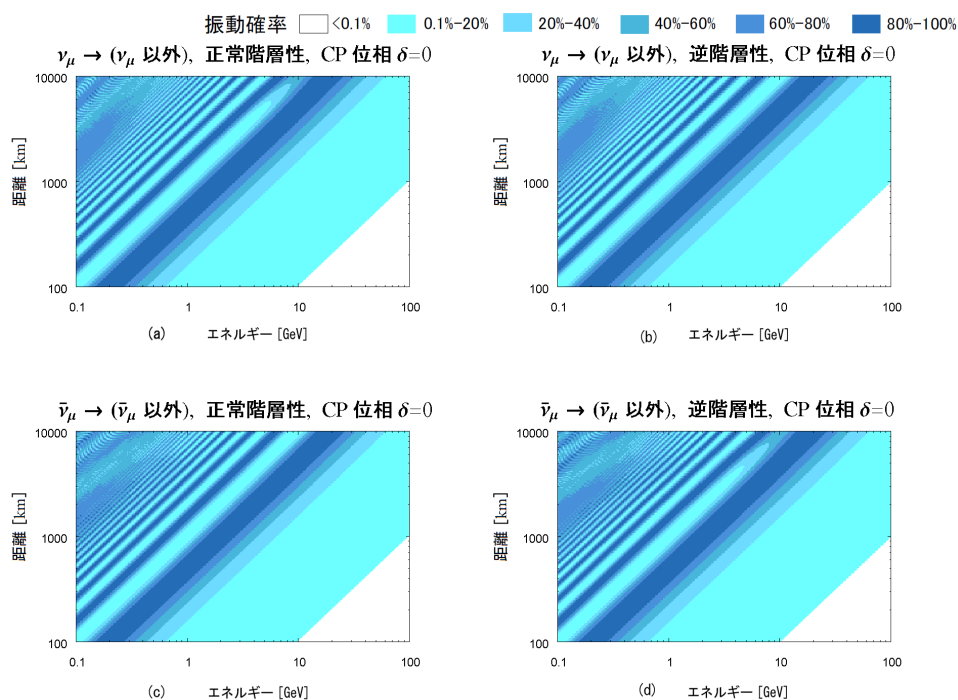


図 4.25: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ での数値計算による厳密な値。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、CP 位相 $\delta=0$ 、物質密度 $\rho=3.0[g/cm^3]$ 。

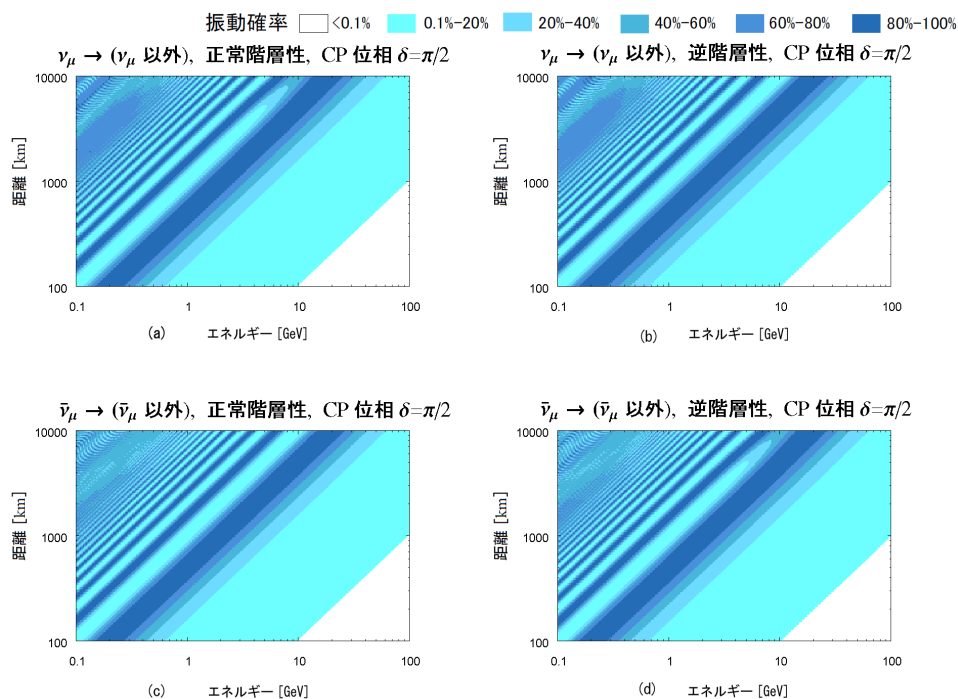


図 4.26: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ での数値計算による厳密な値。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 、物質密度 $\rho=3.0[g/cm^3]$ 。

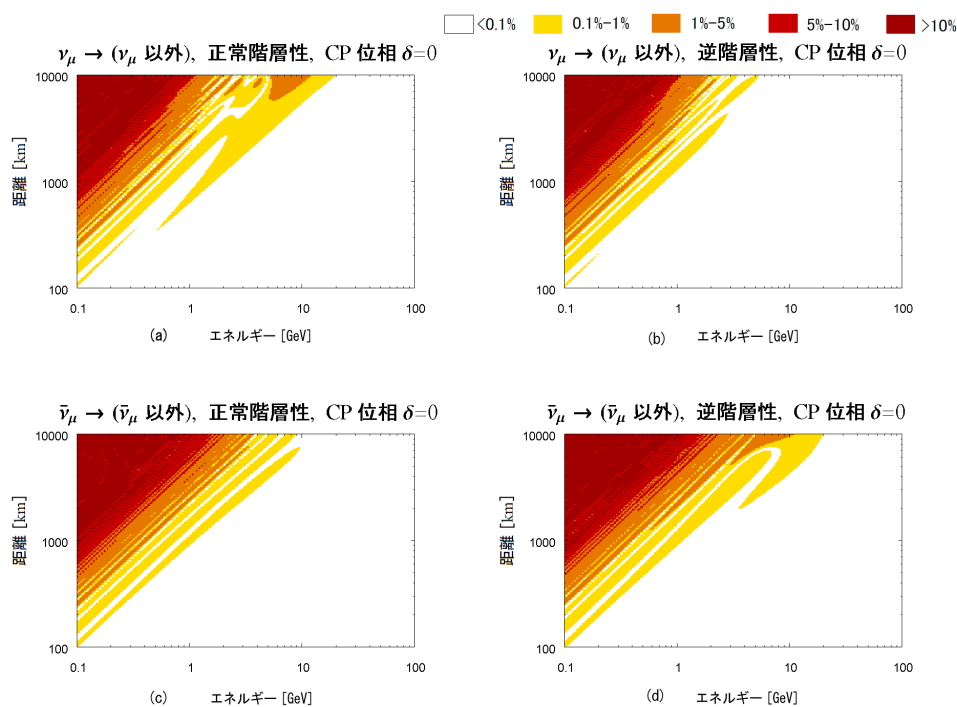


図 4.27: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) での我々の近似公式と数値計算による厳密な値の差の絶対値 ($|Prob^{ours} - Prob^{exact}|$)。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、CP 位相 $\delta=0$ 、物質密度 $\rho=3.0[g/cm^3]$ 。

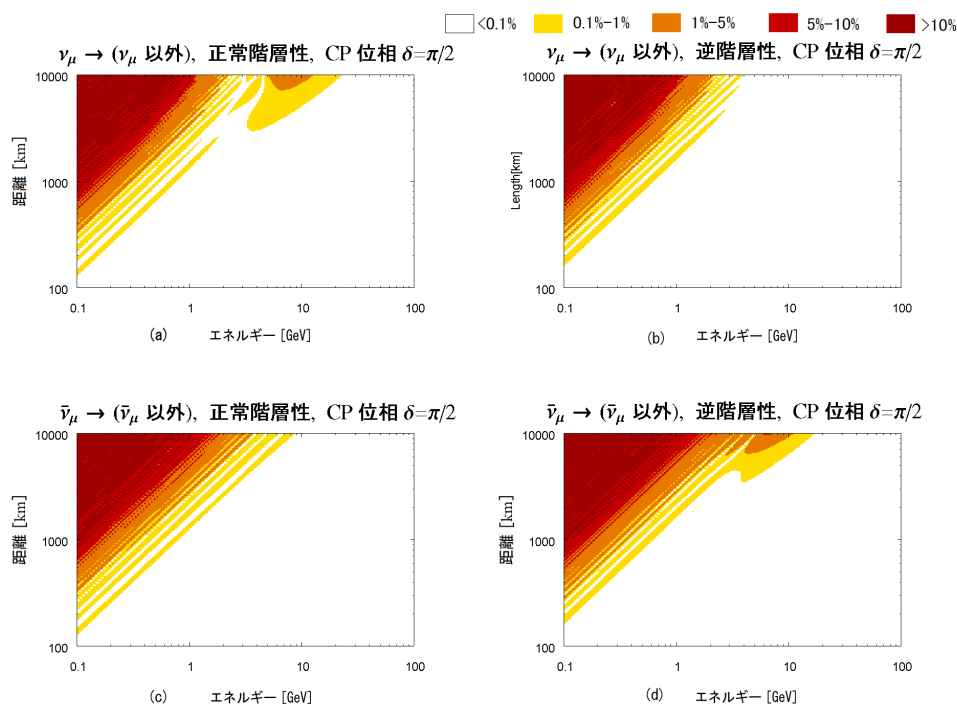


図 4.28: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$) での我々の近似公式と数値計算による厳密な値の差の絶対値 ($|Prob^{ours} - Prob^{exact}|$)。大きい $\sin \theta_{13}=0.18$ で、CP 位相 $\delta=\pi/2$ 、物質密度 $\rho=3.0[g/cm^3]$ 。

第5章 結論と議論

ニュートリノ振動について、混合角 θ_{13} が最大で Chooz 実験上限程度であっても適用できる解析的近似式を、全チャンネルに対して求めた。そして、近似式の $\nu_e \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ の振動チャンネルと $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ の振動チャンネルを、エネルギー E が 1-10[GeV] について、伝播距離 L を 1000[km] と 4000[km]、正常階層性と逆階層性、CP 位相 δ によって場合分けをして、厳密な数値計算と比較した。

その結果、 $\sin \theta_{13}$ が Chooz 実験上限程度に大きくなると、Cervera 等の近似公式に含まれる項だけでは数値計算の厳密な値から有意にずれて近似が悪くなる領域が現われた。その領域は、伝播距離 L が 4000[km] で、ニュートリノで正常階層性の場合と反ニュートリノで逆階層性の場合の、エネルギー E が 3-8[GeV] 付近であった。各単項別にみると、この不一致は Cervera 等の近似公式に含まれる項のうちの $\sin^2 \theta_{13}$ に比例する項によって引き起こされ、そして、Cervera 等の近似公式に含まれない項のうちの $\sin^4 \theta_{13}$ に比例する項を加えることにより、近似が改善されることが分かった。

上記の領域で Cervera 等の近似公式と厳密な値とのずれが大きくなる理由は次のように考えられる。

- 摂動論をつくる際に仮定されている、 $\Delta L \equiv (m_3^2 - m_1^2)L/(2E) \sim O(1)$ という、近似が良くなる関係から外れてしまっている。
- V_e を物質との相互作用ポテンシャルとして、 $r_A \equiv (2V_e E)/(m_3^2 - m_1^2)$ が $1/(1 - r_A)$ という形で解析式中に含まれていて、 $r_A > 0$ のとき、 r_A が 1 付近で大きくなる。

これら 2 つの条件が揃い、 $\sin \theta_{13}$ が大きくなることで、上記の特徴がとりわけ顕著に現れる。実際、Cervera 等の近似公式で近似が悪いのは、 $L=4000$ [km] での $E=5$ [GeV] で $\Delta L = 4.8$ となり、かつ、 $r_A > 0$ となるニュートリノで正常階層性の場合と反ニュートリノで逆階層性の場合のときで、これは 2 つの条件を満たしている。 $L=1000$ [km] では $E=5$ [GeV] で $\Delta L = 1.2$ である。1 つの条件だけに当てはまる領域では、わずかに影響が出るが Cervera 等の近似公式で十分近似が良いといえる。どの条件にも当てはまらない領域では Cervera 等の近似公式は近似が良い。

今後の展望としては、厳密な値からの大きなずれを生じる原因となっている因子、 $1/(1 - r_A)$ についてさらに考察を進めたい。本研究の摂動展開の最大次数まででは、はっきりした性質が見えていない。おそらく、この因子についての全次数にわたる足し上げのようなことを試みる必要があるのだろう。より高次の摂動展開項を求めれば、この問題の解決へのヒントが得られると期待される。

付録A 他のチャネルの振動確率

本文中に記述しなかったチャネルのニュートリノ振動確率を以下に記しておく。
式中の記号は

$$\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2 \quad \Delta \equiv \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \quad r_\Delta \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \quad r_A \equiv \frac{a}{\Delta m_{31}^2} \quad a \equiv 2\sqrt{2}G_F N_e E$$

と定義している。反ニュートリノのチャネル $\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta$ ($\alpha, \beta = e, \mu, \tau$) の振動確率は、ニュートリノのチャネル $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ の振動確率での δ と a の符号を逆にすれば得られる。逆向きに遷移するチャネル $\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha$ の振動確率は、 $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ の振動確率での δ の符号を逆にすれば得られる。

$\nu_e \rightarrow \nu_e$ チャネル:

$$\begin{aligned} P^{(0)}(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 \\ P^{(\frac{1}{2})}(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 0 \\ P^{(1)}(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= s_{13}^2 \left\{ -\frac{4}{(1-r_A)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\} \\ P^{(\frac{3}{2})}(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 0 \\ P^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= r_\Delta^2 s_{12}^2 \left\{ -\frac{4}{r_A^2} c_{12}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \right\} \\ &\quad + s_{13}^4 \frac{4}{(1-r_A)^3} \left\{ -\Delta r_A L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \frac{(1+r_A)^2}{1-r_A} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\} \\ &\quad + r_\Delta s_{13}^2 \frac{2}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 \left\{ \Delta L \sin(\Delta(1-r_A)L) - \frac{4r_A}{1-r_A} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\} \end{aligned}$$

$\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ チャネル:

$$\begin{aligned} P^{(0)}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) &= 0 \\ P^{(\frac{1}{2})}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) &= 0 \\ P^{(1)}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) &= s_{13}^2 \frac{4}{(1-r_A)^2} c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \\ P^{(\frac{3}{2})}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)(\delta) &= r_\Delta s_{13} \left\{ \cos\left(\delta - \frac{\Delta}{2}L\right) \right\} \left\{ -\frac{8}{r_A(1-r_A)} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \sin\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\} \\ P^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) &= r_\Delta^2 \frac{4}{r_A^2} s_{12}^2 c_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +s_{13}^4 \frac{4}{(1-r_A)^3} c_{23}^2 \left\{ \Delta r_A L \sin(\Delta(1-r_A)L) - \frac{(1+r_A)^2}{1-r_A} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\} \\
& +r_\Delta s_{13}^2 \frac{2}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 c_{23}^2 \left\{ -\Delta L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \frac{4r_A}{1-r_A} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\}
\end{aligned}$$

$\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ チャネル:

$$P^{(0)}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = 4s_{23}^2 c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}L\right)$$

$$P^{(\frac{1}{2})}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = 0$$

$$\begin{aligned}
P^{(1)}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) &= r_\Delta \{-2\Delta c_{12}^2 s_{23}^2 c_{23}^2 L \sin(\Delta L)\} \\
&+ s_{13}^2 \frac{2}{1-r_A} s_{23}^2 c_{23}^2 \left\{ -\frac{1}{1-r_A} \cos(\Delta r_A L) + \Delta r_A L \sin(\Delta L) + \frac{1}{1-r_A} \cos(\Delta L) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{1-r_A} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(\frac{3}{2})}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)(\delta) &= r_\Delta s_{13} \frac{8}{r_A(1-r_A)} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} [\\
&(\cos \delta)(s_{23}^2 - c_{23}^2) \left\{ \sin\left(\frac{\Delta}{2}L\right) \right\} \left\{ \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \cos\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) - r_A^2 \sin\left(\frac{\Delta}{2}L\right) \right\} \\
&+ (\sin \delta) \sin\left(\frac{\Delta}{2}L\right) \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) \sin\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(2)}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) &= r_\Delta^2 c_{12}^2 s_{23}^2 c_{23}^2 \left\{ -\frac{4}{r_A^2} s_{12}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2}L\right) + (\Delta^2 c_{12}^2 L^2 + \frac{2}{r_A^2} s_{12}^2) \cos(\Delta L) + \frac{2\Delta}{r_A} s_{12}^2 L \sin(\Delta L) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{r_A^2} s_{12}^2 \cos(\Delta(1-r_A)L) \right\} \\
&+ s_{13}^4 \frac{1}{(1-r_A)^2} s_{23}^2 c_{23}^2 \left\{ -\frac{4\Delta r_A}{1-r_A} L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \frac{4(1+r_A)^2}{(1-r_A)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right. \\
&\quad - \frac{2\Delta r_A}{1-r_A} L \sin(\Delta r_A L) + \frac{2r_A(2+r_A)}{(1-r_A)^2} \cos(\Delta r_A L) + r_A(\Delta^2 r_A L^2 - \frac{2(2+r_A)}{(1-r_A)^2}) \cos(\Delta L) \\
&\quad \left. - \frac{2\Delta r_A(1+r_A)}{1-r_A} L \sin(\Delta L) \right\} \\
&+ r_\Delta s_{13}^2 \frac{2}{1-r_A} s_{23}^2 c_{23}^2 \left\{ r_A(-\Delta^2 c_{12}^2 L^2 + \frac{2}{(1-r_A)^2} s_{12}^2) \cos(\Delta L) + \frac{\Delta}{1-r_A} (c_{12}^2 + r_A^2 s_{12}^2) L \sin(\Delta L) \right. \\
&\quad + \frac{\Delta}{1-r_A} (s_{12}^2 - c_{12}^2) L \sin(\Delta r_A L) - \frac{2r_A}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 \cos(\Delta r_A L) \\
&\quad \left. + \frac{\Delta}{1-r_A} s_{12}^2 L \sin(\Delta(1-r_A)L) - \frac{4r_A}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2}L\right) \right\}
\end{aligned}$$

$\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau$ チャネル:

$$P^{(0)}(\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau) = 1 - 4s_{23}^2 c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}L\right)$$

$$P^{(\frac{1}{2})}(\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau) = 0$$

$$P^{(1)}(\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau) = r_\Delta 2\Delta c_{12}^2 s_{23}^2 c_{23}^2 L \sin(\Delta L) \\ + s_{13}^2 \frac{2}{1-r_A} c_{23}^2 \left\{ \frac{1}{1-r_A} s_{23}^2 \cos(\Delta r_A L) - \Delta r_A s_{23}^2 L \sin(\Delta L) - \frac{1}{1-r_A} s_{23}^2 \cos(\Delta L) \right. \\ \left. - \frac{2}{1-r_A} c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right) \right\}$$

$$P^{(\frac{3}{2})}(\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau)(\delta) = r_\Delta s_{13}(\cos \delta) \frac{8}{r_A(1-r_A)} s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} \left\{ -s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2} L\right) + r_A^2 (s_{23}^2 - c_{23}^2) \sin^2\left(\frac{\Delta}{2} L\right) \right. \\ \left. + c_{23}^2 \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2} L\right) \sin\left(\frac{\Delta}{2} L\right) \cos\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right) + c_{23}^2 \sin\left(\frac{\Delta r_A}{2} L\right) \cos\left(\frac{\Delta}{2} L\right) \sin\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right) \right\}$$

$$P^{(2)}(\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau) = r_\Delta^2 c_{12}^2 s_{23}^2 \left\{ -\frac{4}{r_A^2} s_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta r_A}{2} L\right) + (-\Delta^2 c_{12}^2 L^2 - \frac{2}{r_A^2} s_{12}^2) c_{23}^2 \cos(\Delta L) \right. \\ \left. - \frac{2\Delta}{r_A} s_{12}^2 c_{23}^2 L \sin(\Delta L) + \frac{2}{r_A^2} s_{12}^2 c_{23}^2 \cos(\Delta(1-r_A)L) \right\} \\ + s_{13}^4 \frac{1}{(1-r_A)^2} c_{23}^2 \left\{ -\frac{4\Delta r_A}{1-r_A} c_{23}^2 L \sin(\Delta(1-r_A)L) + \frac{4(1+r_A)^2}{(1-r_A)^2} c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right) \right. \\ \left. + \frac{2\Delta r_A}{1-r_A} s_{23}^2 L \sin(\Delta r_A L) - \frac{2r_A(2+r_A)}{(1-r_A)^2} s_{23}^2 \cos(\Delta r_A L) + r_A(-\Delta^2 r_A L^2 + \frac{2(2+r_A)}{(1-r_A)^2}) s_{23}^2 \cos(\Delta L) \right. \\ \left. + \frac{2\Delta r_A(1+r_A)}{1-r_A} s_{23}^2 L \sin(\Delta L) \right\} \\ + r_\Delta s_{13}^2 \frac{2}{1-r_A} c_{23}^2 \left\{ r_A(\Delta^2 c_{12}^2 L^2 - \frac{2}{(1-r_A)^2} s_{12}^2) s_{23}^2 \cos(\Delta L) + \frac{\Delta}{1-r_A} (-c_{12}^2 - r_A^2 s_{12}^2) s_{23}^2 L \sin(\Delta L) \right. \\ \left. + \frac{\Delta}{1-r_A} (c_{12}^2 - s_{12}^2) s_{23}^2 L \sin(\Delta r_A L) + \frac{2r_A}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 s_{23}^2 \cos(\Delta r_A L) \right. \\ \left. + \frac{\Delta}{1-r_A} s_{12}^2 c_{23}^2 L \sin(\Delta(1-r_A)L) - \frac{4r_A}{(1-r_A)^2} s_{12}^2 c_{23}^2 \sin^2\left(\frac{\Delta(1-r_A)}{2} L\right) \right\}$$

謝辞

本論文を書くにあたり、指導して下さった南方久和先生に深く感謝致します。また、研究のための良い環境をつくってくれた研究室の皆様に感謝します。

関連図書

- [1] M.C.Gonzalez-Garcia and M.Maltoni, Phys. Rept. 460 1 (2008).
- [2] A.Strumia and F.Vissani, arXiv:0606054v3 [hep-ph] (2010).
- [3] R.N.Mohapatra and A.Y.Smirnov, arXiv:0603118v2 [hep-ph] (2006).
- [4] M.Apollonio et al. [CHOOZ Collaboration], Phys. Lett. B 466 (1999).
- [5] M.Apollonio et al. [CHOOZ Collaboration], Eur. Phys. J C27 331, arXiv:0301017v1 [hep-ex] (2003).
- [6] A.Cervera, A.Donini, M.B.Gavela, J.J.Gomez Cadenas, P.Hernandez, O.Mena and S.Rigolin, Nucl. Phys. B 579 17 (2000).
- [7] H. Minakata and S. Uchinami, JHEP 1004 111, arXiv:1001.4219 [hep-ph] (2010).
- [8] G.L.Fogli, E.Lisi, A.Marrone, A.Palazzo and A.M.Rotunno, Phys. Rev. Lett. 101 141801, arXiv:0806.2649v2 [hep-ph] (2008).
- [9] T.Schwetz, M.A.Tortola and J.W.F.Valle, New J.Phys.10 113011, arXiv:0808.2016v3 [hep-ph] (2008).
- [10] M.Maltoni and T.Schwetz, PoS idm2008 072, arXiv:0812.3161v1 [hep-ph] (2008).
- [11] M.C.Gonzalez-Garcia, M.Maltoni and J.Salvado, JHEP 04 056, arXiv:1001.4524v3 [hep-ph] (2010).
- [12] A. Gando et al., [The KamLAND Collaboration], arXiv:1009.4771v2 [hep-ex] (2010).
- [13] S.M.Bilenky and B.Pontecorvo, Phys. Rept. 41 225 (1978).
- [14] Z.Maki, M.Nakagawa and S.Sakata, Prog. Theor. Phys. 28 870 (1962).
- [15] M.Kobayashi and T.Maskawa, Prog. Theor. Phys. 49 652 (1973).
- [16] L.Wolfenstein, Phys. Rev. D 17, 2369 (1978).
- [17] S.P.Mikheyev and A.Y.Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. 42 913 (1985).

- [18] T.Kikuchi, H.Minakata and S.Uchinami, JHEP03 114, arXiv:0809.3312 [hep-ph] (2009).
- [19] E.K.Akhmedov, R.Johansson, M.Lindner, T.Ohlssonb and T.Schwetz, JHEP04 078 (2004).
- [20] K.Nakamura et al. [Particle Data Group], J. Phys. G 37 075021 (2010).
- [21] A.M.Dziewonski and D.L.Anderson, Phys. Earth. Planet. Inter. 25 4 297 (1981).