

加速器実験における大きい余剰次元のシナリオの検証

生田目 春香

首都大学東京理工学研究科物理学専攻

2007/01/10

概要

本論文では近年勢力的に議論されている「大きい余剰次元のシナリオ」に注目し、「大きい余剰次元のシナリオ」の特徴的な過程である Kaluza-Klein 重力子の生成過程について調べる。

「大きい余剰次元のシナリオ」は 5 次元目以上の空間次元である余剰次元の存在を仮定し、今まで 10^{19} TeV 程度であると考えられていた重力相互作用のエネルギースケールを数 TeV 程度の大きさのより基本的なエネルギースケールから導くことで「ゲージ階層性の問題」の解決の可能性を探る画期的なモデルである。このモデルは現在までの加速器実験から有意な情報が得られていない。「大きい余剰次元のシナリオ」を加速器実験で検証する為にはその特徴的な現象である強い重力相互作用による Kaluza-Klein 重力子の生成現象を調べれば良いが、ADD モデルの理論的な問題により、Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を含む Kaluza-Klein 重力子の生成過程の散乱断面積を計算する際に問題が生じる。

本論文は Toy model を用いた解析により、Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程の散乱断面積を計算する際に現れる新たな問題を発見した。既に知られている問題は無限に存在する Kaluza-Klein 重力子の存在を考慮する際に生じる発散の問題である。これは ADD モデルの余剰次元方向の運動量の非保存の問題に由来する。これに対し、今回新たに発見した問題は同じ質量を持つ異なる Kaluza-Klein 重力子の間の量子力学的な干渉の効果によって散乱断面積が物理的には理解しえない程に大きくなるという問題である。この問題は同じ質量を持つ異なる Kaluza-Klein 重力子がモデルに複数個存在することが原因であり、ADD モデルの 4 次元有効理論を求める際に生じる理論的な問題に由来する。本論文では Toy model を用いて散乱断面積を具体的に計算しながらこれらの問題について議論する。

目次

第 1 章	はじめに	3
第 2 章	大きい余剰次元のシナリオ	7
2.1	ゲージ階層性の問題	7
2.2	大きい余剰次元のシナリオ	10
2.2.1	Arkani-hamed と Dimopoulos、Dvali の模型	12
2.2.2	4 次元有効理論の導出	13
2.2.3	理論的困難	16
第 3 章	Kaluza-Klein 重力子の生成過程における崩壊の効果	18
3.1	Toy model	19
3.2	散乱断面積の計算方法	23
3.2.1	ϕ_n の崩壊の過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積の計算	23
3.2.2	ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ の計算	26
3.3	散乱断面積 σ_Γ と σ の差	32
3.3.1	散乱断面積 σ_Γ に対する $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ の $m_1 \neq m_2$ の部分からの寄与	32
3.3.2	散乱断面積 σ_Γ に対する $\sigma_\Gamma(m, m)$ の寄与	34
3.3.3	散乱断面積 σ_Γ と σ の差のオーダー	40
3.4	散乱断面積 σ_Γ と σ の間に生じている差の物理的意味	41
第 4 章	結論	46
付録 A	cutting rules	49

第1章 はじめに

現在、素粒子の標準模型 [1] は多くの実験から支持され、ニュートリノ振動現象以外の素粒子現象を非常に良く記述している。標準模型は大まかに、 $SU(3)_C$ のゲージ対称性 (カラー対称性) で記述される強い相互作用の部分と $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ対称性 (電弱対称性) で記述される電磁相互作用と弱い相互作用の部分にわけられるが、特に電磁相互作用と弱い相互作用に関する現象は加速器実験で高い精度で測定が行われている。Z ボソンと Fermi 粒子の相互作用については CERN の LEP 加速器における実験で、W ボソンの相互作用については CERN の LEP 2 加速器における実験で精密な測定が行われ、標準模型の予言値と実験値は良く一致している。左巻のカイラリティーと右巻のカイラリティーを持つ Fermi 粒子に対する弱い相互作用の非対称性は SLAC の線形加速器を用いた実験である SLD 実験で精密に検証されており、こちらも標準模型の予言と矛盾していない [2, 3, 4]。また、弱い相互作用における CP 非対称性についても現在 Belle 実験と Babar 実験で精密測定が行われているが、実験値の標準模型からの有意なずれは見付かっていない [7]。これら実験で確認されている現象は全て、電弱対称性の性質による特徴的な現象である。標準模型で記述されている粒子の中で唯一、電弱対称性の自発的破れにおいて重要な役割を果たす Higgs 粒子は未だ発見されていないが、LEP 2 加速器を用いた実験と Tevatron 加速器を用いた実験の結果から Higgs 粒子の質量に対する下限 ($m_H > 114 \text{ GeV}$) と間接的な上限 ($m_H < 182 \text{ GeV}$ at 95% C.L.) が得られているため、将来行われる LHC 加速器を用いた実験が到達するエネルギー領域で発見されることが強く期待されている [2, 5, 6, 7]。

標準模型が確立し実験を良く記述しているということは、すなわち新しい模型を必要とする実験結果が無いということである。必ず解決しなければならない理論的矛盾も無い¹。しかし他の分野、特に宇宙物理学との整合性を考えると、標準模型では記述されていない新しい物理が存在しないと決して考えられない。このため次の実験が行われるまでの間、実験からの示唆無しに標準模型を超える物理を理論的に探索しなくてはならないのである。この状況は標準模型が確立した LEP、LEP 2 加速器を用いた実験の終了後変わる事無く続いている。

現在の素粒子物理の現象論分野の状況は他の物理分野から見ると異常な状況に見えるかもしれない。標準模型を超える新しい物理の発見を目的に、素粒子現象に対する理論的予言を含む模型が数多く提案され議論されているからだ。本来、物理学は記述すべき現象があって初めて成立する。雑多な実験結果や観測事実の中からより基本的な法則性を見つけ出し記述すること、これがどの物理分野にも共通の研究方法であるはずだ。しかし素粒子物理の現象論の分野では今この研究手順が逆転している。新たに見えるべき素粒子現象を予想し、それらを記述する模型を作っているのである。現象から理論を見出すのではなく理論から現象を見出そうとしているのだ。

なぜ現象に先行して模型を作る必要があるのか。新たな素粒子現象を実験で発見するために

¹標準模型に問題が無いことが問題であるという見方もできる。

模型を作り理論的予言を行う事が必要となっているからだ。これは素粒子物理の実験、特に高エネルギー加速器実験の難しさに原因がある。実験で得られるデータ量が(雑音を含め)非常に多く、加速器の中で実際に起こっている現象を理解するための解析が大変困難である。このため、膨大な実験データの中から Higgs 粒子の生成や新しい素粒子現象の発生の効果を含んでいるであろうデータを選択して解析を行わなければならない。高エネルギー加速器実験は「見ようとした現象しか見えない」実験となっているのである。この実験から標準模型を超える物理についてより多くの情報を得るためには先入観を捨て、可能な限り全ての可能性について模型を作り理論的解析を行うことが必要である。

標準模型確立以降では模型を作るための新たな指針が必要となった。「標準模型を超える物理は新しい素粒子現象を記述すると同時に、標準模型よりもより良い模型(理論)になっているはずだ」という事を手がかりに考えると、新たな模型は何らかの問題を解決される形で提案される事が望ましい。ここで新たな指針として考えられた問題が「ゲージ階層性の問題」である [8]。この問題は Higgs 粒子の質量が(もし、電弱相互作用のエネルギースケールよりも高いエネルギースケールに新しい物理があると)量子補正に対し不安定であることに由来する。標準模型が確立する以前は「模型が繰り込み可能か」という問題が、より良い模型を得るための指針とされてきた。弱い相互作用を良く記述する模型であった 4 体 Fermi 相互作用模型 [9] が Glashow-Salam-Weinberg 模型 [1] へと発展していく過程は典型的な例である。しかし標準模型を超える模型を探索するためにはこの指針だけでは不十分である。Glashow-Salam-Weinberg 模型がこの指針のひとつの終着点であるからだ。「ゲージ階層性の問題」は例えばこの「理論が繰り込み可能か」という問題と比較すると必然性の低い問題である。前者は模型がより望ましい形となるための指針、後者は必ず解決しなければならない理論的矛盾だからだ。しかし、今この問題に焦点をあてることは次の LHC 加速器を用いた実験で標準模型を超える新しい物理を発見するために有効である。Higgs 粒子に関わる問題を解決する模型であれば、Higgs 粒子が存在しない可能性も含めて、Higgs 粒子の生成エネルギー付近で特徴的な現象が生じる。これらの現象を Higgs 粒子を探索するための実験で調べることにより標準模型を超える新しい物理を発見できる可能性が大きくなるのだ。

「ゲージ階層性の問題」を解決することを目標とした模型は数多く提案されている。これらの中で古くからよく議論されている代表的な模型はやはり超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model) [10] とテクニカラー模型 [11] であろう。しかし本論文では近年勢力的に議論されている「大きい余剰次元のシナリオ」 [12] に着目する。超対称標準模型とテクニカラー模型はともに繰り込み可能な模型の範囲で「ゲージ階層性の問題」の解決を試みた模型である。特にテクニカラー模型は問題を解決するだけでなく、電弱対称性の自発的破れをより基本的な粒子とそのゲージ相互作用によって生じる動力学的な対称性の破れ (Dynamical symmetry breaking) として説明する非常に優れた模型である。しかしテクニカラー模型は LEP 2 加速器を用いた実験から排除された [13]。超対称標準模型も同実験から強い制限をうけている [14, 15]。超対称標準模型では理論の持つ、あるエネルギースケールをより高くする事で実験的制限を逃れることは可能だが、本来の目的が「ゲージ階層性問題の解決」であることを考えると好ましくない模型の変更である。これに対し「大きい余剰次元のシナリオ」は今まで 10^{19} GeV 程度と考えられていた重力相互作用のエネルギースケール (Planck スケール) M_p を数 TeV 程度のより基本的なエネルギースケール M_f から導くことで重力相互作用と電弱相互作用の間の「ゲージ階層性問題」の解決の可能性を探る画期的な模型である。このシナリオは未だ加速器実験からは有意

な制限を受けていない [18]。

「大きい余剰次元のシナリオ」では我々の住む 4 次元時空に加え、 δ 次元 ($\delta = 1, 2, 3, \dots$) の空間 (余剰次元空間) が存在すると仮定する。我々が存在を知っている標準模型の粒子は 4 次元の部分空間 (brane) の中に閉じ込められていて、唯一重力だけが余剰次元空間を伝播することができることを考えることで大きい余剰次元空間の存在が可能になり、重力相互作用のエネルギースケールを数 TeV 程度の低いスケールにとることができる。電弱相互作用のエネルギースケール v は 250 GeV であるので、重力相互作用のエネルギースケールが数 TeV 程度になると相互作用のエネルギースケール間の階層性が非常に小さくなる。余剰次元空間が半径 R を持つ δ 次元のトーラス状である場合を考えると、4 次元の Planck スケール M_p はより基本的な重力相互作用のスケール M_f と余剰次元の半径 R を用いて次のように表される²。

$$M_p^2 = 8\pi R^\delta M_f^{2+\delta}$$

M_f が 1 TeV となる余剰次元空間の半径を求めると、 $R \sim 200 \mu\text{m}$, $6.3 \times 10^{-4} \mu\text{m}$, $2.0 \times 10^{-8} \mu\text{m}$ ($\delta = 2, 4, 6$) 程度となる。これに対し、重力相互作用を考える際の長さの次元を持つ基本的な量 (Planck 長さ) l_p は $l_p \sim 1.62 \times 10^{-33} \text{cm}$ であるので、「大きい余剰次元のシナリオ」で考えられている余剰次元空間の半径は Planck 長さ l_p に対し非常に大きいことが分かる。このシナリオを具体的に議論するために作られた模型のうちの一つが Arkani-hamed と Dimopoulos、Dvali の模型 (ADD 模型) である [16]。この模型は重力相互作用を含むため繰り込み可能では無く、さらに粒子の余剰次元方向の運動量が保存していない。これは先に上げた超対称標準模型やテクニカラー模型とは大きく違う点であり、明らかな理論的問題点である。このため、より美しい模型を好む傾向の強い素粒子物理の分野の研究者には支持されにくい模型である。しかし理論的問題が原因で実験から支持されないということは決して無い。超対称標準模型もテクニカラー模型も「大きい余剰次元のシナリオ」も新たに発見されるかもしれない標準模型を超える物理の対等な可能性である。さらに理論的問題があるということは暗に 4 次元場の理論を超える新しい理論の存在を示しているということである。実際、超弦理論の枠組では「大きい余剰次元のシナリオ」の議論に不可欠な 4 次元部分空間への粒子の閉じ込め現象や、重力の量子である重力子とその量子効果を理論的問題無く記述することができる³[17]。これら 4 次元場の理論の枠組を超えた新しい理論の可能性を実験的に検証するためにも、「大きい余剰次元のシナリオ」を実験的に検証することは非常に重要である。「大きい余剰次元のシナリオ」と ADD 模型については第 2 章で解説する。

以上より本論文では「大きい余剰次元のシナリオ」、さらにこのシナリオを具体的に議論するために作られた模型である ADD 模型の加速器実験における検証について議論する。この模型の特徴は質量 n/R ($n = 1, 2, 3, \dots$) を持つ重力子 (Kaluza-Klein 重力子) を無限個含むことである。この Kaluza-Klein 重力子の 1 つ 1 つは標準模型の粒子と $1/M_p$ の強さで相互作用する。しかし ADD 模型に含まれる Kaluza-Klein 重力子の数が非常に多い為、沢山の Kaluza-Klein 重力子が伝播する効果を足しあげると、Kaluza-Klein 重力子が媒介する重力相互作用は $1/M_f$ の結合の強さを持つ強い重力相互作用になる。この強い重力相互作用の効果は高エネルギー加速器

²実はこの場合、 $1/R \ll M_W$ であるので重力相互作用と電弱相互作用の間の階層性の問題が $1/R$ と v との階層性の問題に置き換わっている。このため「大きな余剰次元のシナリオ」は階層性の問題の解決策ではなく階層性の問題の解決に対するアプローチである。詳しくは 2 章で解説する。

³しかし超弦理論では自由に模型を作ることが難しく、「大きい余剰次元のシナリオ」の実験的検証を議論できる現実的な模型は未だ無い。

実験で検証可能である。低エネルギーの実験では軽い Kaluza-Klein 重力子しか生成されないため $1/M_p$ の弱い重力相互作用の効果しか見えないが、高エネルギー実験では重い Kaluza-Klein 重力子まで生成できるため、十分な数の Kaluza-Klein 重力子が生成され強い重力相互作用の効果が見える可能性がある。

強い重力相互作用の効果を含む様々な反応過程が現在議論されているが、その中で Mirabell らが解析した Kaluza-Klein 重力子の生成過程

$$e^+e^- \rightarrow \gamma + (K-K \text{ graviton}), \quad p\bar{p} \rightarrow jet + (K-K \text{ graviton})$$

に注目する [18, 19]⁴。この過程は Kaluza-Klein 重力子を崩壊しない安定な粒子と見なしたものである。しかし、ADD 模型が正しいとすれば Kaluza-Klein 重力子は標準模型の粒子に崩壊できるため、真に解析すべき過程はこの Kaluza-Klein 重力子の崩壊の効果を含んだ過程である。Kaluza-Klein 重力子 1 つ 1 つの重力相互作用の強さが $1/M_p$ と弱く Kaluza-Klein 重力子の寿命が長い場合、Mirabell らはこの崩壊の効果を見捨てることとして解析している。しかし、沢山の Kaluza-Klein 重力子の効果が足しあわさることによって弱い重力の効果は強い重力の効果になることを考えると、たとえ 1 つ 1 つの Kaluza-Klein 重力子の崩壊の効果が小さくても、それらが足しあわさることにより、Kaluza-Klein 重力子の崩壊の効果は大きな効果になるかもしれない。

第 3 章では本論文の主題である Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を含む Kaluza-Klein 重力子の生成過程について調べる。Mirabell らによって解析された過程は Kaluza-Klein 重力子が終状態にある過程である。これに対し Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を含む Kaluza-Klein 重力子の生成過程は Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程である。この中間状態にある粒子は量子力学の不確定性によって生じている粒子であり、観測しうる物理的な状態にない粒子である。このため Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を含む Kaluza-Klein 重力子の生成過程には中間状態にある Kaluza-Klein 重力子同士が量子力学的に干渉する寄与が含まれる。Kaluza-Klein 重力子はスピン 2 を持つ粒子であるので、Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程の散乱断面積は複雑な構造を持つ。この為、Kaluza-Klein 重力子の生成過程に Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を加えたことによって生じる散乱断面積の変化を求める際に見通しが悪い。見通しを良くする為、本論文では散乱断面積を具体的に計算する際に、Kaluza-Klein 重力子と光子を含む系を単純化した Toy model を用いて計算を行う。この Toy model は光子と Kaluza-Klein 重力子のスピンをすべてゼロとみなしたものである。ADD 模型の持つ特徴に合わせ、Toy model にも Kaluza-Klein 重力子に対応する実スカラー場 ϕ_n が無限個含まれている。第 3 章ではこの Toy model を用いて 2 種類の Kaluza-Klein 重力子の生成過程の散乱断面積を計算する。求めた散乱断面積を比較すると、Kaluza-Klein 重力子が安定な場合の Kaluza-Klein 重力子の生成過程の散乱断面積と Kaluza-Klein 重力子が崩壊する場合の Kaluza-Klein 重力子の生成過程の散乱断面積には実は大きな差が生じていることが分かる。第 3 章の最後に、2 つの過程の散乱断面積の間に生じている差の物理的意味を議論する。

⁴強い重力の効果で加速器中に生じるブラックホールの蒸発現象によって「大きい余剰次元シナリオ」を検証する方法も提案され注目を集めているが [21]、そもそもブラックホールの生成過程や蒸発現象自体が仮定を多く重ねた模型によって記述されているので、「大きい余剰次元シナリオ」自体の検証に用いるのは適切ではない。

第2章 大きい余剰次元のシナリオ

この章では「ゲージ階層性の問題」の解決に向けての1つのアプローチとして提案された「大きい余剰次元のシナリオ」について解説する。この「大きい余剰次元のシナリオ」を具体的に解析する為の模型は多数あるが、本論文ではその中で一番単純である Arkani-hamed と Dimopoulos、Dvali の模型 (ADD 模型) について解説する。

2.1 ゲージ階層性の問題

この節ではまず、標準模型の理論的な問題である「ゲージ階層性の問題」について説明する。第1章で述べた通り素粒子物理の標準模型は多くの実験から指示され、ニュートリノ振動現象以外の素粒子現象を非常に良く記述している。「繰り込み可能な模型で実験結果を全て説明する」という素粒子物理の目的に対しては標準模型がひとつの終着点であると言えるであろう。しかし標準模型には解決すべき理論的な問題がある。これが「fine tuning 問題」(もしくは「ゲージ階層性の問題」)である。fine tuning 問題は標準模型の電弱相互作用のエネルギースケール v が輻射補正に対し不安定である為に生じる問題である。もし電弱相互作用のエネルギースケール v よりも高いエネルギースケール Λ_{New} に新しい物理があると、電弱相互作用のエネルギースケール v の値を 250GeV に保つ為、繰り込みの手続きの際に摂動の全ての次数で新しい物理のエネルギースケール Λ_{New} と標準模型の Lagrangian に含まれるパラメータとの間の微調整を行わなければならない。この Λ_{New} と標準模型の Lagrangian に含まれるパラメータとの間の微調整は Λ_{New} と v の差が大きくなる程物理的に不自然な微調整になる。電弱相互作用のエネルギースケールよりも高いエネルギースケールを持つ物理の候補として先ず考えられるのが素粒子の重力相互作用である。素粒子が重力相互作用をする事は疑いようの無い事実であるが、標準模型には素粒子の重力相互作用が含まれていない。電弱相互作用のエネルギースケール v が 250GeV であるのに対し重力相互作用のエネルギースケールである Planck スケール M_p は 10^{18}GeV であり非常に大きい。電弱相互作用のエネルギースケールと重力相互作用のエネルギースケールの間に他の新しい物理のエネルギースケールが無い場合は $\Lambda_{\text{New}} = M_p$ となり、電弱相互作用のエネルギースケール v を 250GeV に保つ為、 v と M_p の間で非常に不自然な微調整を行わなければならない。

電弱相互作用のエネルギースケール v が輻射補正に対し不安定であるのは標準模型に含まれる Higgs 粒子の質量が輻射補正に対し不安定である為である。標準模型の Lagrangian に含まれる Higgs 場の運動項と質量項、自己相互作用項を取り出し $\mathcal{L}^{\text{Higgs}}$ とすると

$$\mathcal{L}^{\text{Higgs}} = \partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.1)$$

となる。ここで Φ は複素スカラー場であり $SU(2)_L$ の基本表現に属する。電弱相互作用のエネルギースケール v は Higgs 場 Φ の真空期待値の値である。この Higgs 場 Φ の真空期待値は式 (2.1) に含まれるパラメータ μ と λ を用いて以下のように表される。

$$\langle 0|\Phi|0\rangle \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (2.2)$$

式 (2.1) の Lagrangian は正しい真空とその上の適切な場で表されていない為 $-\mu$ の負の質量を持つ粒子を記述しているように見える。これを正しい真空の上の正しい場で書き表すため、式 (2.1) の Lagrangian に含まれる Higgs 場 Φ を

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$; \langle 0|\Phi_0|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.4)$$

と実スカラー場 ϕ_j ($j = 0, \dots, 3$) を用いて表し、 Φ の真空期待値が 0 となるように Higgs 場 Φ をとり直すと $\mathcal{L}^{\text{Higgs}}$ は

$$L^{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 (\partial_\mu \phi_j \partial^\mu \phi_j) - \mu^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda v}{\sqrt{2}} \phi_0^3 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 + \frac{\lambda}{4} \sum_{j=1}^3 (\sqrt{2} v \phi_0 \phi_j^2 + 2 \phi_0^2 \phi_j^2) \quad (2.5)$$

となり、 ϕ_0 は質量 $\sqrt{2}\mu$ を持つ実スカラー粒子 (Higgs 粒子) を表し、式 (2.1) に含まれるパラメータ μ は Higgs 粒子の質量に対応する事が分かる。質量を持たない実スカラー場 ϕ_j ($j = 1, 2, 3$) の自由度は電弱相互作用を媒介するゲージボソンに縦波成分として吸収される。

Higgs 粒子の質量 μ は輻射補正に対して安定ではない。これに対し標準模型に含まれる Fermi 粒子の質量は輻射補正に対し安定である。次元を持った量が輻射補正に対して安定であるか否かを調べる為には、その量が natural なパラメータであるか否かを調べればよい。模型に含まれる次元を持った量が natural であるとは、その量をゼロとする極限をとった時、模型に何らかの対称性が復活する量である事を指す。次元を持つ量が natural なパラメータであれば、その量は輻射補正に対し安定である。この次元を持った量に対する「naturalness」の概念は 't Hooft によって導入された [8]。natural なパラメータとして代表的なものは Fermi 粒子の質量である。Dirac 質量 m を持つ Fermi 粒子 ψ の Lagrangian $\mathcal{L}^{\text{Fermion}}$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{Fermion}} &= \bar{\psi} i \partial_\mu \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \bar{\psi}_L i \partial_\mu \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i \partial_\mu \gamma^\mu \psi_R - m (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで ψ_L と ψ_R はそれぞれ Fermi 粒子 ψ の左巻き成分と右巻き成分を表し、 $\psi = \psi_L + \psi_R$ を満たす。式 (2.6) の $\mathcal{L}^{\text{Fermion}}$ は以下の ψ_L と ψ_R をそれぞれ独立に $U(1)$ 変換する変換 (カイラル変換)

$$\begin{cases} \psi_L \mapsto e^{i\theta_L} \psi_L \\ \psi_R \mapsto e^{i\theta_R} \psi_R \end{cases} \quad (2.7)$$

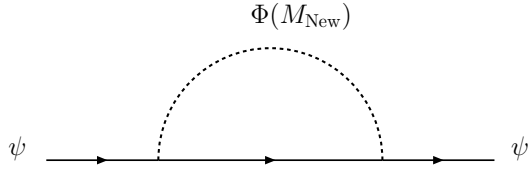


図 2.1: Fermi 粒子の質量 m に対する
輻射補正の Feynmann 図

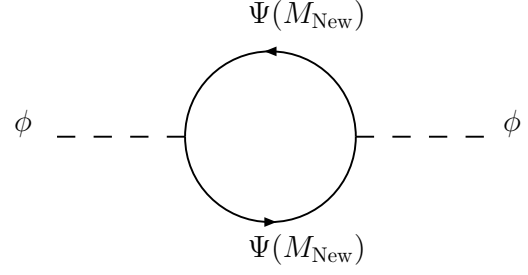


図 2.2: 実スカラー粒子の質量 μ に対する
輻射補正の Feynmann 図

の下で不変ではない。 $\mathcal{L}^{\text{Fermion}}$ に含まれる ψ の質量項 $m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$ がカイラル変換で不変になっていない為である。しかし $m \rightarrow 0$ の極限をとると式 (2.6) の $\mathcal{L}^{\text{Fermion}}$ は

$$\mathcal{L}^{\text{Fermion}} = \bar{\psi}_L i \partial_\mu \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i \partial_\mu \gamma^\mu \psi_R \quad (2.8)$$

となり、式 (2.7) のカイラル変換の下で不変となる。よって、式 (2.6) の $\mathcal{L}^{\text{Fermion}}$ の $m \rightarrow 0$ の極限をとると $\mathcal{L}^{\text{Fermion}}$ にカイラル対称性が復活し、Fermi 粒子の Dirac 質量 m は natural なパラメータになっている事が分かる。これに対し実スカラー場 ϕ の質量 μ は natural なパラメータになっていない。なぜなら、実スカラー場 ϕ の Lagrangian $\mathcal{L}^{\text{scalar}}$ は

$$\mathcal{L}^{\text{scalar}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (2.9)$$

であり、この $\mathcal{L}^{\text{scalar}}$ は $\mu \rightarrow 0$ の極限をとっても対称性が復活しない為である。

なぜ natural なパラメータは輻射補正に対し安定であるのか。natural なパラメータに対する輻射補正は必ずそのパラメータに比例する形で表されている為だ。これは natural なパラメータに対する輻射補正が、そのパラメータをゼロとする極限をとると復活する対称性によって禁止される(ゼロになる)量となっている為である。以下では Fermi 粒子の質量 m と実スカラー粒子の質量 μ の場合を例として、natural なパラメータに対する輻射補正について説明する。Fermi 粒子の質量 m に対する摂動の 1 次の輻射補正は図 2.1 の Feynmann 図で表される。図 2.1 の Feynmann 図のループを回る粒子 $\Phi(M_{\text{New}})$ はエネルギースケール Λ_{New} を持つ新しい物理を記述するモデルに含まれる、質量 M_{New} を持つスカラー粒子である。このスカラー粒子の質量の大きさは典型的に $\mathcal{O}(M_{\text{New}}) = \mathcal{O}(\Lambda_{\text{New}})$ である。図 2.1 の Feynmann 図で表される輻射補正を含んだ Fermi 粒子の質量を $m_{1\text{-loop}}$ とすると、この $m_{1\text{-loop}}$ は M_{New} と Lagrangian $\mathcal{L}^{\text{Fermion}}$ に含まれるパラメータである m で表され、一般に

$$m_{1\text{-loop}} = m - m \cdot \mathcal{O} \left(\ln \left[\frac{M_{\text{New}}}{v} \right] \right) \quad (2.10)$$

となる。図 2.1 の Feynmann 図で表される Fermi 粒子の質量 m に対する輻射補正は $m \rightarrow 0$ の極限で復活するカイラル対称性によって禁止されゼロとなる為、 $m_{1\text{-loop}} - m$ は必ず m に比例する形になる。この時、式 (2.10) の左辺と右辺の次元が等しくなるように、 $\Phi(M_{\text{New}})$ がループを回る寄与は $m_{1\text{-loop}}$ に $\ln(M_{\text{New}}/v)$ の形で入る。 Λ_{New} と v の差が v に対し非常に大きい場合でも、

この $m_{1\text{-loop}}$ に対する $\ln(M_{\text{New}}/v)$ の寄与は大きくなる。例として $\Lambda_{\text{New}} = M_p \simeq 10^{19}\text{Gev}$ の場合を考えると

$$\mathcal{O}\left(\ln\left[\frac{M_{\text{New}}}{v}\right]\right) = \mathcal{O}\left(\ln\left[\frac{M_p}{v}\right]\right) = \mathcal{O}(10) \quad (2.11)$$

となり、 $v \ll M_p$ であっても $m_{1\text{-loop}} - m = m \cdot \mathcal{O}(10)$ 程度である。よって natural なパラメータである Fermi 粒子の質量 m は輻射補正に対し安定である事が分かる。これに対し、図 2.2 で表される実スカラー粒子の質量 μ に対する輻射補正は $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{New}}^2)$ の非常に大きな補正となる。図 2.2 のループを回る粒子 Ψ はエネルギースケール Λ_{New} を持つ新しい物理を記述するモデルに含まれる、質量 M_{New} を持つ Fermi 粒子である。実スカラー粒子の質量 μ は natural なパラメータではない為、図 2.2 で表される輻射補正は $\mu \rightarrow 0$ の極限をとっても禁止されない。この為、図 2.2 で表される輻射補正を含んだ実スカラー粒子の質量を $\mu_{1\text{-loop}}$ とすると $\mu_{1\text{-loop}}$ は一般に

$$\mu_{1\text{-loop}}^2 = \mu^2 - \mathcal{O}(\Lambda_{\text{New}}^2) \quad (2.12)$$

となり、 $\mu_{1\text{-loop}}^2 - \mu^2$ は $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{New}}^2)$ となる。これより新しい物理のエネルギースケール Λ_{New} が大きくなればなる程質量 μ に対する輻射補正が大きくなるので、実スカラー粒子の質量 μ が輻射補正に対し安定ではない事が分かる。式 (2.2) より、電弱相互作用のエネルギースケール v は Higgs 粒子の質量 μ で表される。よって実スカラー粒子である Higgs 粒子の質量 μ が輻射補正に対して不安定であると電弱相互作用のエネルギースケール v も輻射補正に対し不安定となる。電弱相互作用のエネルギースケール v を摂動の 1 次のオーダーで 250GeV に保つ為には、式 (2.12) より μ^2 と Λ_{New}^2 を微調整して 250GeV の値を出さなければならない。例として $\Lambda_{\text{New}} = M_p \simeq 10^{19}\text{Gev}$ の場合を考えると、 $\mu_{1\text{-loop}}^2 - \mu^2 = \mathcal{O}(10^{38}\text{GeV}^2)$ となり、 μ^2 と M_p^2 の間で 34 桁もの微調整を行わなければならない。 $\mathcal{O}(10^{38}\text{GeV}^2)$ の大きさを持つ量同士を引き算して $\mathcal{O}(10^4\text{GeV}^2)$ の量を出さなければならないのである。この微調整は物理的には非常に不自然に感じられる。

電弱相互作用のエネルギースケール v を安定に保つため、Higgs 粒子の質量 μ と Planck スケール M_p の間で微調整を行わなければいけないという問題 (fine tuning 問題) は、問題の原因の捉え方の違いによって異なる名前では呼ばれている。fine tuning 問題を標準モデルが natural ではないパラメータを含む為に生じている問題と捉える場合は、この問題は「naturalness の問題」と呼ばれる。一方、fine tuning 問題を電弱相互作用のエネルギースケール v と Planck スケール M_p の間に非常に大きな階層がある為に生じている問題と捉える場合は、この問題は「ゲージ階層性の問題」と呼ばれる。次節で解説する「大きい余剰次元のシナリオ」は fine tuning 問題を「ゲージ階層性の問題」と捉え、「ゲージ階層性の問題」の解決に向けてのひとつのアプローチとして提案されたモデルである。

2.2 大きい余剰次元のシナリオ

この節では「大きい余剰次元のシナリオ」と、そのシナリオの具体的な解析の為に提案された ADD 模型について解説する

「大きい余剰次元のシナリオ」とは我々の住む 4 次元時空に加え、5 次元目以上の空間次元 (余剰次元) が存在すると仮定することで、今まで 10^{19}GeV 程度と考えられてきた Planck スケール

ル M_p を 1TeV 程度より基本的なエネルギースケール M_f から導くシナリオである。このシナリオでは標準模型で記述されている粒子は全て我々の住む 4次元時空に閉じ込められており、重力相互作用を媒介する重力子のみが余剰次元空間まで伝播できると仮定する。この時、4次元時空に余剰次元空間まで加えた全空間の重力場 g_{AB} の作用積分 S^{grav} は、余剰次元の次元を δ 次元 ($\delta = 1, 2, 3, \dots$) とし余剰次元空間の体積を V_δ とすると

$$\begin{aligned} S^{grav} &= \frac{\bar{M}_f^{2+\delta}}{2} \int d^4x \int d^\delta y \sqrt{-\det(g_{AB})} \mathcal{R} \\ &= \frac{\bar{M}_f^{2+\delta}}{2} \cdot V_\delta \int d^4x \sqrt{-\det(g_{AB})} \mathcal{R} \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。ここで $\bar{M}_f = M_f / (2\pi)^{\delta/2+\delta}$ であり $\det(g_{AB})$ は重力場 g_{AB} の行列式、 \mathcal{R} は重力場 g_{AB} のスカラー曲率である。座標 x は我々の住む 4次元時空の座標を表し、座標 y^i は余剰次元方向の座標を表す。これに対し 4次元の重力場 $g_{\mu\nu}$ の作用積分 $S^{4D \text{ grav}}$ は

$$S^{4D \text{ grav}} = \frac{\bar{M}_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} \mathcal{R} \quad (2.14)$$

であった。ここで $\bar{M}_p = M_p / \sqrt{8\pi}$ であり、 \mathcal{R} は重力場 $g_{\mu\nu}$ のスカラー曲率を表す。余剰次元空間の大きさが我々の住む 4次元時空の大きさに比べ非常に小さい為、「大きい余剰次元のシナリオ」では式 (2.13) の作用積分 S^{grav} の余剰次元方向の座標 y^i について積分を実行した作用積分が 4次元時空での重力相互作用を記述していると考えられる。よって式 (2.13) と式 (2.14) より、我々の住む 4次元時空の重力相互作用のエネルギースケール M_p は余剰次元まで含めた全体空間の重力相互作用のエネルギースケール M_f と余剰次元空間の体積 V_δ で表され

$$\bar{M}_p^2 = \bar{M}_f^{2+\delta} \cdot V_\delta \quad (2.15)$$

が得られる。これより、余剰次元空間の体積 V_δ が十分大きければ余剰次元まで含めた全体空間の重力相互作用のエネルギースケール M_f が $M_f \sim v$ となり、電弱相互作用のエネルギースケール v と重力相互作用のエネルギースケール M_f の間の階層を小さくする事が可能である。

「大きい余剰次元のシナリオ」は「ゲージ階層性の問題」の解決には至っていない。このシナリオは「ゲージ階層性の問題」の解決に向けてのひとつのアプローチである。何故なら、「大きい余剰次元のシナリオ」では電弱相互作用のエネルギースケール v と Planck スケール M_p との間の大きな階層が無くなる代わりに、我々の住む 4次元時空の大きさと余剰次元空間の大きさの間に大きな階層が生じている為である。我々の住む 4次元時空は無限大、もしくは非常に大きい体積を持つ。これに対し式 (2.15) より、余剰次元空間の体積は有限でなければならず、この大きさは 4次元時空の体積に対し非常に小さい。例として余剰次元空間が 1次元の円環である場合を考えると、余剰次元空間の体積はこの円環の円周の長さとなる。式 (2.15) を用いて M_f が 1TeV 程度となる場合の余剰次元空間の円周を求めると、余剰次元空間の円周の長さは $\mathcal{O}(0.1\text{mm})$ 程度となる。

何故 4次元時空の大きさと余剰次元空間の大きさとの間に大きな階層が生じているかについては「大きい余剰次元のシナリオ」では説明されない。さらに 4次元時空の大きさと余剰次元空間の大きさとの間に生じている大きな階層の安定性についても「大きい余剰次元のシナリオ」では説明されない。何故なら、現在知られている理論では空間の大きさを決定する力学及び空

間の大きさの安定性を決定する力学を記述できていない為である。この為、「大きい余剰次元のシナリオ」は電弱相互作用のエネルギースケール v と Planck スケール M_p との間の階層性の問題を 4 次元時空の大きさと余剰次元空間の大きさとの間の階層性の問題に帰着するシナリオであり、「ゲージ階層性の問題」の解決には至っていない。しかし、もし余剰次元の存在が実験で確認され、時空の大きさとその安定性を決定する力学を記述できる理論が得られた場合は「大きい余剰次元のシナリオ」は「ゲージ階層性の問題」を解決することができる可能性があるので、「大きい余剰次元のシナリオ」は「ゲージ階層性の問題」の解決に向けてのひとつのアプローチであると言える。

「大きい余剰次元のシナリオ」では M_f よりもさらに高いエネルギースケール Λ_{New} を持つ未知の物理によって余剰次元空間の大きさとその安定性が決定されていると仮定する。さらにこの未知の物理は 4 次元時空への粒子の閉じ込め現象も記述していると期待される。この 4 次元時空への粒子の閉じ込めの機構も「大きい余剰次元のシナリオ」では説明されない。このエネルギースケール Λ_{New} を持つ未知の物理を記述する理論として現在最も有力な理論が超弦理論である。本論文では超弦理論について説明を行わないが、この超弦理論の枠組では「大きい余剰次元のシナリオ」の議論に不可欠な 4 次元部分空間への粒子の閉じ込め現象や、重力の量子である重力子とその量子効果を理論的問題無く記述することができることが知られている [17]。「大きい余剰次元のシナリオ」ではこの未知の物理のエネルギースケール Λ_{New} と「大きい余剰次元のシナリオ」のエネルギースケール M_f の間には大きな階層が無いと仮定する。すなわち $M_f \lesssim \Lambda_{\text{New}}$ である。もし $M_f \ll \Lambda_{\text{New}}$ であれば、「大きい余剰次元のシナリオ」には 4 次元時空の大きさと余剰次元空間の大きさとの間の階層性の問題の他にエネルギースケール Λ_{New} と M_f の間の階層性の問題が生じる事になる。本来、標準模型には電弱相互作用のエネルギースケール v と Planck スケール M_p との間の階層性の問題のみが含まれていた。これに対し新たに考えられた模型である「大きい余剰次元のシナリオ」がより多くの階層性の問題を含むような場合を考えるのは、「ゲージ階層性の問題」の解決を目指す研究として意味が無い。よって、以下では「大きい余剰次元のシナリオ」として Λ_{New} と M_f が $M_f \lesssim \Lambda_{\text{New}}$ を満たす場合のみを考える。

2.2.1 Arkani-hamed と Dimopoulos、Dvali の模型

「大きい余剰次元のシナリオ」を具体的に議論するための模型は複数ある。何故なら、余剰次元空間の形 (topology) にいろいろな種類があり、どのような形の余剰次元空間の存在を仮定する模型であっても、余剰次元空間の体積 V_δ が式 (2.15) を満たせば、「大きい余剰次元のシナリオ」にそって Planck スケール M_p をより基本的なエネルギースケール M_f から導く事ができる為である。この節ではその中で最も単純な模型である Arkani-hamed と Dimopoulos、Dvali の模型 (ADD 模型) について説明する。以下では η_{AB} と $\eta_{\mu\nu}$ はそれぞれ $4 + \delta$ 次元と 4 次元の Minkowski 計量を表し、 $\eta_{AB} = \text{diag}\{1, -1, -1, \dots, -1\}$ 、 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ である。

ADD 模型は我々の住む 4 次元時空に加えて半径 R のトーラスにコンパクト化された δ 次元の余剰次元空間の存在を仮定する。我々の住む 4 次元時空は余剰次元方向の座標 y^i の原点に剛体の壁として存在するとみなす。この時、余剰次元空間の体積は $V_\delta = (2\pi R)^\delta$ であり、重力と

標準模型の粒子を記述する多次元 ($4 + \delta$ 次元) の作用積分 S は

$$\begin{aligned} S &= S^{\text{grav}} + S^{\text{SM}} \\ &= \frac{\bar{M}_f^{2+\delta}}{2} \int d^4x \int d^\delta y \sqrt{-g} \mathcal{R} + \int d^4x \int d^\delta y \sqrt{-g} \mathcal{L}^{\text{SM}} \delta(y) \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる。 $g = \det(g_{AB})$ である。ここで S^{grav} と S^{SM} はそれぞれ

$$S^{\text{grav}} = \frac{\bar{M}_f^{2+\delta}}{2} \int d^4x \int d^\delta y \sqrt{-g} \mathcal{R} \quad (2.17)$$

$$S^{\text{SM}} = \int d^4x \int d^\delta y \sqrt{-g} \mathcal{L}^{\text{SM}} \delta(y) \quad (2.18)$$

であり、 \mathcal{L}^{SM} は標準模型の Lagrangian を表す。式 (2.18) では \mathcal{L}^{SM} にデルタ関数 $\delta(y)$ を手で掛ける事で標準模型の粒子の 4 次元時空への閉じ込めを説明している。重力を媒介する重力子を Lorentz 共変な場で表す為、多次元の重力場 g_{AB} を

$$g_{AB} \simeq \eta_{AB} + \frac{2}{\bar{M}_f^{1+\frac{\delta}{2}}} h_{AB} \quad (2.19)$$

$$g^{AB} \simeq \eta^{AB} - \frac{2}{\bar{M}_f^{1+\frac{\delta}{2}}} h^{AB} \quad (2.20)$$

と線形近似し、式 (2.17) の作用積分 S^{grav} に代入すると

$$\begin{aligned} S^{\text{grav}} &= \int d^4x \int d^\delta y \left[-\frac{1}{2} h^{AB} \square h_{AB} + \frac{1}{2} h_A^A \square h_B^B \right. \\ &\quad \left. - h^{AB} \partial_A \partial_B h_C^C + h^{AB} \partial_A \partial_C h_B^C - \frac{1}{\bar{M}_f^{1+\frac{\delta}{2}}} h_{AB} T^{AB} \right] \quad (2.21) \\ &\quad (\square = \eta^{AB} \partial_A \partial_B) \end{aligned}$$

となる。ここで T^{AB} は

$$T^{AB} = T_{\text{SM}}^{\mu\nu} \delta_\mu^A \delta_\nu^B \delta(y) \quad (2.22)$$

である。 $T_{\text{SM}}^{\mu\nu}$ は標準模型のエネルギー運動量テンソルを表す。これは標準模型の Lagrangian の持つ Lorentz 対称性から生じている保存カレントである。

ADD 模型は多次元の模型である為、4 次元時空の中で起こる素粒子現象を議論する為に ADD 模型の 4 次元有効理論を導出する必要がある。ADD 模型ではこの 4 次元有効理論の作用積分として、式 (2.21) の S^{grav} の余剰次元方向の座標 y^i についての積分を実行して得た作用積分 S^{eff} を用いる。

2.2.2 4 次元有効理論の導出

この節では ADD 模型の 4 次元有効理論の作用積分 S^{eff} を求める。 S^{eff} を求める為には式 (2.21) の S^{grav} の余剰次元方向の座標 y^i についての積分を実行すればよい。余剰次元空間は半径 R を

持つ δ 次元のトーラスにコンパクト化された空間であったので、余剰次元方向の座標 y^i は以下の周期境界条件を満たしている。

$$y^i = y^i + 2\pi R \quad (i = 1, 2, \dots, \delta) \quad (2.23)$$

これより多次元の重力場 $h_{AB}(x, y)$ の余剰次元方向の運動量は δ 次元の数ベクトル \vec{n} を用いて \vec{n}/R と離散化され、 $h_{AB}(x, y)$ は

$$h_{AB}(x, y) = \sum_{0 < |\vec{n}| < \infty} \frac{h_{AB}^{\vec{n}}(x)}{\sqrt{V_\delta}} e^{i \frac{\vec{n}_i y^i}{R}} \quad (2.24)$$

と Fourier 級数の形で表される。ここで $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_\delta)$ であり、 $\sum_{0 < |\vec{n}| < \infty}$ は

$$\sum_{0 < |\vec{n}| < \infty} = \prod_{i=1}^{\delta} \sum_{n_i=0}^{\infty} \quad (2.25)$$

を表す。 V_δ は余剰次元空間の体積であり、ADD 模型では $V_\delta = (2\pi R)^\delta$ である。式 (2.24) の $h_{AB}(x, y)$ を式 (2.21) の S^{grav} に代入し余剰次元方向の座標 y^i についての積分を実行すると、 y^i 積分は多次元の重力場 $h_{AB}(x, y)$ の余剰次元方向の運動量の和 $\sum_{0 < |\vec{n}| < \infty}$ となり、4 次元有効理論

の作用積分 S^{eff} が得られる。得られた作用積分 S^{eff} は $h_{\mu\nu}^{\vec{n}}(x)$ と $T_{SM}^{\mu\nu}$ の関数として表されるが、 $h_{\mu\nu}^{\vec{n}}(x)$ には標準模型の粒子の間に働く重力相互作用を媒介する重力子の自由度と非物理的な自由度¹が含まれている為、作用積分 S^{eff} は非常に複雑な関数となる。この非物理的な自由度を除いて、重力相互作用を媒介するスピン 2 の重力子 $G^{(n)}_{\mu\nu}$ に関する部分を書き出すと S^{eff} は

$$S^{\text{eff}} = \int d^4x \sum_{0 < |\vec{n}| < \infty} \left[-\frac{1}{2} G^{(n)}_{\mu\nu} (\square + m^2) G^{(n)\mu\nu} + \frac{1}{2} G^{(n)\mu}{}_{\nu} (\square + m^2) G^{(n)\nu}{}_{\mu} \right. \\ \left. - G^{(n)\mu\nu} \partial_\mu \partial_n u G^{(n)\lambda}{}_{\lambda} + G^{(n)\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda G^{(n)\lambda}{}_{\nu} - \frac{1}{M_p} G^{(n)}{}_{\mu\nu} T_{SM}^{\mu\nu} \right] \quad (2.26)$$

$$(\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu)$$

となる。ここで $n = |\vec{n}|$ であり、 $m = |\vec{n}|/R$ である。式 (2.26) の作用積分 S^{eff} を求める際に M_f と M_p の関係式

$$\bar{M}_p = (2\pi R)^{\frac{\delta}{2}} \bar{M}_f^{1+\frac{\delta}{2}} = R^{\frac{\delta}{2}} M_f^{1+\frac{\delta}{2}} \quad (2.27)$$

¹ここで言う非物理的な自由度とは、重力場 h_{AB} に含まれる一般座標変換の自由度と標準模型の粒子とは相互作用しないスピン 1 の重力子とスピン 0 の重力子の自由度である。

を用いた。式 (2.24) の $h_{AB}(x, y)$ を式 (2.21) に代入し作用積分 S^{grav} の余剰次元方向の座標 y^i についての積分を実行する際に、 S^{grav} に含まれる多次元の d'Alembertian $\square = \eta^{AB}\partial_A\partial_B$ が

$$\begin{aligned} [\eta^{AB}\partial_A\partial_B] h_{AB}(x, y) &= \left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial y^\delta} \right)^2 \right\} \right] h_{AB}(x, y) \\ &= \sum_{0 < |\vec{n}| < \infty} \left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \left\{ \left(i \frac{n^1}{R} \right)^2 + \cdots + \left(i \frac{n^\delta}{R} \right)^2 \right\} \right] \frac{h_{AB}^{\vec{n}}(x)}{\sqrt{V_\delta}} e^{i \frac{n_i y^i}{R}} \\ &= \sum_{0 < |\vec{n}| < \infty} [\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2] \frac{h_{AB}^{\vec{n}}(x)}{\sqrt{V_\delta}} e^{i \frac{n_i y^i}{R}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

と置き換わるため、式 (2.26) の作用積分 S^{eff} には m^2 に比例する項が含まれる。この項は $G^{(n)}_{\mu\nu}$ の質量項を表す。式 (2.26) の作用積分 S^{eff} を見ると、ADD 模型の 4 次元有効理論には場 $G^{(n)}_{\mu\nu}$ で表される質量 $m = n/R$ を持つスピン 2 の重力子 (Kaluza-Klein 重力子) が無限個含まれる事が分かる。この Kaluza-Klein 重力子の質量 n/R は元の多次元重力子の余剰次元方向の運動量の大きさに一致する。これは多次元重力子の $4 + \delta$ 次元の運動量 p^A が満たしていた on-shell 条件

$$\eta_{AB} p^A p^B = (p^0)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} - \left(\frac{n}{R} \right)^2 = 0 \quad (2.29)$$

が、4 次元有効理論では 4 次元の on-shell 条件

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (p^0)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = \left(\frac{n}{R} \right)^2 \quad (2.30)$$

に帰着される事からも理解できる。ここで \vec{p} は 3 次元運動量を表す。式 (2.26) より質量 n/R を持つ Kaluza-Klein 重力子の Lagrangian $\mathcal{L}(n)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(n) &= -\frac{1}{2} G^{(n)}_{\mu\nu} (\square + m^2) G^{(n)\mu\nu} + \frac{1}{2} G^{(n)\mu}_\mu (\square + m^2) G^{(n)\nu}_\nu \\ &\quad - G^{(n)\mu\nu} \partial_\mu \partial_n u G^{(n)\lambda}_\lambda + G^{(n)\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda G^{(n)\lambda}_\nu - \frac{1}{M_p} G^{(n)}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}_{\text{SM}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

である。標準模型で記述されている粒子と Kaluza-Klein 重力子の相互作用 Lagrangian \mathcal{L}^{int} は

$$\mathcal{L}^{\text{int}} = -\frac{1}{M_p} G^{(n)}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}_{\text{SM}} \quad (2.32)$$

で与えられる。よって、Kaluza-Klein 重力子 1 つ 1 つは標準模型と結合の強さ $1/\bar{M}_p$ の重力相互作用をすることが分かる。しかし式 (2.26) の作用積分 S^{eff} には無限個の Kaluza-Klein 重力子が含まれている。この無限個存在する Kaluza-Klein 重力子の寄与を足し上げると、標準模型の粒子と Kaluza-Klein 重力子の重力相互作用の結合の強さは多次元重力子と同様に $1/M_f$ となる。式 (2.31) の Lagrangian $\mathcal{L}(n)$ を \vec{n} について和をとって得られる Lagrangian \mathcal{L}^{eff} が ADD 模型の 4 次元有効理論の Lagrangian である。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{eff}} &= \sum_{0 < |\vec{n}| < \infty} \left[-\frac{1}{2} G^{(n)}_{\mu\nu} (\square + m^2) G^{(n)\mu\nu} + \frac{1}{2} G^{(n)\mu}_\mu (\square + m^2) G^{(n)\nu}_\nu \right. \\ &\quad \left. - G^{(n)\mu\nu} \partial_\mu \partial_n u G^{(n)\lambda}_\lambda + G^{(n)\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda G^{(n)\lambda}_\nu - \frac{1}{M_p} G^{(n)}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}_{\text{SM}} \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

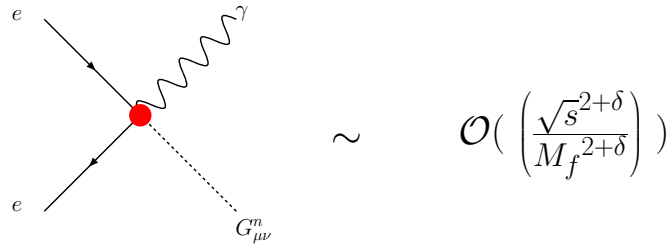


図 2.3: 重力相互作用の頂点を 1 つ含む過程の Feynmann 図

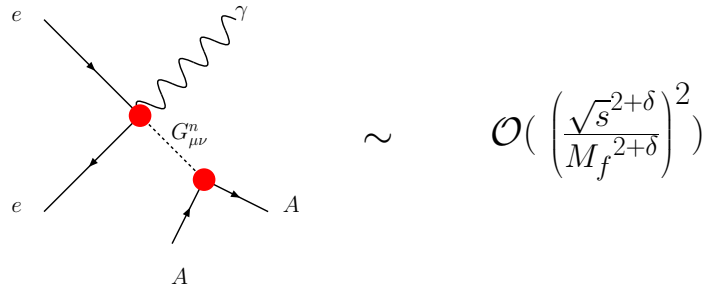


図 2.4: 重力相互作用の頂点を 2 つ含む過程の Feynmann 図

式 (2.33) の Lagrangian

L^{eff} を基に、4次元場の理論の摂動論の手法を用いて Kaluza-Klein 重力子が生じる素粒子過程の散乱断面積を求める事ができる。摂動論を用いて求めた Kaluza-Klein 重力子が生じる過程の散乱断面積は、その過程に含まれる重力相互作用の頂点の個数に応じて $\sqrt{s}^{2+\delta}/M_f^{2+\delta}$ の冪の形で表される。例として、重力相互作用の頂点を 1 つ含む過程の Feynmann 図と重力相互作用の頂点を 2 つ含む過程の Feynmann 図をそれぞれ図 2.3 と図 2.4 に示す。ここで \sqrt{s} は始状態にある粒子の衝突エネルギーである。これより、Kaluza-Klein 重力子が生じる過程の散乱断面積を摂動論の手法を用いて求められるのは \sqrt{s} が $\sqrt{s} < M_f$ を満たす場合である。 $\sqrt{s} > M_f$ の場合、Kaluza-Klein 重力子が生じる過程の散乱断面積を非摂動論的に計算する方法は未だ確立していない。通常、摂動論を用いて求めた散乱断面積は結合定数の冪の形で表される。例として量子電磁気学の場合を考えると、電磁相互作用によって生じる過程の散乱断面積は電磁相互作用の結合定数 e の冪として表される。Kaluza-Klein 重力子が媒介する重力相互作用の場合は結合定数が $1/M_f$ であり質量次元 -1 を持つ。この為、粒子の間に働く重力相互作用の強さは粒子の持つ 4 元運動量に依存し、散乱断面積は $\sqrt{s}^{2+\delta}/M_f^{2+\delta}$ の冪で表される。これらについては第 3 章で散乱断面積を計算する際に具体的に見る。

2.2.3 理論的困難

ADD 模型には標準模型の粒子の 4次元時空への閉じ込めを説明する力学的な機構が含まれていない。式 (2.18) から分かる通り、ADD 模型では標準模型の Lagrangian \mathcal{L}^{SM} に $\delta(y)$ を掛ける事で標準模型に含まれる粒子を 4次元時空に”手で”閉じ込めている。この為、4次元時空に余剰次元空間を含めた全空間では余剰次元空間の原点 $y = 0$ が特別な点になっており、 $y = 0$ の点

で余剰次元方向の並進対称性が破れている。並進対称性から得られる保存則は運動量保存則であった。よって、ADD 模型では余剰次元方向の運動量が保存していない。これは ADD 模型の理論的な困難である。この為 ADD 模型の 4 次元有効理論の Lagrangian には、とり得る全ての余剰次元方向の運動量を持った Kaluza-Klein 重力子が含まれている。式 (2.33) の Lagrangian \mathcal{L}^{eff} に \vec{n} についての和 $\sum_{0 < |\vec{n}| < \infty}$ が含まれるのはこの為である。この余剰次元方向の運動量の非保存の問題は、その 4 次元有効理論では Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程の散乱断面積の発散の問題として現れる。この散乱断面積の発散の問題については第 3 章で Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程の散乱断面積を Toy model を用いて計算する際に説明する。

実験では

$$e^+e^- \rightarrow \gamma + (\text{missing})$$

の過程として観測され区別はできない。

質量 m を持つ Kaluza-Klein 重力子が標準模型の粒子に崩壊する崩壊幅 Γ が $O(m^3/\bar{M}_p^2)$ と小さい為、Mirabelli らは Kaluza-Klein 重力子の崩壊幅をゼロと見なしても十分良い近似だと考えて解析した。すなわち崩壊の効果を含んでいる Kaluza-Klein 重力子の生成過程の散乱断面積を σ_Γ とし、Kaluza-Klein 重力子を崩壊しない粒子として求めた散乱断面積を σ とすると

$$\sigma_\Gamma - \sigma = O\left(\frac{1}{M_p^2}\right) = O\left(\frac{1}{M_f^2} \frac{\Gamma}{\sqrt{s}}\right) \quad (3.1)$$

であり、 σ_Γ と σ の差は実験では有意ではないとしている。ここで Γ は Kaluza-Klein 重力子が標準模型の粒子に崩壊する崩壊幅である。崩壊幅の逆数がちょうど粒子数が $1/e$ に減少するのにかかる時間(寿命) τ にあたる。 \sqrt{s} は始状態の粒子の衝突エネルギーで、本論文では $\sqrt{s} \simeq 1\text{TeV}$ 程度を考える。

しかし実際に散乱断面積を求めると、質量 m を持つ Kaluza-Klein 重力子の崩壊幅が $O(m^3/\bar{M}_p^2)$ と小さいにもかかわらず σ_Γ と σ の間には $O(1/\bar{M}_p^2)$ ではない大きな差が生じていることが分かる。以下では見通しを良くするため、Toy model を用いて散乱断面積 σ_Γ と σ を求める。最初に 3.1 節では計算に用いる Toy model を導入する。3.2 節では散乱断面積 σ_Γ と σ を計算し、3.3 節で具体的に計算した σ_Γ と σ を用いてそれらの差を求める。3.4 節では散乱断面積 σ_Γ と σ の差の物理的な意味を考察し、散乱断面積 σ_Γ と σ の間に何故大きな差が生じているか結論づける。

3.1 Toy model

この節では散乱断面積 σ_Γ と σ の計算に用いる Toy model を導入し、ADD 模型における Kaluza-Klein 重力子の生成過程と Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を含む Kaluza-Klein 重力子の生成過程に対応する Toy model の過程を示す。この Toy model は光子と Kaluza-Klein 重力子のスピンをすべてゼロとみなしたものであり、Kaluza-Klein 重力子に対応する実スカラー場 ϕ_n を無限個含んでいる。

Kaluza-Klein 重力子はスピン 2 を持つため、Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程の散乱断面積は複雑な構造を持つ。この為、ADD 模型の 4 次元有効理論を用いて Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程の散乱断面積 σ_Γ を求めると、Kaluza-Klein 重力子の生成過程に Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を加えたことによって生じる散乱断面積の変化を求める際に見通しが悪い。Kaluza-Klein 重力子の生成過程における Kaluza-Klein 重力子の崩壊の効果は模型に同じ相互作用をする粒子を無限個含むという ADD 模型の性質と、後述の中間状態を伝播する Kaluza-Klein 重力子を記述する Feynmann 伝播関数の分母の構造によって決まっている。Feynmann 伝播関数の分母の構造はどんなスピンを持つ粒子でも共通である。粒子のスピンによる運動量の偏極の効果は Kaluza-Klein 重力子の生成過程に対する Kaluza-Klein 重力子の崩壊の効果を検討する際には重要ではない。中間状態にある粒子のスピンによって終状態にある粒子の運動量の方向の角度分布が変化するが、 σ_Γ と σ の差を求める際には終状態の運動量の自由度を角度まで全て積分するので、終状態の粒子の運動量の角度分布の変化は特に問題にならない。

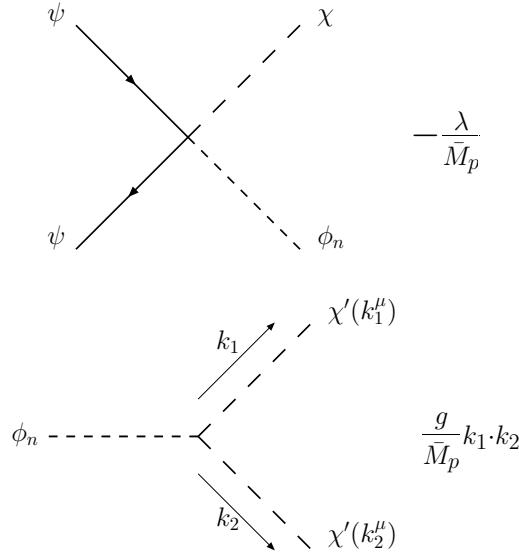
これより光子や Kaluza-Klein 重力子をスピンゼロの実スカラー粒子とみなした Toy model を用いて散乱断面積の計算を行うことで、Kaluza-Klein 重力子の崩壊の効果による Kaluza-Klein 重力子の生成過程の散乱断面積の本質的な変化を見通しよく求める事ができる。

Toy model の Lagrangian は以下である。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \sum_{0<|\vec{n}|<\infty} \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n - \frac{1}{2}m_n^2\phi_n^2 \right] + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi'\partial^\mu\chi' \\ & + \sum_{0<|\vec{n}|<\infty} \left[-\frac{\lambda}{M_p}\bar{\psi}\psi\phi_n\chi \right] + \sum_{0<|\vec{n}|<\infty} \left[-\frac{g}{2M_p}\phi_n\partial_\mu\chi'\partial^\mu\chi' \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで場 ψ はスピン 1/2 の Dirac 場であり電子に対応する場である。場 ϕ_n と χ 、 χ' は実スカラー場であり、 ϕ_n は質量 n/R ($n = |\vec{n}|$) を持つ Kaluza-Klein 重力子のスピンをゼロとした粒子に対応し、 χ は光子の、 χ' は Kaluza-Klein 重力子の崩壊先の粒子 (A) のそれぞれスピンをゼロとした粒子に対応している。場 ψ と χ 、 χ' は皆質量を持たない。

式 (3.2) の Lagrangian から得られる頂点に関する運動量表示の Feynmann 則は以下のようになる。



ここで k_1 と k_2 はそれぞれ $\chi'(k_1)$ と $\chi'(k_2)$ の 4 元運動量であり、 $k_1 \cdot k_2 = k_1^\mu k_{2\mu}$ である。

ϕ_n と $2\chi'$ の 3 点相互作用の頂点は ADD 模型の Kaluza-Klein 重力子と 2 つの光子の 3 点相互作用の頂点に対応する。相互作用の結合定数が $1/M_p$ と質量次元 -1 を持っているため、Kaluza-Klein 重力子と 2 つの光子の 3 点相互作用の頂点には光子の運動量が含まれる。この相互作用の性質を反映して、Toy model における ϕ_n と $2\chi'$ の 3 点相互作用の頂点にも χ' の運動量が含まれている。 $\bar{\psi}$ と ψ 、 χ 、 ϕ_n の 4 点相互作用は ADD 模型の電子と陽電子、光子、Kaluza-Klein 重力子の 4 点相互作用に対応する。この相互作用の結合定数も $1/M_p$ と質量次元 -1 を持っているが、結合する場が 4 つあるので頂点に運動量は入らない。これを反映して、Toy model における $\bar{\psi}$ と ψ 、 χ 、 ϕ_n の 4 点相互作用の頂点にも運動量は含まれていない。

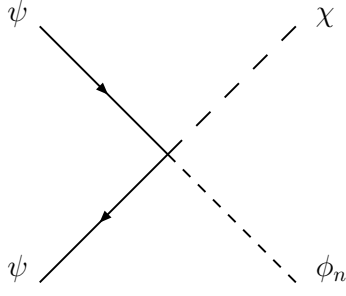


図 3.3: $\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\phi_n$ の Feynmann 図

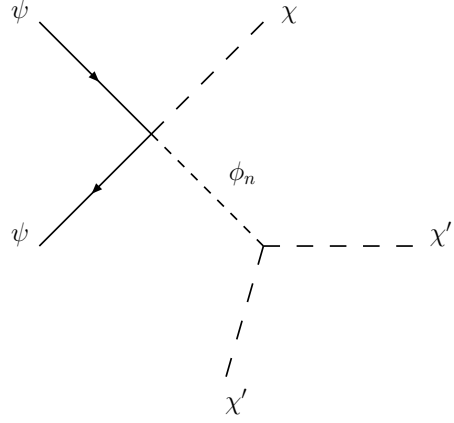


図 3.4: $\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\chi'\chi'$ の Feynmann 図

ADD 模型における Kaluza-Klein 重力子の生成過程に対応する Toy model の過程は ϕ_n の生成過程

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\phi_n$$

である。この過程は ϕ_n を崩壊しない粒子とみなした ϕ_n の生成過程である。終状態にある ϕ_n の質量 n/R を $n/R < \sqrt{s}$ の範囲で足し合わせた包括的な散乱断面積 σ が Toy model における強い重力による相互作用の散乱断面積に対応する。Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を含む過程に対応する Toy model の過程は、 ϕ_n の生成過程に ϕ_n の崩壊過程を加えた過程である。 ϕ_n の崩壊先として $2\chi'$ を考えると、 ϕ_n の崩壊過程

$$\phi_n \rightarrow \chi'\chi'$$

を含んだ過程は

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\chi'\chi'$$

である。この過程は ϕ_n の崩壊過程まで含めた正しい ϕ_n の生成過程である。Toy model にも異なる質量 $|\vec{n}|/R$ を持つ ϕ_n が無限個含まれているので、これら全ての ϕ_n も中間状態で互いに量子力学的に干渉する。これらの過程の Feynmann 図を図 3.3 と図 3.4 に示す。図 3.3 の Feynmann 図は ADD 模型における Kaluza-Klein 重力子の生成過程の Feynmann 図 (図 3.1) のうちの最初の一つの Feynmann 図に対応し、図 3.4 の Feynmann 図も同様に ADD 模型における Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を含んだ Kaluza-Klein 重力子の生成過程の Feynmann 図 (図 3.2) のうちの最初の一つの Feynmann 図に対応する。Kaluza-Klein 重力子の生成過程にも Kaluza-Klein 重力子の崩壊の効果を含む過程にも 4 つの Feynmann 図が対応しているが、以下では図 3.3 と図 3.4 の Feynmann 図のみを考える。これは ϕ_n の生成過程に ϕ_n の崩壊過程を加えることにより生じる散乱断面積の変化を見やすくするためであり、異なる Feynmann 図同士の干渉の効果は今回考えない。他の Feynmann 図についても以下の議論は同じように適応できる。

ϕ_n の生成過程に ϕ_n の崩壊過程を加えることで生じる散乱断面積の変化を調べるためには ϕ_n 崩壊の過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ と ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_T を計算し、これらの散乱断面積の差を求めれば良い。

3.2 散乱断面積の計算方法

この節では ϕ_n 崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ と ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ を計算する。2つの散乱断面積の計算過程を比較すると、散乱断面積を計算する際の ϕ_n のベクトル \vec{n} についての和の取扱いが大きく異なる。特に ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ を求める際に実行する ϕ_n のベクトル \vec{n} についての和は発散する。3.2.1節では ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ を計算する。次の3.2.2節で ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ を計算し、発散する和から意味ある物理量を取り出すために導入する cut off Λ_{New} について説明する。

3.2.1 ϕ_n の崩壊の過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積の計算

ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\phi_n$$

の散乱断面積 σ を計算する。図 3.3 で表される質量 $m = |\vec{n}|/R$ を持つ ϕ_n を生成する過程の不変散乱振幅を $\mathcal{M}(m)$ とすると、Toy model の Lagrangian(3.2) から得られる $\mathcal{M}(m)$ は

$$\mathcal{M}(m) = \bar{v}(p_2, s_2) \left(-\frac{\lambda}{M_p} \right) u(p_1, s_1) \quad (3.3)$$

である。ここで $u(p_1, s_1)$ と $v(p_2, s_2)$ はそれぞれ $\psi(p_1)$ と $\bar{\psi}(p_2)$ の偏極テンソルに対応する量で、とりうる全てのスピンの状態 ($s = \pm 1$) で和をとると

$$\sum_{Spin} u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) = p_1^\mu \gamma_\mu \quad (3.4)$$

$$\sum_{Spin} v(p_2, s_2) \bar{v}(p_2, s_2) = p_2^\mu \gamma_\mu \quad (3.5)$$

を満たす。この過程の散乱断面積を $\sigma(m)$ とすると $\sigma(m)$ は

$$\sigma(m) = \frac{1}{4} \sum_{Spin} \int \prod_{i=1}^2 \left[\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \right] \frac{\mathcal{M}(m) \mathcal{M}^\dagger(m)}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \quad (3.6)$$

である。ここで p_1^μ と p_2^μ はそれぞれ始状態にある ψ と $\bar{\psi}$ の4元運動量であり、 k_1^μ と $k_2^\mu (= k^\mu)$ はそれぞれ終状態にある χ と ϕ_n の4元運動量である。始状態の粒子のスピンの状態について平均をとった。この散乱断面積 $\sigma(m)$ を \vec{n} について足し上げた散乱断面積 σ が求める散乱断面積である。

$$\sigma = \sum_{0 < |\vec{n}| < R\sqrt{s}} \sigma(m) \quad (3.7)$$

この \vec{n} についての離散和を計算するのは困難である。これよりの \vec{n} についての離散和を ϕ_n の質量 m についての積分で近似する。 ϕ_n の質量 m は $|\vec{n}|/R$ であり、異なる \vec{n} で番号付けされた ϕ_n の質量の差 Δm は式 (2.27) より

$$\Delta m \propto \frac{1}{R} = \left(\frac{M_f^{2+\delta}}{\bar{M}_p^2} \right)^{\frac{1}{\delta}} \quad (3.8)$$

である。 $M_f = 5\text{TeV}$ の場合を考えると $\Delta m = 0.025\text{eV}, 0.35\text{MeV}, 80\text{MeV}$ ($\delta = 2, 4, 6$) となる。よって余剰次元空間の次元 δ が十分小さければ ($\delta \lesssim 6$) $\Delta m \ll \sqrt{s}$ であり、 \vec{n} についての離散和を ϕ_n の質量 m についての積分を用いて計算することは良い近似なっていると考えられる。大きさ $n = |\vec{n}|$ が n と $n + dn$ の間に含まれているベクトル \vec{n} の個数 dN は

$$dN = S_{\delta-1} |\vec{n}|^{\delta-1} dn \quad (3.9)$$

である。ここで $S_{\delta-1}$ は δ 次元の単位球面の面積を表し

$$S_{\delta-1} = \frac{2\pi^{\frac{\delta}{2}}}{\Gamma[\frac{\delta}{2}]} \quad (3.10)$$

で与えられる。 $\Gamma[\delta/2]$ はガンマ関数である。 $m = |\vec{n}|/R$ より $dm = dn/R$ である。これより dN は

$$dN = S_{\delta-1} |\vec{n}|^{\delta-1} \times \frac{dm}{R} = S_{\delta-1} \frac{m^{\delta-1}}{R^\delta} \quad (3.11)$$

となる。ここで式 (2.27) を用いて R を M_f と \bar{M}_p を用いて表すと

$$dN = S_{\delta-1} \frac{\bar{M}_p^2}{M_f^{2+\delta}} m^{\delta-1} dm \equiv \rho(m) dm \quad (3.12)$$

となる。ここで $\rho(m)$ は

$$\rho(m) = S_{\delta-1} \frac{\bar{M}_p^2}{M_f^{2+\delta}} m^{\delta-1} \quad (3.13)$$

であり、 ϕ_n の質量 m についての積分の密度関数を表す。これより \vec{n} についての離散和は

$$\sum_{0 < |\vec{n}| < R\sqrt{s}} \rightarrow \int dm \rho(m) \quad (3.14)$$

と m についての積分に置き換わり、式 (3.7) の散乱断面積は

$$\sigma \simeq \int_0^{\sqrt{s}} dm \rho(m) \sigma(m) \quad (3.15)$$

となる。 ϕ_n の生成過程の包括的な散乱断面積を求める場合は、それぞれの質量を持つ ϕ_n の生成過程の散乱断面積を求めてから ϕ_n の質量について足し上げれば良い。式 (3.15) の質量積分の上限の値 \sqrt{s} は始状態と終状態にある粒子の 4 元運動量の保存則と on-shell 条件

$$p^{02} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 \quad (3.16)$$

から求まる。ここで \vec{p} は粒子の運動量であり m は粒子の質量、 $p^0 = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} + m^2} (= E_p)$ は粒子のエネルギーである。この条件を満たす粒子の状態を on-shell の状態と呼ぶ。

式 (3.6) の運動量積分は終状態にある粒子が 2 体のため簡単に実行できる。4 元運動量の保存則より積分の自由度は終状態にある粒子の運動量がなす角度 (θ, ϕ) のみであるので、始状態の粒子の重心系での微分散乱断面積 $\sigma(m)/d\theta d\phi$ は

$$\frac{\sigma(m)}{d\theta d\phi} = \frac{k}{64\pi^2 s p} \left[\sum_{\text{Spin}} \frac{1}{4} \mathcal{M}(m) \mathcal{M}^\dagger(m) \right] \quad (3.17)$$

と求まる。ここで p と k はそれぞれ始状態、終状態にある粒子の運動量の大きさであり

$$p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

$$k = |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{(s - m^2)}{2\sqrt{s}}$$

である。式 (3.3) と式 (3.4)、式 (3.5) より

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{M}(m) \mathcal{M}^\dagger(m) = \left(\frac{\lambda}{M_p} \right)^2 p_1 \cdot p_2 = \left(\frac{\lambda}{M_p} \right)^2 \frac{s}{2} \quad (3.18)$$

であるので、これを式 (3.17) に代入し、角度積分を実行すると

$$\sigma(m) = \frac{1}{32\pi} \left(\frac{\lambda}{M_p} \right)^2 \frac{s - m^2}{s} \quad (3.19)$$

と求まる。式 (3.19) の $\sigma(m)$ と式 (3.13) の $\rho(m)$ を式 (3.15) に代入し質量積分を実行すると

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2 2^4} \frac{2\pi^{\frac{\delta}{2}}}{\Gamma\left[\frac{\delta}{2}\right]} \frac{\lambda^2}{M_f^{2+\delta}} \frac{2(\sqrt{s})^\delta}{\delta(2+\delta)} \quad (3.20)$$

が求まる。求めた散乱断面積 σ のオーダーは $\mathcal{O}((\sqrt{s})^\delta / M_f^{2+\delta})$ である。 σ は $(\sqrt{s})^\delta$ に比例するので \sqrt{s} が十分に大きければ沢山の ϕ_n が生成され、散乱断面積 σ が大きくなるのが分かる。例として $\delta = 4$ で $M_f = 5\text{TeV}$ 、 $\sqrt{s} = 1\text{TeV}$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\sigma) &= \mathcal{O}\left(\frac{s^4}{M_f^6}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{10^{-4}}{(\text{TeV})^2}\right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。図 3.3 の Feynmann 図から分かる通り、 ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程は重力相互作用の頂点を 1 つ含む過程であった。この為散乱断面積 σ は

$$\sigma = \left(\frac{\sqrt{s}^{2+\delta}}{M_f^{2+\delta}} \right) \times \frac{2\pi^{\frac{\delta}{2}}}{(2\pi)^2 2^4 \Gamma\left[\frac{\delta}{2}\right]} \frac{2\lambda^2}{\sqrt{s}^2 \delta(2+\delta)} \quad (3.22)$$

となり、 $\sqrt{s}^{2+\delta} / M_f^{2+\delta}$ の冪の 1 次の量となっている。

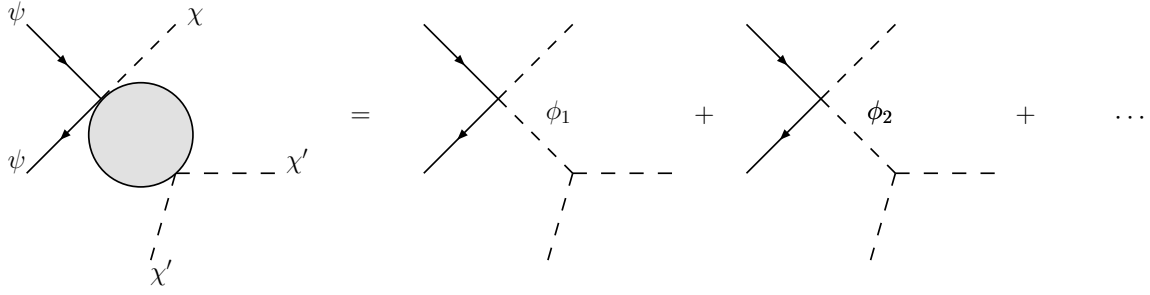


図 3.5: $\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\chi'\chi'$ の Feynmann 図

3.2.2 ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ の計算

次に ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\chi'\chi'$$

の散乱断面積 σ_Γ を計算する。 ϕ_n の崩壊過程を加えた ϕ_n の生成過程の散乱断面積を求める場合には図 3.5 のように同じ始状態と終状態を持ち中間状態に ϕ_n が伝播する Feynmann 図が無限個あるので、まず不変散乱振幅を求める段階で質量 $m = |\vec{n}|/R$ についての和をとらなければならない。図 3.4 で表される質量 $m = |\vec{n}|/R$ を持つ ϕ_n が中間状態を伝播する過程の不変散乱振幅を $\mathcal{M}_\Gamma(m)$ とすると、式 (3.2) にある Toy model の Lagrangian から得られる $\mathcal{M}_\Gamma(m)$ は

$$\mathcal{M}_\Gamma(m) = \bar{v}(p_2, s_2) \left(-\frac{\lambda}{M_p} \right) u(p_1, s_1) \frac{1}{m^2 - q \cdot q - im\Gamma(m)} \left(\frac{g}{M_p} \right) (k_1 \cdot k_2) \quad (3.23)$$

である。ここで

$$\Delta_F(m, q) = \frac{1}{m^2 - q \cdot q - im\Gamma(m)} \quad (3.24)$$

は 4 元運動量 q^μ と質量 $m = |\vec{n}|/R$ を持つ実スカラー粒子 ϕ_n の Feynmann 伝播関数であり、不変散乱振幅の中で中間状態を伝播する ϕ_n を表している。分母にある $\Gamma(m)$ は質量 m を持つ ϕ_n が $2\chi'$ に崩壊する崩壊幅である。以下では何故、Feynmann 伝播関数の分母に崩壊幅 $\Gamma(m)$ が入るのかについて簡単に解説する。

式 (3.24) の Feynmann 伝播関数は相互作用をしない自由な ϕ_n の Feynmann 伝播関数

$$\Delta_F(m, q) = \frac{1}{m^2 - q \cdot q} \quad (3.25)$$

に図 3.6 の Feynmann 図で表される輻射補正 $\mathcal{M}^{(1)}(\phi_n \rightarrow \phi_n)$ を加えたものである。この輻射補正 $\mathcal{M}^{(1)}(\phi_n \rightarrow \phi_n)$ は自由な ϕ_n の Feynmann 伝播関数の分母に加わる。 ϕ_n は $2\chi'$ に崩壊できるので、図 3.6 の χ' のループには on-shell の状態にある χ' が回る寄与があり、これは $\mathcal{M}^{(1)}(\phi_n \rightarrow \phi_n)$ の虚部として表れる。光学定理よりこの on-shell の状態にある χ' がループを回る寄与はちょう

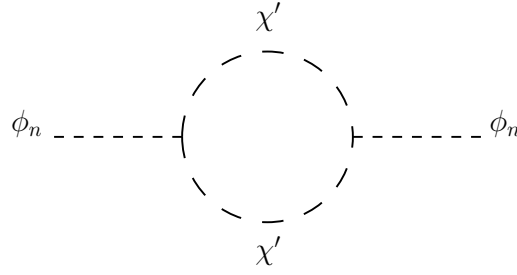


図 3.6: ϕ_n の Feynmann 伝播関数に対する輻射補正の 1 次の Feynmann 図

ど、 ϕ_n が $2\chi'$ に崩壊する過程の不変散乱振幅の絶対値の 2 乗を $2\chi'$ の運動量で積分した値に等しい。すなわち

$$\text{Im}\mathcal{M}^{(1)}(\phi_n \rightarrow \phi_n) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'_k} [\mathcal{M}(\phi_n \rightarrow \chi(k)\chi(k'))\mathcal{M}^\dagger(\phi_n \rightarrow \chi(k)\chi(k'))] \quad (3.26)$$

である。式 (3.26) の右辺を ϕ_n の質量 m で割ったものが、 ϕ_n が $2\chi'$ に崩壊する崩壊幅 $\Gamma(m)$ にあたる。

$$\Gamma(m) = \frac{1}{2m} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'_k} [\mathcal{M}(\phi_n \rightarrow \chi(k)\chi(k'))\mathcal{M}^\dagger(\phi_n \rightarrow \chi(k)\chi(k'))] \quad (3.27)$$

Toy model から得られる $\phi_n \rightarrow \chi\chi$ の不変散乱振幅は

$$\mathcal{M}(\phi_n \rightarrow \chi(k)\chi(k')) = \left(-\frac{g}{M_p}\right) k \cdot k' \quad (3.28)$$

である。これを式 (3.27) に代入し、運動量積分を実行すると崩壊幅 $\Gamma(m)$ は

$$\Gamma(m) = \left(\frac{g}{M_p}\right)^2 \frac{m^3}{128\pi} \quad (3.29)$$

と求まる。

これより ϕ_n の Feynmann 伝播関数の輻射補正を求めると、分母に複素数 $im\Gamma(m)$ が加わることが分かる。これは一般にも言え、崩壊する粒子の輻射補正を含む Feynmann 伝播関数の分母には必ず $im\Gamma_{\text{total}}$ が加わる。ここで Γ_{total} は粒子の全崩壊幅を表す。Toy model では ϕ_n の崩壊先として $2\chi'$ のみを考えているので、 $\Gamma_{\text{total}} = \Gamma(m)$ である。

崩壊しない粒子の輻射補正を含む Feynmann 伝播関数の分母には複素数 $im\Gamma_{\text{total}}$ が加わらない。輻射補正を表す Feynmann 図のループに on-shell の状態の粒子が回る寄与が無いので、 $\mathcal{M}^{(1)}$ の虚部がゼロになる為である。実はこの Feynmann 伝播関数の分母の構造により反応過程の中間状態にある粒子が on-shell の状態をとるか否かが決まる。

ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の不変散乱振幅 \mathcal{M}_Γ は式 (3.23) の $\mathcal{M}_\Gamma(m)$ を質量 m について和をとったものである。

$$\mathcal{M}_\Gamma = \sum_{0 < |\vec{n}| < \infty} [\mathcal{M}_\Gamma(n)] \simeq \int_0^\infty dm \rho(m) [\mathcal{M}_\Gamma(m)] \quad (3.30)$$

ここで $\rho(m)$ は式 (3.13) で求めた積分密度である。これより不変散乱振幅の絶対値の 2 乗 $\mathcal{M}_\Gamma \mathcal{M}_\Gamma^\dagger$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Gamma \mathcal{M}_\Gamma^\dagger &= \sum_{0 < |\vec{n}_1| < \infty} \sum_{0 < |\vec{n}_2| < \infty} [\mathcal{M}_\Gamma(n_1) \mathcal{M}_\Gamma^\dagger(n_2)] \\ &\simeq \int_0^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \rho(m_1) \rho(m_2) [\mathcal{M}_\Gamma(m_1) \mathcal{M}_\Gamma^\dagger(m_2)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

となり、散乱断面積 σ_Γ は

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int \prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \right] \frac{\mathcal{M}_\Gamma \mathcal{M}_\Gamma^\dagger}{4\sqrt{(p_1 \cdot p)^2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) \\ &\simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int \prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \right] \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} \left[\int_0^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \rho(m_1) \rho(m_2) [\mathcal{M}_\Gamma(m_1) \mathcal{M}_\Gamma^\dagger(m_2)] \right] \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) \end{aligned} \quad (3.32)$$

である。ここで p_1^μ と p_2^μ はそれぞれ始状態にある ψ と $\bar{\psi}$ の 4 元運動量であり、 k_1^μ と k_2^μ 、 k_3^μ はそれぞれ終状態にある χ と χ' 、 χ' の 4 元運動量である。この散乱断面積も始状態のスピンの状態について平均をとった。終状態にある $2\chi'$ は区別ができないので散乱断面積を求める際に 1/2 倍する。

ϕ_n の崩壊過程を含まない過程の場合は質量 $m = |\vec{n}|/R$ を持つ ϕ_n の生成過程の散乱断面積を質量 m について足し上げたが、 ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の場合は不変散乱振幅を求める段階で質量 m について足し上げた。これは 2 つの過程の散乱断面積を求める際の大きな違いである。不変散乱断面積の段階で質量 m についての和をとるため、式 (3.31) の $\mathcal{M}_\Gamma \mathcal{M}_\Gamma^\dagger$ には異なる質量 m_1 と m_2 を持つ ϕ_n が中間状態を伝播する過程の不変散乱振幅同士の積の項

$$\rho(m_1) \rho(m_2) [\mathcal{M}_\Gamma(m_1) \mathcal{M}_\Gamma^\dagger(m_2)]$$

が表れる。この項は干渉項と呼ばれ、異なる質量を持つ ϕ_n が互いに量子力学的に干渉する効果を表している。中間状態にある ϕ_n は量子力学的な不確定性によって生じている仮想粒子であり観測される状態の粒子ではない。このため異なる質量を持ち同じ相互作用をする ϕ_n が中間状態にある場合には全て互いに干渉する。これに対し ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の ϕ_n は終状態にあり、on-shell の状態にある観測可能な物理的な粒子である。このため ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程では異なる質量を持つ ϕ_n が互いに干渉することはない。

式 (3.30) の質量積分は積分範囲が $0 < m < \infty$ であるため、余剰次元の個数が 2 以上の場合発散することが分かっている。これは、ADD 模型では余剰次元方向の運動量が保存していない為である。4 次元有効理論での Kaluza-Klein 重力子の質量は高次元の重力子の余剰次元方向の運動量の大きさと等しい。このため ADD 模型の余剰次元方向の運動量の問題が 4 次元有効理論では中間状態にある Kaluza-Klein 重力子の質量積分の発散の問題として表れる。Kaluza-Klein 重力子が終状態にある場合では 4 元運動量の保存則と式 (3.16) の on-shell 条件から質量積分の上限 \sqrt{s} が決まっていた。これに対し Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある場合では一般には on-shell 条件を満たさないため、4 元運動量の保存則だけでは質量の上限を得られない。

この発散する積分から意味ある物理量を取り出すため、積分範囲の上限に cut off Λ_{New} を置く必要がある。

$$\int_0^\infty dm \rho(m) [\mathcal{M}_\Gamma(m)] \longrightarrow \int_0^{\Lambda_{\text{New}}} dm \rho(m) [\mathcal{M}_\Gamma(m)] \quad (3.33)$$

この Λ_{New} は 4 次元部分空間への粒子の閉じ込めの動力学を記述する新しい物理のエネルギースケールであると共に、ADD 模型の適応限界と考えられる。ADD 模型は粒子の部分空間への閉じ込め現象の動力学を一切記述していない。このため ADD 模型では \sqrt{s} が 4 次元部分空間への粒子の閉じ込め現象の物理が見えてくるエネルギースケール Λ_{New} に達すると「大きい余剰次元のシナリオ」の物理をうまく記述できなくなる。第 2 章で見た通り、ADD 模型では余剰次元まで含む高次元の Lagrangian に含まれる標準模型の Lagrangian に手で δ 関数をかけ算することで、4 次元部分空間に閉じ込められた標準模型の粒子を説明している。

$$S^{\text{SM}} = \int \sqrt{-g} d^D z \mathcal{L}_{\text{SM}} \delta^d(y) \quad (3.34)$$

これは 4 次元の場の量子論には現在、粒子の部分空間への閉じ込めを説明する動力学が存在しないためである。 δ 関数を用いて部分空間に粒子を手で局在させているために余剰次元方向の運動量保存則が破れている。しかし部分空間への粒子の閉じ込め現象を動力的に記述できる新しい理論では、この余剰次元方向の運動量の非保存の問題は解決されているはずである。この新しい物理の効果を 4 次元有効理論で見ると、質量積分の $\Lambda_{\text{New}} < m$ の範囲からの寄与は部分空間への粒子の閉じ込めの物理の効果で抑制されて積分値は有限になると予想される。 $\sqrt{s} \ll \Lambda_{\text{New}}$ の範囲ではこの新しい物理の効果は小さい。これより ADD 模型は適応できるエネルギースケールが Λ_{New} までの有効理論と考えられる。 $\sqrt{s} < \Lambda_{\text{New}}$ の範囲の過程に対して ADD 模型は「大きい余剰次元シナリオ」における近似的な散乱断面積を与えている。実際 $\sqrt{s} < \Lambda_{\text{New}}$ であれば、質量積分の $m > \sqrt{s}$ の積分範囲からの寄与は小さく、積分値は Λ_{New} に強く依存しない。このため $\sqrt{s} < \Lambda_{\text{New}}$ の場合は式 (3.33) のように積分範囲の上限を Λ_{New} として質量積分の値を近似するのは良い近似になっていると考えられる。

Λ_{New} の値は部分空間への粒子の閉じ込め現象の動力学を記述する新しい理論によって決まる¹。この新しい理論は同時に高次元の重力相互作用も記述している事が期待されるので、 $\Lambda_{\text{New}} \simeq M_f$ であると考えられる。 $\Lambda_{\text{New}} \leq M_f$ の場合と $\Lambda_{\text{New}} > M_f$ の場合が考えられるが、前者の場合は強い重力相互作用の効果が表れる前に部分空間への粒子の閉じ込めの現象の物理の効果が大きくなっていしまうため、Kaluza-Klein 重力子の生成過程を用いて「大きい余剰次元のシナリオ」を実験的に検証するのは適切ではない。後者の場合は強い重力相互作用の効果が表れるのに十分な値まで中間状態にある Kaluza-Klein 重力子の質量を積分できる。よって ADD 模型を用いて計算した Kaluza-Klein 重力子の生成過程の散乱断面積を用いて「大きい余剰次元のシナリオ」を検証できるのは \sqrt{s} と Λ_{New} が

$$\sqrt{s} \lesssim M_f < \Lambda_{\text{New}} \equiv \alpha M_f \quad (3.35)$$

の関係を満たす場合である。ここで α は $1 < \alpha < 10$ をとる適当な数である。本論文で考えて

¹例えばこの新しい理論が超弦理論である場合は $\Lambda_{\text{New}} = M_s$ (ストリングスケール) である。 M_s と M_f の関係は 6 個ある余剰次元の大きさによって決まる。

いる実験は LHC 加速器を用いた実験と ILC 加速器を用いた実験であり、これらの加速器の \sqrt{s} はそれぞれ 1TeV 程度²であるので $\sqrt{s} \lesssim M_f$ の関係は満たしている。

これより ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ は

$$\begin{aligned}
\sigma_\Gamma &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int \prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \right] \frac{\mathcal{M}_\Gamma \mathcal{M}_\Gamma^\dagger}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) \\
&\simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int \prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \right] \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} \left[\int_0^{\alpha M_f} dm_1 \int_0^{\alpha M_f} dm_2 \rho(m_1) \rho(m_2) [\mathcal{M}_\Gamma(m_1) \mathcal{M}_\Gamma^\dagger(m_2)] \right] \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) \\
&\equiv \int_0^{\alpha M_f} dm_1 \int_0^{\alpha M_f} dm_2 \rho(m_1) \rho(m_2) \sigma_\Gamma(m_1, m_2) \tag{3.36}
\end{aligned}$$

となる。ここで $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ は

$$\sigma_\Gamma(m_1, m_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int \prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \right] \frac{\mathcal{M}_\Gamma(m_1) \mathcal{M}_\Gamma^\dagger(m_2)}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) \tag{3.37}$$

である。先に式 (3.31) の質量積分を求めてから運動量積分を実行するのは困難であるので、まずは $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ を求めてから質量積分を実行する。式 (3.23) と式 (3.4)、式 (3.5) より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{M}_\Gamma(m_1) \mathcal{M}_\Gamma^\dagger(m_2) &= \left(\frac{\lambda}{M_p} \right)^2 \left(\frac{g}{M_p} \right)^2 \Delta(m_1, q) \Delta^*(m_2, q) (k_1 \cdot k_2)^2 p_1 \cdot p_2 \\
&= \left(\frac{\lambda}{M_p} \right)^2 \left(\frac{g}{M_p} \right)^2 \frac{1}{m_1^2 - q \cdot q - im\Gamma(m_1)} \frac{1}{m_2^2 - q \cdot q + im\Gamma(m_2)} (k_1 \cdot k_2)^2 p_1 \cdot p_2 \tag{3.38}
\end{aligned}$$

である。これを式 (3.37) に代入し運動量積分を実行すると $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ が求まる。式 (3.37) の運動量積分は終状態の粒子が 3 体であるため、4 元運動量の保存則を用いてそれぞれの粒子のとりうる運動量の範囲を求めながら運動量積分を実行しなければならない。このため 3.2.1 節で求めた、終状態が 2 体である過程の散乱断面積 $\sigma(m)$ の運動量積分よりも取扱いが複雑である。

²LHC 加速器は複合粒子である p と \bar{p} を $\sqrt{s} = 14\text{TeV}$ で衝突させるが、実際に相互作用する基本粒子 (クォーク) で見たときの \sqrt{s} は主に $1 \sim 2\text{TeV}$ 程度である。

式 (3.37) の運動量積分を実行すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Gamma}(m_1, m_2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{M_p} \right)^2 \left(\frac{g}{M_p} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^3 2^8 s} \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^2 + (m_1\Gamma(m_1) + m_2\Gamma(m_2))^2} \\
&\times \left[(m_2^2 - m_1^2) \left\{ \frac{1}{2} s^2 (m_2^2 - m_1^2) + s \left(m_1^2 (m_1^2 - \Gamma^2(m_1)) - m_2^2 (m_2^2 - \Gamma^2(m_2)) \right) \right. \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} m_1^2 \left(m_1^2 (m_1^2 - s) + \Gamma^2(m_1) (s - 3m_1^2) \right) \ln \left| \frac{m_1^4 + m_1^2 \Gamma^2(m_1)}{(s - m_1^2)^2 + m_1^2 \Gamma^2(m_1)} \right| \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2^2 \left(m_2^2 (m_2^2 - s) + \Gamma^2(m_2) (s - 3m_2^2) \right) \ln \left| \frac{m_2^4 + m_2^2 \Gamma^2(m_2)}{(s - m_2^2)^2 + m_2^2 \Gamma^2(m_2)} \right| \\
&\quad + m_1^3 \Gamma(m_1) (2s - 3m_1 + \Gamma^2(m_1)) \left(\text{Arctan} \left(\frac{m_1}{\Gamma(m_1)} \right) + \text{Arctan} \left(\frac{s - m_1^2}{m_1 \Gamma(m_1)} \right) \right) \\
&\quad \left. - m_2^3 \Gamma(m_2) (2s - 3m_2 + \Gamma^2(m_2)) \left(\text{Arctan} \left(\frac{m_2}{\Gamma(m_2)} \right) + \text{Arctan} \left(\frac{s - m_2^2}{m_2 \Gamma(m_2)} \right) \right) \right\} \\
&+ (m_1\Gamma(m_1) + m_2\Gamma(m_2)) \\
&\times \left\{ m_1\Gamma(m_1) \left(\frac{1}{2} s (s - 4m_1^2) + \frac{1}{2} m_1^2 (3m_1^2 - 2s - \Gamma^2(m_1)) \ln \left| \frac{m_1^4 + m_1^2 \Gamma^2(m_1)}{(s - m_1^2)^2 + m_1^2 \Gamma^2(m_1)} \right| \right. \right. \\
&\quad + \left(m_1\Gamma(m_1) (3m_1^2 - s) + \frac{m_1^3}{\Gamma(m_1)} (s - m_1^2) \right) \\
&\quad \left. \left. \times \left(\text{Arctan} \left(\frac{m_1}{\Gamma(m_1)} \right) + \text{Arctan} \left(\frac{s - m_1^2}{m_1 \Gamma(m_1)} \right) \right) \right) \right. \\
&+ m_2\Gamma(m_2) \left(\frac{1}{2} s (s - 4m_2^2) + \frac{1}{2} m_2^2 (3m_2^2 - 2s - \Gamma^2(m_2)) \ln \left| \frac{m_2^4 + m_2^2 \Gamma^2(m_2)}{(s - m_2^2)^2 + m_2^2 \Gamma^2(m_2)} \right| \right. \\
&\quad + \left(m_2\Gamma(m_2) (3m_2^2 - s) + \frac{m_2^3}{\Gamma(m_2)} (s - m_2^2) \right) \\
&\quad \left. \left. \times \left(\text{Arctan} \left(\frac{m_2}{\Gamma(m_2)} \right) + \text{Arctan} \left(\frac{s - m_2^2}{m_2 \Gamma(m_2)} \right) \right) \right) \right\} \quad (3.39)
\end{aligned}$$

となる。式 (3.39) の $\sigma_{\Gamma}(m_1, m_2)$ を式 (3.36) の最後の式

$$\sigma_{\Gamma} = \int_0^{\alpha M_f} dm_1 \int_0^{\alpha M_f} dm_2 \rho(m_1) \rho(m_2) \sigma_{\Gamma}(m_1, m_2) \quad (3.40)$$

に代入し、質量積分を実行すると σ_{Γ} が求まる。式 (3.40) の質量積分の値を解析的に求めるのは困難である。このため、散乱断面積 σ_{Γ} と σ の差を求める為に質量積分の被積分関数である $\sigma_{\Gamma}(m_1, m_2)$ を用いる。

3.3 散乱断面積 σ_Γ と σ の差

前節で求めた ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ と ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ を用いて、散乱断面積の差 $\sigma_\Gamma - \sigma$ を求める。式 (3.39) より $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ は関数型が複雑であり、 $\Gamma(m)$ に対する依存性がわかりにくい。また $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ と $\sigma(m)$ は引数が異なるためこのままでは差を求めることができない。このため以下では $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ を $m_1 = m_2$ の場合と $m_1 \neq m_2$ の場合に分け、それぞれの場合について $\Gamma(m)/m$ の冪で展開し σ_Γ と σ の差を求める。3.3.1 節ではまず $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ の $m_1 \neq m_2$ の部分を $\Gamma(m)/m$ の冪で展開し、 σ_Γ の $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ の $m_1 \neq m_2$ の部分からの寄与である $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ のオーダーを求める。次に 3.3.2 節では $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ の $m_1 = m_2$ の部分 $\sigma_\Gamma(m, m)$ を取り出し $\Gamma(m)/m$ の冪で展開し、 σ_Γ の $\sigma_\Gamma(m, m)$ からの寄与である $\sigma_\Gamma^{m_1 = m_2}$ のオーダーを求める。 ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ はこの $\sigma_\Gamma^{m_1 = m_2}$ に含まれる。最後に $\Gamma(m)/m$ の冪で展開した $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ を用いて散乱断面積 σ_Γ と σ の差を求める。

3.3.1 散乱断面積 σ_Γ に対する $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ の $m_1 \neq m_2$ の部分からの寄与

この節では $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ の $m_1 \neq m_2$ の部分を取り出し、 $\Gamma(m)/m$ の冪で展開する。 $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ の $m_1 \neq m_2$ の部分の質量積分を実行し求めた散乱断面積を $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ とすると、式 (3.40) と式 (3.39) より

$$\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2} = \int_0^{\alpha M_f} dm_1 \int_0^{m_1} dm_2 \rho(m_1) \rho(m_2) \sigma_\Gamma(m_1, m_2) \quad (3.41)$$

である。この散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ は $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ の、異なる質量を持つ ϕ_n の干渉項からの寄与を足し上げたものであり、 σ_Γ と σ の差をとる際に残る部分である。 $m_1 \neq m_2$ の場合異なる崩壊幅 $\Gamma(m_1)$ と $\Gamma(m_2)$ が $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ に含まれているので $\Gamma(m)$ を

$$\begin{aligned} \Gamma(m) &\equiv g^2 A(m) \\ &; A(m) = \frac{m^3}{(2\pi)^2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

とし g^2 の冪で展開する。 $\Gamma(m)/m \propto g^2$ であるので $\Gamma(m)/m \rightarrow 0$ の極限は $g^2 \rightarrow 0$ の極限に対応する。式 (3.39) より $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ は $(m_2^2 - m_1^2)$ に比例する部分と $(m_1\Gamma(m_1) + m_2\Gamma(m_2))$ に比例する部分に分けられる。 $m_1 \neq m_2$ の場合は $(m_1\Gamma(m_1) + m_2\Gamma(m_2))$ に比例する部分は g^2 の高次の項になり、 $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ ($m_1 \neq m_2$) の主要な寄与は $(m_2^2 - m_1^2)$ に比例する部分に含まれる。

式 (3.39) に含まれる関数をそれぞれ g^2 について展開すると

$$\frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^2 + (m_1\Gamma(m_1) + m_2\Gamma(m_2))^2} = \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^2 + g^4(m_1A(m_1) + m_2A(m_2))^2} \simeq \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^2} + \mathcal{O}(g^4) \quad (3.43)$$

$$\ln \left| \frac{m^4 + m^2\Gamma^2(m)}{(s - m^2)^2 + m^2\Gamma^2(m)} \right| = \ln \left| \frac{m^4 + m^2A^2(m)g^4}{(s - m^2)^2 + m^2A^2(m)g^4} \right| \simeq \ln \left| \frac{m^4}{(s - m^2)^2} \right| + \mathcal{O}(g^4) \quad (3.44)$$

$$\text{Arctan} \left(\frac{m}{\Gamma(m)} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{m}{A(m)g^2} \right) \simeq \frac{1}{2}\pi - \frac{A(m)}{m}g^2 + \mathcal{O}(g^4) \quad (3.45)$$

$$\text{Arctan} \left(\frac{s - m^2}{m\Gamma(m)} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{s - m^2}{m\Gamma(m)} \right) \simeq \frac{1}{2}\pi - \frac{mA(m)}{s - m^2}g^2 + \mathcal{O}(g^4) \quad (3.46)$$

である。これらの近似式と式 (3.13) の $\rho(m)$ を式 (3.41) に代入し、 g^2 の項までとると

$$\begin{aligned} \sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2} &\simeq \int_0^{\alpha M_f} dm_1 \int_0^{m_1} dm_2 \rho(m_1)\rho(m_2) \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{32^8 s}} \left(\frac{\lambda}{M_p} \right)^2 \left(\frac{g}{M_p} \right)^2 \\ &\times \left[\frac{1}{2}s^2 - s(m_2^2 + m_1^2) + \frac{1}{m_2^2 - m_1^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ -\frac{1}{2}m_1^4(m_1^2 - s) \ln \left| \frac{m_1^4}{(s - m_1^2)^2} \right| + \frac{1}{2}m_2^4(m_2^2 - s) \ln \left| \frac{m_2^4}{(s - m_2^2)^2} \right| \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{32^8 s}} \left(\frac{2\pi^{\frac{\delta}{2}}}{\Gamma[\frac{\delta}{2}]} \right)^2 \frac{\lambda^2 g^2}{M_f^{2\delta+4}} \int_0^{\alpha M_f} dm_1 m_1^{\delta-1} \int_0^{m_1} dm_2 m_2^{\delta-1} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2}s^2 - s(m_2^2 + m_1^2) + \frac{1}{m_2^2 - m_1^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ -\frac{1}{2}m_1^4(m_1^2 - s) \ln \left| \frac{m_1^4}{(s - m_1^2)^2} \right| + \frac{1}{2}m_2^4(m_2^2 - s) \ln \left| \frac{m_2^4}{(s - m_2^2)^2} \right| \right\} \right] \quad (3.47) \end{aligned}$$

が求まる。例として $\delta = 4$ の場合を考えると $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2} &\simeq \frac{1}{2} \frac{2\pi^4}{(2\pi)^{32^8 s}} \frac{\lambda^2 g^2}{M_f^{12}} \int_0^{\alpha M_f} dm_1 m_1^3 \int_0^{m_1} dm_2 m_2^3 \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2}s^2 - s(m_2^2 + m_1^2) + \frac{1}{m_2^2 - m_1^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ -\frac{1}{2}m_1^4(m_1^2 - s) \ln \left| \frac{m_1^4}{(s - m_1^2)^2} \right| + \frac{1}{2}m_2^4(m_2^2 - s) \ln \left| \frac{m_2^4}{(s - m_2^2)^2} \right| \right\} \right] \quad (3.48) \end{aligned}$$

となる。式 (3.47) の $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ は本来 σ_{Γ} の $\Gamma(m)/m$ の 1 次の項に対応する量であるが、そのオーダーは $\mathcal{O}(1/\bar{M}_p^2)$ ではなく $\mathcal{O}(\sqrt{s}^{2\delta+2}/M_f^{2\delta+4})$ である。本論文では $\sqrt{s} \simeq 1\text{TeV}$ と $M_f \simeq 1 \sim 5\text{TeV}$ の場合を考えているので、 $\mathcal{O}(\sqrt{s}^{2\delta+2}/M_f^{2\delta+4})$ は $\mathcal{O}(1/\bar{M}_p^2)$ に対して非常に大きい。これは $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ を求める際に中間状態で互いに干渉する非常に沢山の ϕ_n が足しあげられている為である。例として $\delta = 4$ で $M_f = 5\text{TeV}$ 、 $\sqrt{s} = 1\text{TeV}$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\left(\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}\right) &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{s}^{10}}{M_f^{12}}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{10^{-8}}{(\text{TeV})^2}\right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

である。 $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ のオーダーを ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ のオーダーと比較すると

$$\frac{\mathcal{O}\left(\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}\right)}{\mathcal{O}(\sigma)} = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{s}}{M_f}\right)^{\delta+2}\right) \quad (3.50)$$

である。 $\delta = 4$ で $M_f = 5\text{TeV}$ 、 $\sqrt{s} = 1\text{TeV}$ の場合を考えると $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ は σ の 10^{-4} 倍と小さい。これは $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ が異なる質量を持つ ϕ_n が中間状態で互いに量子力学的に干渉する効果を表す散乱断面積である為である。散乱断面積 σ は on-shell の状態にある ϕ_n を生成する過程の散乱断面積であり、摂動の次数の最低次の量 ($\mathcal{O}(\sqrt{s}^{2+\delta}/M_f^{2+\delta})$) であった。これに対し散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ は中間状態にある異なる質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項から寄与を足し上げた散乱断面積であり、量子力学的効果によって生じている量であるため摂動の次数の高次の量 ($\mathcal{O}(\sqrt{s}^{2+2\delta}/M_f^{4+2\delta})$) となっている。これは図 3.4 から分かる通り、 ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程が重力相互作用の頂点を 2 つ含む過程であることから理解できる。このため散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ と散乱断面積 σ のオーダーの比は $(\sqrt{s}/M_f)^{2+\delta}$ となり、 $\sqrt{s} < M_f$ の範囲では、散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ のオーダーは散乱断面積 σ のオーダーを越えて大きくなることはない。散乱断面積 σ_{Γ} と σ の差を求めると、2 つの散乱断面積の差としてこの $\mathcal{O}(\sqrt{s}^{2\delta+2}/M_f^{2\delta+4})$ である $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ が残る。 $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ の全体に g^2 が掛かっているので、 $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ の $g^2 \rightarrow 0$ の極限をとるとゼロになる。

3.3.2 散乱断面積 σ_{Γ} に対する $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ の寄与

この節では $\sigma_{\Gamma}(m_1, m_2)$ の $m_1 = m_2$ の部分 $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ を $\Gamma(m)/m$ の冪で展開し、散乱断面積 σ_{Γ} の $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ からの寄与である $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ のオーダーを求める。散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ には ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積である σ が含まれている。まず最初に $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ を $\Gamma(m)/m$ の冪で展開したとき、 $\Gamma(m)/m$ の 0 次の項が $\sigma(m)$ に一致する事を示す。次に $\sigma_{\Gamma}(m_1, m_2)$ から $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ を取り出し、 $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ の質量積分を実行して得られる $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ のオーダーを求める。

$\sigma_{\Gamma}(m, m)$ は中間状態を伝播する ϕ_n のそれぞれが干渉せずに伝播する過程の寄与と、同じ質量を持ち異なるベクトル \vec{n} で番号付けされている ϕ_n の干渉項からの寄与を含んでいる。このうち $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ の前者の部分には ϕ_n の崩壊過程を含まない質量 m を持つ ϕ_n の生成過程の散乱

断面積 $\sigma(m)$ が含まれており、この部分の質量積分を実行し得られた散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ には ϕ_n の崩壊の過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ が含まれている。この $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ を求める為には異なる \vec{n} で番号づけされた ϕ_n の干渉項を $\sigma_\Gamma(m, m)$ から落として質量積分を実行すればよい。 $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ に $\delta^{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$ を掛けて式 (3.40) の質量積分を実行すると、 $\sigma_\Gamma(m, m)$ から異なる \vec{n} で番号づけされた ϕ_n の干渉項を落として質量積分を実行することができる。ここで $\delta^{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$ は

$$\delta^{\vec{n}_1, \vec{n}_2} = \begin{cases} 1 & (\vec{n}_1 = \vec{n}_2) \\ 0 & (\vec{n}_1 \neq \vec{n}_2) \end{cases} \quad (3.51)$$

である。式 (3.36) の $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ に $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)\delta^{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$ を代入して求めた散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma^{\text{diag}} &= \sum_{0 < |\vec{n}_1| < \infty} \sum_{0 < |\vec{n}_2| < \infty} \sigma_\Gamma(m_1, m_2) \delta^{\vec{n}_1, \vec{n}_2} \\ &= \sum_{0 < |\vec{n}_1| < \infty} \sigma_\Gamma(m, m) \\ &\simeq \int_0^{\alpha M_f} dm \rho(m) \sigma_\Gamma(m, m) \end{aligned} \quad (3.52)$$

となる。ここで式 (3.39) より $\sigma_\Gamma(m, m)$ は

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma(m, m) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \left(\frac{g}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^3 2^8 s} \\ &\times \left[\frac{1}{2} s (s - 4m^2) + \frac{1}{2} m^2 (3m^2 - 2s - \Gamma^2(m)) \ln \left| \frac{m^4 + m^2 \Gamma^2(m)}{(s - m^2)^2 + m^2 \Gamma^2(m)} \right| \right. \\ &\left. + \left(m\Gamma(m) (3m^2 - s) + \frac{m^3}{\Gamma(m)} (s - m^2) \right) \left(\text{Arctan} \left(\frac{m}{\Gamma(m)} \right) + \text{Arctan} \left(\frac{s - m^2}{m\Gamma(m)} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

である。式 (3.39) より、 $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ は $(m_2^2 - m_1^2)$ に比例する部分と $(m_1\Gamma(m_1) + m_2\Gamma(m_2))$ に比例する部分に分けられるが、 $m_1 = m_2$ の場合は $(m_2^2 - m_1^2)$ に比例する部分はゼロとなり $(m_1\Gamma(m_1) + m_2\Gamma(m_2))$ に比例する部分のみが残る。式 (3.53) に含まれる関数を $\Gamma(m)/m$ で展開し $\Gamma(m)/m$ の 1 次の項までとると、 $\sigma_\Gamma(m, m)$ は

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma(m, m) &\simeq \frac{1}{(2\pi)^2 4} \left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{s - m^2}{s} \times \frac{1}{(2\pi)^2 6} \left(\frac{g}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{m^3}{\Gamma(m)} \\ &\times \frac{1}{\pi} \frac{m^2}{s - m^2} \left[\frac{s - m^2}{m^2} \pi + \frac{\Gamma(m)}{m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{s(s - 4m^2)}{m^4} - 1 + \frac{2s - 3m^2}{m^2} \ln \left| \frac{s - m^2}{m^4} \right| \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

となる。ここで散乱断面積 $\sigma(m)$ と崩壊幅 $\Gamma(m)$ はそれぞれ式 (3.19) と式 (3.29) より

$$\sigma(m) = \frac{1}{32\pi} \left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{s - m^2}{s} = \frac{1}{(2\pi)^2 4} \left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{s - m^2}{s} \quad (3.55)$$

$$\Gamma(m) = \left(\frac{g}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{m^3}{128\pi} = \frac{1}{(2\pi)^2 6} \left(\frac{g}{\bar{M}_p} \right)^2 m^3 \quad (3.56)$$

であるので、これを式 (3.54) に代入すると

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma(m, m) &\simeq \sigma(m) \\ &\times \left[1 + \frac{\Gamma(m)}{m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{s(s-4m^2)}{m^2(s-m^2)\pi} - \frac{m^2}{(s-m^2)\pi} + \frac{2s-3m^2}{(s-m^2)\pi} \ln \left| \frac{s-m^2}{m^4} \right| \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

となり、 $\sigma_\Gamma(m, m)$ の $\Gamma(m)/m$ の 0 次の項はちょうど $\sigma(m)$ に一致することが分かる。式 (3.57) の $\sigma_\Gamma(m, m)$ を式 (3.52) に代入すると $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma^{\text{diag}} &= \int_0^{\alpha M_f} dm \rho(m) \sigma(m) \\ &\times \left[1 + \frac{\Gamma(m)}{m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{s(s-4m^2)}{m^2(s-m^2)\pi} - \frac{m^2}{(s-m^2)\pi} + \frac{2s-3m^2}{(s-m^2)\pi} \ln \left| \frac{s-m^2}{m^4} \right| \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

となる。ここで $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ の $\Gamma(m)/m$ の 0 次の項を取り出すと

$$\sigma_\Gamma^{\text{diag}} \simeq \int_0^{\alpha M_f} dm \rho(m) \sigma(m) \quad (3.59)$$

である。この式を式 (3.15) の ϕ_n の崩壊の過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ と比較すると質量積分の積分範囲が異なっている事が分かる。式 (3.59) の質量積分の積分範囲が $0 < m < \alpha M_f$ であるのに対し式 (3.15) の質量積分の積分範囲は $0 < m < \sqrt{s}$ である。このため $\sigma_\Gamma(m, m)$ の $\Gamma(m)/m$ の 0 次の項は $\sigma(m)$ と一致するのに対し、 $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ の $\Gamma(m)/m$ の 0 次の項は σ と一致しない。

これは ϕ_n の崩壊の過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ を求める際に質量積分の積分範囲の上限値 αM_f を cut off として手で置いてしまったことに原因がある。 ϕ_n の崩壊の過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ を求める際には質量積分の積分範囲の上限値 \sqrt{s} が 4 元運動量の保存則と on-shell 条件から決まっていたのに対し、 ϕ_n の崩壊の過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ を求める際には余剰次元方向の運動量が保存しない為に質量積分の積分範囲の上限値が得られなかった。本論文では \sqrt{s} と αM_f の大小関係は $\sqrt{s} \lesssim M_f < \alpha M_f$ の場合を考えているので、式 (3.59) の $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ の $\Gamma(m)/m$ の 0 次の項に式 (3.15) の σ は含まれている。 ϕ_n の崩壊幅 $\Gamma(m)$ が $\mathcal{O}(m^3/\bar{M}_p^2)$ と小さい為、式 (3.58) の質量積分の $\sqrt{s} < m < \alpha M_f$ からの寄与は $\mathcal{O}(1/M_p^2)$ と非常に小さい。このため $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ は σ に対し良い近似となっている。すなわち

$$\sigma_\Gamma^{\text{diag}} - \sigma = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\bar{M}_p^2}\right) \quad (3.60)$$

である。

$\sigma_\Gamma(m, m)$ の $\Gamma(m)/m$ の 1 次の項は、中間状態にある ϕ_n がとりうる 4 元運動量が on-shell 条件を満たす 4 元運動量からずれていることによって生じている $\sigma(m)$ に対する補正項である。 ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程では ϕ_n が終状態にあるため、 ϕ_n は必ず on-shell 条件を満たす 4 元運動量を持つ。これに対し ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程は ϕ_n が中間状態にあるため、 ϕ_n の 4 元運動量は一般には on-shell 条件を満たさず on-shell 条件を満たす値を中心に崩壊幅 $\Gamma(m)$ に比例した広がりを持った値をとる。これは式 (3.24) にある中間状態を伝播する ϕ_n

に対応する Feynmann 伝播関数の分母に崩壊幅 $\Gamma(m)$ が入っている為である。 ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程に比べ ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程では ϕ_n のとりうる 4 元運動量の範囲が大きくなる為、 ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 $\sigma_\Gamma(m, m)$ は ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 $\sigma(m)$ よりも大きくなり、その補正項は崩壊幅 $\Gamma(m)$ に比例する。この補正項のオーダーは $\mathcal{O}((\sqrt{s}^{2+\delta}/M_f^{2+\delta}\bar{M}_p^2)$ と小さく $\Gamma(m)/m \rightarrow 0$ の極限をとるとゼロとなる。

次に $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ から $\sigma_\Gamma(m, m)$ を取り出し、 $\sigma_\Gamma(m, m)$ の質量積分を実行して得られる $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ のオーダーを求める。 $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ から $\sigma_\Gamma(m, m)$ を取り出すためには $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ に $\delta(n_1 - n_2)$ ($n_i = |\vec{n}_i|$) を掛けて式 (3.40) の質量積分を実行すればよい。式 (3.40) の $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ に $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)\delta(n_1 - n_2)$ を代入すると

$$\sigma_\Gamma^{m_1=m_2} = \int_0^{\alpha M_f} dm_1 \int_0^{\alpha M_f} dm_2 \rho(m_1)\rho(m_2) \sigma_\Gamma(m_1, m_2)\delta(n_1 - n_2) \quad (3.61)$$

となる。ここで $m = |\vec{n}|/R$ より、質量積分をベクトル \vec{n} の大きさ n についての積分に変換すると

$$\sigma_\Gamma^{m_1=m_2} = \int_0^{\alpha M_f R} dn_1 \int_0^{\alpha M_f R} dn_2 \rho(n_1)\rho(n_2) \sigma_\Gamma(m_1, m_2)\delta(n_1 - n_2) \quad (3.62)$$

$$(n_i = |\vec{n}_i|)$$

となる。ここで $\rho(n)$ は

$$\begin{aligned} \rho(n) &= \frac{2\pi^{\frac{\delta}{2}}}{\Gamma[\frac{\delta}{2}]} m^{\delta-1} R^{\delta-1} \\ &= \rho(m) \times \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (3.63)$$

であり、 $\rho(n)$ は質量 $|\vec{n}|/R$ を持つ ϕ_n の個数を表す無次元の量である。式 (3.62) の n_1 についての積分を実行すると $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma^{m_1=m_2} &= \int_0^{\alpha M_f R} dn \rho^2(n) \sigma_\Gamma(m, m) \\ &= \int_0^{\alpha M_f} dm R \rho^2(m) \times \frac{1}{R^2} \sigma_\Gamma(m, m) \end{aligned} \quad (3.64)$$

となる。式 (3.64) の $\sigma_\Gamma(m, m)$ に式 (3.57) の $\Gamma(m)/m$ で展開した $\sigma_\Gamma(m, m)$ を代入すると $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma^{m_1=m_2} &= \int_0^{\alpha M_f} dm \rho^2(m) \times \frac{1}{R} \\ &\quad \times \sigma(m) \left[1 + \frac{\Gamma(m)}{m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{s(s-4m^2)}{m^2(s-m^2)\pi} - \frac{m^2}{(s-m^2)\pi} + \frac{2s-3m^2}{(s-m^2)\pi} \ln \left| \frac{s-m^2}{m^4} \right| \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 4} \left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \int_0^{\alpha M_f} dm \rho^2(m) \times \frac{1}{R} \\ &\quad \times \frac{s-m^2}{s} \left[1 + \frac{\Gamma(m)}{m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{s(s-4m^2)}{m^2(s-m^2)\pi} - \frac{m^2}{(s-m^2)\pi} + \frac{2s-3m^2}{(s-m^2)\pi} \ln \left| \frac{s-m^2}{m^4} \right| \right] \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

となる。ここで式 (2.27) より

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{M_f^{2+\delta}}{\bar{M}_p^2} \right)^{\frac{1}{\delta}} \quad (3.66)$$

となるので、式 (3.13) の $\rho(m)$ と式 (3.66) を式 (3.65) に代入すると

$$\begin{aligned} \sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{2\pi^{\frac{\delta}{2}}}{\Gamma[\frac{\delta}{2}]} \right)^2 \frac{\lambda^2 \bar{M}_p^2}{M_f^{2\delta+4}} \left(\frac{M_f^{2+\delta}}{\bar{M}_p^2} \right)^{\frac{1}{\delta}} \int_0^{\alpha M_f} dm (m^{\delta-1})^2 \\ &\times \frac{s-m^2}{s} \left[1 + \frac{\Gamma(m)}{m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{s(s-4m^2)}{m^2(s-m^2)\pi} - \frac{m^2}{(s-m^2)\pi} + \frac{2s-3m^2}{(s-m^2)\pi} \ln \left| \frac{s-m^2}{m^4} \right| \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

が求まる。例として $\delta = 4$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} \sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2} &= \frac{2\pi^4}{(2\pi)^2} \frac{\lambda^2 \bar{M}_p^{\frac{3}{2}}}{M_f^{\frac{21}{2}}} \int_0^{\alpha M_f} dm m^6 \\ &\times \frac{s-m^2}{s} \left[1 + \frac{\Gamma(m)}{m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{s(s-4m^2)}{m^2(s-m^2)\pi} - \frac{m^2}{(s-m^2)\pi} + \frac{2s-3m^2}{(s-m^2)\pi} \ln \left| \frac{s-m^2}{m^4} \right| \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

となる。 $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ のオーダーは

$$\mathcal{O}(\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}) = \mathcal{O} \left(\frac{\bar{M}_p^{-2-\frac{2}{\delta}}}{M_f^{2(2+\delta)-\frac{2+\delta}{\delta}}} \sqrt{s}^{2\delta-1} \right) \quad (3.69)$$

であり、 $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ の係数に $\bar{M}_p^{-2-2/\delta}$ が入っているため $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ のオーダーは非常に大きい。例として $\delta = 4$ で $M_f = 5\text{TeV}$ 、 $\sqrt{s} = 1\text{TeV}$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}) &= \frac{\bar{M}_p^{\frac{3}{2}}}{M_f^{\frac{21}{2}}} \sqrt{s}^7 \\ &= \mathcal{O} \left(\frac{10^{15}}{(\text{TeV})^2} \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

となる。 ϕ_n の崩壊の過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ のオーダーと比較すると

$$\frac{\mathcal{O}(\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2})}{\mathcal{O}(\sigma)} = \mathcal{O} \left(\frac{\bar{M}_p^{-2-\frac{2}{\delta}}}{M_f^{(2+\delta)(1-\frac{1}{\delta})}} \sqrt{s}^{\delta-1} \right) \quad (3.71)$$

である。例として $\delta = 4$ 、 $M_f = 5\text{TeV}$ 、 $\sqrt{s} = 1\text{TeV}$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}(\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2})}{\mathcal{O}(\sigma)} &= \mathcal{O} \left(\frac{\bar{M}_p^{\frac{3}{2}}}{M_f^{\frac{9}{2}}} \sqrt{s}^3 \right) \\ &= \mathcal{O}(10^{20}) \end{aligned} \quad (3.72)$$

となり、散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ のオーダーは散乱断面積 σ のオーダーの 10^{20} 倍と非常に大きくなっている。さらに式 (3.67) を見ると分かる通り $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ の $\Gamma(m)/m$ の 0 次の項は g^2 に比例せず、 $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ の $g^2 \rightarrow 0$ の極限をとっても $\bar{M}_p^{2-2/\delta}$ に比例する項が残る。

$\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ の $\Gamma(m)/m$ の 0 次の項のオーダーが ϕ_n の崩壊の過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ のオーダーの $\mathcal{O}\left(\bar{M}_p^{2-2/\delta} \sqrt{s}^{\delta-1} / M_f^{(2+\delta)(1-1/\delta)}\right)$ 倍と非常に大きくなっている原因は散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ が同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの寄与を含んでいる為である。質量 $m = |\vec{n}|/R$ を持つ ϕ_n の個数は式 (3.63) より $\rho(n)$ 個であった。散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ は $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ の質量積分を実行して得られるが、式 (3.57) より $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ は $\Gamma(m)/m$ の 0 次の項として質量 m を持つ ϕ_n の生成過程の散乱断面積 $\sigma(m)$ を含み

$$\sigma_{\Gamma}(m, m) - \sigma(m) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\bar{M}_p^2}\right) \quad (3.73)$$

を満たしていた。これより $\sigma_{\Gamma}(m, m) \simeq \sigma(m)$ であり、式 (3.64) の $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ に $\sigma(m)$ を代入すると $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ は

$$\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2} \simeq \int_0^{\alpha M_f R} dn \rho^2(n) \sigma(m) \quad (3.74)$$

となる。これに対し σ は、式 (3.15) の $\sigma(m)$ の質量積分の式を n についての積分に直すと

$$\sigma = \int_0^{\sqrt{s}R} dn \rho(n) \sigma(m) \quad (3.75)$$

となる。式 (3.74) と式 (3.75) を比べると ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積である σ を求める際の質量積分の被積分関数が $\rho(n)\sigma(m)$ であるのに対し $\sigma_{\Gamma}^{m_1=m_2}$ を求める際の被積分関数は $\rho^2(n)\sigma(m)$ となっている。これは Toy model に同じ質量を持つ ϕ_n が $\rho(n)$ 個含まれている為である。粒子が 1 個のみ中間状態を伝播する過程と同じ質量を持ち同じ相互作用をする粒子が複数個中間状態を伝播する過程を比較すると、中間状態を伝播する粒子の数だけ Feynmann 図が増えるので、前者の過程の不変散乱振幅に対し後者の過程の不変散乱振幅は粒子の個数倍される。例えば同じ質量を持ち同じ相互作用をする粒子が 10 個中間状態を伝播する過程の不変散乱振幅は粒子が 1 個だけ中間状態を伝播する過程の不変散乱振幅の 10 倍である。散乱断面積を求める際に不変散乱振幅の絶対値の 2 乗を用いるので、散乱断面積で比較すると粒子が 10 個中間状態を伝播する過程の散乱断面積は粒子が 1 個だけ中間状態を伝播する過程の散乱断面積の 100 倍となる。中間状態を伝播する粒子の個数が 10 倍になると散乱断面積は 10^2 倍になるのである。Toy model の場合で考えると質量 $m = |\vec{n}|/R$ を持つ ϕ_n の個数は $\rho(n)$ 個である。質量 m を持つ ϕ_n の内 1 個が中間状態を伝播する過程の不変散乱振幅が $\mathcal{M}_{\Gamma}(m)$ であるとする、質量 m を持つ ϕ_n の全てが中間状態を伝播する場合の不変散乱振幅は $\mathcal{M}_{\Gamma}(m)$ の $\rho(n)$ 倍である $\rho(n)\mathcal{M}_{\Gamma}(m)$ になる。さらに不変散乱振幅の 2 乗を求めると $\rho^2(n) \left[\mathcal{M}_{\Gamma}(m)\mathcal{M}_{\Gamma}^{\dagger}(m) \right]$ となり、質量 m を持つ ϕ_n の内 1 個が中間状態を伝播する過程の散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}(m, m)$ に対し質量 m を持つ ϕ_n の全てが中間状態を伝播する過程の散乱断面積は $\sigma_{\Gamma}(m)$ の $\rho^2(n)$ 倍である $\rho^2(n)\sigma_{\Gamma}(m, m) \simeq \rho^2(n)\sigma(m)$ となる。この散乱断面積 $\rho^2(n)\sigma(m)$ の内 $\rho(n)(\rho(n) - 1)\sigma_{\Gamma}(m)$ は同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの寄与を表す散乱断面積であり、残りの散乱断面積 $\rho(n)\sigma(m)$ はそれぞれの ϕ_n が干渉せ

ずに伝播する過程の散乱断面積に対応する。これに対し ϕ_n が終状態にあり ϕ_n 同士が量子力学的に干渉しない場合は、終状態に表れる粒子の個数が $\rho(n)$ 倍されると散乱断面積が $\rho(n)$ 倍されるので、1個の ϕ_n が終状態にある過程の散乱断面積を $\sigma(m)$ すると $\rho(n)$ の ϕ_n が終状態にある過程の散乱断面積は $\rho(n)\sigma(m)$ となる。質量積分下にある質量 m は $\mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(\sqrt{s})$ であるので質量積分の被積分関数が $\rho(n = mR)$ 倍されると積分結果は $\mathcal{O}(\rho(n = \sqrt{s}R))$ 倍され、式 (3.74) と式 (3.75) の散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ と σ_Γ の比をとると

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}}{\sigma} &= \mathcal{O}(\rho(n = \sqrt{s}R)) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\bar{M}_p^{2-\frac{2}{\delta}}}{M_f^{(2+\delta)(1-\frac{1}{\delta})}} \sqrt{s}^{\delta-1}\right) \end{aligned} \quad (3.76)$$

となる事が分かる。

3.3.3 散乱断面積 σ_Γ と σ の差のオーダー

3.3.1 節と 3.3.2 節より散乱断面積 σ_Γ の $m_1 \neq m_2$ の場合の $\sigma_\Gamma(m_1, m_2)$ からの寄与である $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ のオーダーと散乱断面積 σ_Γ の $\sigma_\Gamma(m, m)$ からの寄与である $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ のオーダーが求まった。これらの散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ と $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ を用いて ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ と ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ の差を求める。ここで散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ と $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ は

$$\sigma_\Gamma = \sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2} + \sigma_\Gamma^{m_1=m_2} \quad (3.77)$$

の関係を満たしており、散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ には中間状態にある ϕ_n 全てがそれぞれ干渉せずに伝播する過程の散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ が含まれていた。式 (3.60) より $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ は

$$\sigma_\Gamma^{\text{diag}} - \sigma = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\bar{M}_p^2}\right) \quad (3.78)$$

の関係を満たしている。

散乱断面積 σ_Γ と σ の差を求めると、2つの散乱断面積の差として $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ と $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2} - \sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ が残る。すなわち

$$\sigma_\Gamma - \sigma = \sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2} + \sigma_\Gamma^{m_1=m_2} - \sigma_\Gamma^{\text{diag}} \quad (3.79)$$

である。散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ のオーダーは ϕ_n 崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積である σ のオーダーと等しく、 $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ のオーダーと比べると式 (3.71) にあるように非常に小さい。このため $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2} - \sigma_\Gamma^{\text{diag}} \simeq \sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ とできる。散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ のオーダーと散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ のオーダーはそれぞれ $\mathcal{O}(\sqrt{s}^{2\delta+2}/M_f^{2\delta+4})$ と $\mathcal{O}(\bar{M}_p^{2-2/\delta} \sqrt{s}^{2\delta-1}/M_f^{(2+\delta)(2-1/\delta)})$ であったので $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2} \ll \sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ である。この為散乱断面積 σ_Γ と σ の差として残る主な量は $\sigma_\Gamma^{m_1=m_2}$ であり、

$$\sigma_\Gamma - \sigma \simeq \sigma_\Gamma^{m_1=m_2} \quad (3.80)$$

となる。これより2つの散乱断面積の差のオーダーを求めると

$$\mathcal{O}(\sigma_\Gamma - \sigma) = \mathcal{O}\left(\frac{\bar{M}_p^{2-\frac{2}{\delta}}}{M_f^{2(2+\delta)-\frac{2+\delta}{\delta}}} (\sqrt{s})^{2\delta-1}\right) \quad (3.81)$$

となり、2つの散乱断面積 σ_Γ と σ の間には $\mathcal{O}(1/\bar{M}_p^2)$ ではない $\mathcal{O}(\bar{M}_p^{2-2/\delta} \sqrt{s}^{2\delta-1}/M_f^{(2+\delta)(2-1/\delta)})$ の大きな差が生じていることが分かった。3.3.2節で見た通り、この差は ϕ_n が崩壊しない極限に対応する $g^2 \rightarrow 0$ の極限をとってもゼロとならない。2つの散乱断面積 σ_Γ と σ の比をとると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\left(\frac{\sigma_\Gamma}{\sigma}\right) &= \frac{\mathcal{O}(\sigma_\Gamma^{m_1=m_2})}{\mathcal{O}(\sigma)} \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\bar{M}_p^{2-\frac{2}{\delta}}}{M_f^{(2+\delta)(1-\frac{1}{\delta})}} \sqrt{s}^{\delta-1}\right) \end{aligned} \quad (3.82)$$

3.4 散乱断面積 σ_Γ と σ の間に生じている差の物理的意味

前節では2つの散乱断面積 σ_Γ と σ の差 $\sigma_\Gamma - \sigma$ と2つの散乱断面積 σ_Γ と σ の比のオーダー $\mathcal{O}(\sigma_\Gamma/\sigma)$ を求め

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma - \sigma &\simeq \sigma_\Gamma^{m_1=m_2} \\ \mathcal{O}\left(\frac{\sigma_\Gamma}{\sigma}\right) &= \frac{\mathcal{O}(\sigma_\Gamma^{m_1=m_2})}{\mathcal{O}(\sigma)} \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\bar{M}_p^{2-\frac{2}{\delta}}}{M_f^{(2+\delta)(1-\frac{1}{\delta})}} \sqrt{s}^{\delta-1}\right) \end{aligned}$$

となった。これより ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ が ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ の $\mathcal{O}\left(\bar{M}_p^{2-2/\delta} \sqrt{s}^{\delta-1}/M_f^{(2+\delta)(1-1/\delta)}\right)$ 倍の大きさを持ち、2つの散乱断面積 σ_Γ と σ の差が $g^2 \rightarrow 0$ の極限をとってもゼロとならないという結果を得た。この結果は物理的には理解しがたい結果である。何故ならば散乱断面積 σ_Γ は ϕ_n の生成過程

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\phi_n$$

に ϕ_n の崩壊過程

$$\phi_n \rightarrow \chi'\chi'$$

を加えた過程

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\chi'\chi'$$

であり、 $g^2 \rightarrow 0$ の極限をとれば ϕ_n は崩壊しなくなるので、この2つの ϕ_n の生成過程の散乱断面積は $g^2 \rightarrow 0$ の極限の元で一致するはずであるからだ。 $g^2 \rightarrow 0$ の極限で2つの散乱断面積 σ_Γ と σ が一致するためには散乱断面積 σ_Γ と σ の比が

$$\frac{\sigma_\Gamma}{\sigma} = 1 \quad (3.83)$$

であり、散乱断面積 σ_Γ と σ の差が g^2 に比例しなければならない。この節では ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ と ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ の間の対応関係を考え、2つの散乱断面積 σ_Γ と σ の間に生じている大きな差の物理的意味を考える。

通常、on-shell の状態にある崩壊する粒子を生成する過程の散乱断面積 σ は崩壊過程まで含む崩壊する粒子の生成過程の散乱断面積 σ_Γ に対し誤差が $\mathcal{O}(\Gamma_{\text{total}}/m)$ の近似になっている。これは2つの過程の違いが、崩壊する粒子が on-shell の状態にあるか否かの違いのみである為である。崩壊過程まで含む崩壊する粒子の生成過程の散乱断面積を求める際に cutting rules³ を用いて中間状態にある崩壊する粒子の4元運動量を on-shell 条件を満たす4元運動量に制限して散乱断面積を求めると、求めた散乱断面積は on-shell の状態にある崩壊する粒子の生成過程の散乱断面積と一致する。さらに、cutting rules を求めた散乱断面積は崩壊過程まで含む崩壊する粒子の生成過程の散乱断面積の $\Gamma_{\text{total}} \rightarrow 0$ の極限に一致する。これは中間状態にある崩壊する粒子の4元運動量の on-shell の状態からのズレがその粒子の崩壊幅 Γ_{total} によって決まっている為である。崩壊幅 Γ_{total} がゼロであれば中間状態にある崩壊する粒子は on-shell 条件を満たす運動量のみをとる。このため on-shell の状態にある崩壊する粒子を生成する過程の散乱断面積 σ と崩壊過程まで含む崩壊する粒子の生成過程の散乱断面積 σ_Γ の間には

$$\lim_{\Gamma_{\text{total}} \rightarrow 0} \sigma_\Gamma = \sigma \quad (3.84)$$

の関係が成立ち、

$$\sigma_\Gamma - \sigma = \mathcal{O}\left(\frac{\Gamma_{\text{total}}}{\sqrt{s^2} m}\right) \quad (3.85)$$

となる。ここで m は崩壊する粒子の質量である。Kaluza-Klein 重力子の崩壊幅 Γ が $\mathcal{O}(m^3/\bar{M}_p^2)$ と小さい為、式 (3.85) より4章の冒頭で述べた式 (3.1) で表される Mirabelli らの予想が理解できる。

しかし Toy model を用いて求めた ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ には上の議論が適用できない。何故なら、散乱断面積 σ_Γ は式 (3.84) を満たさないからだ。 ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積を求める際に、中間状態にある ϕ_n の4元運動量を on-shell 条件を満たす4元運動量に制限して求めた散乱断面積は on-shell の状態にある ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ と一致するが、散乱断面積 σ_Γ の $\Gamma \rightarrow 0$ の極限は散乱断面積 σ と一致しないのである。これは ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ が同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項の寄与を含んでいる為である。この干渉項からの寄与は on-shell の状態にある ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ の大きさを大きく超えている。

通常、異なる粒子同士の干渉項からの寄与を表す散乱断面積の大きさがそれぞれの粒子が干渉せずに中間状態を伝播する過程の散乱断面積の大きさよりも大きくなることはあり得ない。これは異なる粒子同士の干渉が量子力学的な不確定性によって生じている現象である為である。異なる粒子同士の干渉項からの寄与を表す散乱断面積は、それぞれの粒子が干渉せずに中間状態を伝播する過程の散乱断面積に対し摂動の高次の量となる。例えば式 (3.47) で求めた異なる質量を持つ ϕ_n の干渉項からの寄与である散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ は摂動の次数の高

³cutting rules 及びに cutting rules を用いた散乱断面積の計算方法の詳細は付録 A に記す。

次の量 ($\mathcal{O}(\sqrt{s}^{2+2\delta}/M_f^{4+2\delta})$) となっていた。これに対し ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ は摂動の次数の最低次の量 ($\mathcal{O}(\sqrt{s}^{2+\delta}/M_f^{2+\delta})$) であった。この為 $\sigma_{\Gamma}^{m_1 \neq m_2}$ は σ の大きさを超えて大きくなることは無かった。これに対し $\sigma_{\Gamma}^{m_1 = m_2}$ は摂動の次数の最低次の量 ($\mathcal{O}(\sqrt{s}^{2+\delta}/M_f^{2+\delta})$) であり、さらに $\sigma_{\Gamma}^{m_1 = m_2}$ の大きさは同じく摂動の次数の最低次の量である σ の大きさを大きく超えている。これは中間状態にある同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの寄与である散乱断面積 $\rho(n)(\rho(n) - 1)\sigma_{\Gamma}(m, m)$ が中間状態にある ϕ_n がそれぞれ干渉せずに伝播する過程の散乱断面積 $\rho(n)\sigma_{\Gamma}(m, m)$ に対し摂動の次数の高次の量となっていない為である。同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの寄与である散乱断面積 $\rho(n)(\rho(n) - 1)\sigma_{\Gamma}(m)$ の大きさは ϕ_n がそれぞれ干渉せずに伝播する過程の散乱断面積 $\rho(n)\sigma_{\Gamma}(m)$ よりも大きくなっている。

ADD 模型の 4 次元有効理論では同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉の効果を変える粒子同士の干渉の効果として正しく取り扱う事ができない。これは 4 次元有効理論では同じ質量を持ち同じ相互作用をする粒子は区別がつかず同一の粒子と見なされる為である。Toy model に含まれる同じ質量を持つ $\rho(n)$ 個の ϕ_n は区別がつかず、全て同一の粒子と見なされる。この為、中間状態にある ϕ_n がそれぞれ干渉せずに伝播する過程からの寄与と中間状態にある同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの寄与は区別がつかず、純粋に中間状態にある ϕ_n がそれぞれ干渉せずに伝播する過程の散乱断面積の $\rho(n)$ 倍の大きさを持ってしまう。よって、異なる質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの寄与とは異なり同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの寄与は摂動の次数の高次の量となっていない。この同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの寄与により、散乱断面積 σ_{Γ} の大きさは on-shell の状態にある ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ の大きさの $\mathcal{O}\left(\bar{M}_p^{2-2/\delta} \sqrt{s}^{\delta-1}/M_f^{(2+\delta)(1-1/\delta)}\right)$ 倍となり、散乱断面積 σ_{Γ} の $\Gamma \rightarrow 0$ の極限をとっても散乱断面積 σ に一致しなくなっている。

同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの寄与を表す散乱断面積 $\rho(n)(\rho(n) - 1)\sigma_{\Gamma}(m)$ は ADD 模型の 4 次元有効理論を求める際の理論的問題によって生じている量であり、物理的な意味を持たない量だと考えることができる。ADD 模型の 4 次元有効理論における等しい絶対値 n を持つベクトル \vec{n} で番号付けされた Kaluza-Klein 重力子は、元の $4+\delta$ 次元の理論の余剰次元方向に大きさが等しく向きが異なる運動量を持った高次元重力子に対応している。 $4+\delta$ 次元の理論では大きさが等しく向きが異なる運動量を持った高次元重力子は互いに区別できるが、4 次元有効理論ではこれらの高次元重力子が同じ質量を持ち同じ相互作用をする Kaluza-Klein 重力子として取り扱われ、互いに区別することができなくなってしまう。この為、大きさが等しく向きが異なる運動量を持った高次元重力子が中間状態で量子力学的に干渉する現象が 4 次元有効理論では互いに区別できない同一粒子の干渉現象として扱われてしまい、求めた散乱断面積が物理的な意味を持たない非常に大きな散乱断面積となってしまう。

実際の実験で観測される散乱断面積との比較に用いる為、この 4 次元有効理論を求める際に発生する理論的問題を回避しながら Kaluza-Klein 重力子が中間状態を伝播する過程の散乱断面積を求める為には、同じ質量を持つ Kaluza-Klein 重力子の干渉項からの寄与を取り除いて散乱断面積を求める事が必要である。最も単純な方法としては、同じ質量を持つ Kaluza-Klein 重力子同士の干渉項からの寄与を手で落として散乱断面積を求める方法が考えられる。今回議論した Toy model の過程

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\chi'\chi'$$

の場合では、3.3.2 節の議論より散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{m_1 = m_2}$ から同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの

寄与を取り除いた散乱断面積は $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ であった。このため散乱断面積 $\sigma_\Gamma = \sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2} + \sigma_\Gamma^{m_1 = m_2}$ の代わりに新たな散乱断面積 $\tilde{\sigma}_\Gamma$ を

$$\tilde{\sigma}_\Gamma \equiv \sigma_\Gamma^{\text{diag}} + \sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2} \quad (3.86)$$

と定義する。この散乱断面積 $\tilde{\sigma}_\Gamma$ は丁度、散乱断面積 σ_Γ から同じ質量を持つ ϕ_n 同士の干渉項からの寄与を取り除いた散乱断面積となっている。3.3節の議論より散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}$ と $\sigma_\Gamma^{\text{diag}}$ は

$$\lim_{g^2 \rightarrow 0} \sigma_\Gamma^{\text{diag}} = \sigma$$

$$\lim_{g^2 \rightarrow 0} \sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2} = 0$$

を満たしており、式 (3.58) と式 (3.50) より

$$\sigma_\Gamma^{\text{diag}} \simeq \sigma$$

$$\frac{\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}}{\sigma} = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{s}}{M_f}\right)^{\delta+2}\right)$$

である。よって新たに定義した散乱断面積 $\tilde{\sigma}_\Gamma$ は $\sqrt{s} < M_f$ の範囲で

$$\lim_{g^2 \rightarrow 0} \tilde{\sigma}_\Gamma = \sigma \quad (3.87)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_\Gamma}{\sigma} = 1 \quad (3.88)$$

という性質を持つ。これらの性質は ϕ_n の生成過程

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\phi_n$$

に ϕ_n の崩壊過程

$$\phi_n \rightarrow \chi'\chi'$$

を加えた過程の散乱断面積の性質として望ましい性質である。よって ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積として物理的に意味のある散乱断面積は散乱断面積 σ_Γ ではなく散乱断面積 $\tilde{\sigma}_\Gamma$ であると考えられる。

この散乱断面積 $\tilde{\sigma}_\Gamma$ を用いて ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 $\tilde{\sigma}_\Gamma$ と ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ の差を求めると

$$\tilde{\sigma}_\Gamma - \sigma \simeq \sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2} \quad (3.89)$$

であり、その大きさは

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\tilde{\sigma}_\Gamma - \sigma) &= \mathcal{O}\left(\sigma_\Gamma^{m_1 \neq m_2}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{s}^{2+2\delta}}{M_f^{4+2\delta}}\right) \end{aligned} \quad (3.90)$$

となる。これは摂動論の手法を用いて求めた散乱断面積の差として望ましい結果である。 ϕ_n の生成過程が $\sqrt{s}^{2+\delta}/M_f^{2+\delta}$ の冪の1次の量であったのに対し2つの散乱断面積の差は $\sqrt{s}^{2+\delta}/M_f^{2+\delta}$ の冪の2次の量になっており、 ϕ_n の生成過程に ϕ_n の崩壊過程を加えた事による散乱断面積の変化が元の過程の散乱断面積に対し摂動の次数の高次の量となっている。

式(3.90)で求めた2つの散乱断面積の差は式(3.1)のMirabelliらの予想とは異なり、 $1/\bar{M}_p^2$ を係数に持たない大きな差である。例として $\delta = 4$ で $M_f = 5\text{TeV}$ 、 $\sqrt{s} = 1\text{TeV}$ の場合を考えると $\tilde{\sigma}_\Gamma - \sigma$ の大きさは

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\tilde{\sigma}_\Gamma - \sigma) &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{s}^{10}}{M_f^{12}}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{10^{-8}}{(\text{TeV})^2}\right)\end{aligned}\quad (3.91)$$

となる。これに対し散乱断面積 σ の大きさは

$$\mathcal{O}(\sigma) = \mathcal{O}\left(\frac{10^{-4}}{(\text{TeV})^2}\right)\quad (3.92)$$

となるので、 $M_f = 5\text{TeV}$ に対し $\sqrt{s} = 1\text{TeV}$ の場合は2つの散乱断面積の差 $\tilde{\sigma}_\Gamma - \sigma$ の大きさは散乱断面積 σ の大きさの1/1000程度となる。2つの散乱断面積の差は $\sqrt{s}^{2+2\delta}$ に比例する為、 \sqrt{s} が大きくなり M_f に近付くにつれて散乱断面積 $\tilde{\sigma}_\Gamma$ は散乱断面積 σ に対し大きくなる。

第4章 結論

今回の研究により、Kaluza-Klein 重力子の生成過程に Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を加えた過程の散乱断面積を求める際に生じる、新たな理論的な問題を発見した。既に知られていた問題は Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程の散乱断面積が発散する問題である。これは ADD 模型の余剰次元方向の運動量の非保存の問題に由来する問題であった。これに対し今回新たに発見した問題は2つに分かれる。1つは Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を含む Kaluza-Klein 重力子の生成過程の散乱断面積 σ_Γ の $\Gamma \rightarrow 0$ の極限 (Kaluza-Klein 重力子が崩壊しなくなる極限) をとつても、Kaluza-Klein 重力子を安定な粒子と見なした Kaluza-Klein 重力子の生成過程の散乱断面積 σ に一致しないという問題であり、もう1つの問題は Kaluza-Klein 重力子の崩壊過程を含む Kaluza-Klein 重力子の生成過程の散乱断面積 σ_Γ が物理的な意味を持たない大きな値を持つという問題である。この2つの問題はどちらも、ADD 模型の4次元有効理論では同じ質量を持つ異なる Kaluza-Klein 重力子同士の量子力学的な干渉の効果を異なる粒子同士の干渉の効果として正しく取り扱えない事が原因である。この問題は ADD 模型の4次元有効理論に同じ質量を持ち異なる Kaluza-Klein 重力子が複数含まれている為に生じている。これらの Kaluza-Klein 重力子は4次元有効理論では互いに区別ができない。

今回新たに発見した問題は ADD 模型の4次元有効理論の導出方法が適切ではない為に生じている問題と考えられる。4次元有効理論に含まれる同じ質量を持ち異なる Kaluza-Klein 重力子は $4+\delta$ 次元の理論では余剰次元方向に大きさが等しく向きが異なる運動量を持つ高次元重力子であった。この高次元重力子は $4+\delta$ 次元の理論では互いに区別ができる。しかし $4+\delta$ 次元の理論から4次元有効理論を導出する際に $4+\delta$ 次元の理論では互いに区別できていた高次元重力子が4次元有効理論では互いに区別できない Kaluza-Klein 重力子に帰着されてしまう。Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程を用いて加速器実験で「大きい余剰次元のシナリオ」を検証する為には、ADD 模型の4次元有効理論を導出する際に生じる問題を克服し Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程の物理的に意味のある散乱断面積を計算する方法を確立しなければならない。

今回新たに発見した問題を解決するために考えられる主な方法は2つある。1つは Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程を計算する際に、同じ質量を持つ Kaluza-Klein 重力子同士の干渉項からの寄与を落とす方法である。この方法で求めた散乱断面積は物理的に望ましい性質を持っている。この方法では既に散乱断面積の計算方法が分かっているので、今回調べた過程以外の他の Kaluza-Klein 重力子が中間状態にある過程にすぐに応用し、散乱断面積を具体的に計算することができる。しかし、ADD 模型の4次元有効理論の持つ問題が解決されるわけではないので、この方法は問題の根本的な解決方法にはなっていない。これに対しもう1つの解決方法は $4+\delta$ 次元の理論から4次元有効理論を求める新たな導出方法を模索する方法である。例えば、高次元の模型を矛盾なく記述できる可能性を持つ理論として超弦理論があるので、超弦理論を用いて散乱断面積を計算する方法をヒントとしながら理論的な問題が生じない4次元

有効理論の導出方法を模索することができる。この方法は ADD 模型の 4 次元有効理論の持つ理論的問題を根本的に解決できる可能性がある方法である。

しかし、4 次元有効理論の新たな導出方法を得ることは非常に困難であるように思える。何故なら ADD 模型の 4 次元有効理論だけではなく ADD 模型自体にも理論的な問題が生じている為である。ADD 模型では余剰次元方向の運動量が保存していない。この問題は ADD 模型では 4 次元時空への標準模型の粒子の閉じ込めを力学的に記述することができない事が原因であった。4 次元場の理論には標準模型に含まれている粒子を全て 4 次元空間に閉じ込めることができる力学的な機構が存在していない。この為、「大きい余剰次元のシナリオ」の具体的な解析に用いる模型を理論的な問題が生じないように作る為には、粒子の部分空間への閉じ込めを記述する新たな力学的な機構を求める必要がある。

謝辞

研究を行う機会を与えてくださった安田先生と、本研究を行うにあたり多大な時間を割き研究全般にわたって指導して下さった北澤先生、さらに様々な議論に応じてくださった婦木さんに感謝致します。また貴重な意見を下さった研究室のメンバーの皆様にも感謝致します。

付録A cutting rules

この章では崩壊する粒子を内線を持つ過程に対する cutting rules [22] を説明し、 ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\chi'\chi'$$

に cutting rules を用いて求めた散乱断面積が ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\phi_n$$

の散乱断面積 σ に一致することを示す。

崩壊する粒子を内線を持つ過程に対する cutting rules とは中間状態を伝播する崩壊する粒子の 4 元運動量を on-shell 条件を満たす 4 元運動量に制限して散乱断面積を求める為の計算規則である。崩壊する粒子に対応する Feynmann 図の内線を切断 (cut) することにより、もとの Feynmann 図で表されていた過程の散乱断面積をより小さい Feynmann 図で表される過程の散乱断面積と分岐比の積に帰着して計算する。cutting rules を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{\text{cut}}$ は「on-shell の状態にある粒子を生成し、その粒子は待っていれば寿命を迎えて崩壊する」という物理的な描像に則した散乱断面積になっており、中間状態を伝播する崩壊する粒子の崩壊幅 Γ_{total} がこの粒子の質量 m に対し $\Gamma_{\text{total}}/m \ll 1$ と小さい時、cutting rules を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{\text{cut}}$ は元の過程の散乱断面積 σ_{Γ} に対し誤差が $\mathcal{O}(\Gamma_{\text{total}}/m)$ の良い近似となっている。このため元の過程の散乱断面積 σ_{Γ} を cutting rules を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_{\Gamma}^{\text{cut}}$ で近似することは「幅を小さいとする近似」(narrow-width approximation) もしくは「pole-dominance approximation」と呼ばれている。

以下ではまずミュー粒子の生成過程を例にとって cutting rules を用いた散乱断面積の計算方法を具体的に説明する。cutting rules を用いて散乱断面積を求める為の規則は以下である。

1. Feynmann 図の崩壊する粒子に対応する内線を切断し、その粒子を終状態と始状態を持つ 2 つの Feynmann 図に書き換える。
2. 切断された内線に対応する Feynmann 伝播関数を通る運動量を on-shell の状態に制限し、運動量積分を実行し散乱断面積を求める。

ミュー粒子は崩壊する粒子であるので、ミュー粒子の崩壊過程まで含んだミュー粒子の生成過程は

$$\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_{\mu} + \mu^-$$

$$\begin{array}{l} \phantom{\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_{\mu} + \mu^-} \\ \phantom{\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_{\mu} + \mu^-} \searrow \\ \phantom{\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_{\mu} + \mu^-} \phantom{\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_{\mu} + \mu^-} \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_{\mu} \end{array}$$

である。この過程の Feynmann 図を図 A.1 に示す。図 A.1 で表されるミュー粒子の生成過程で

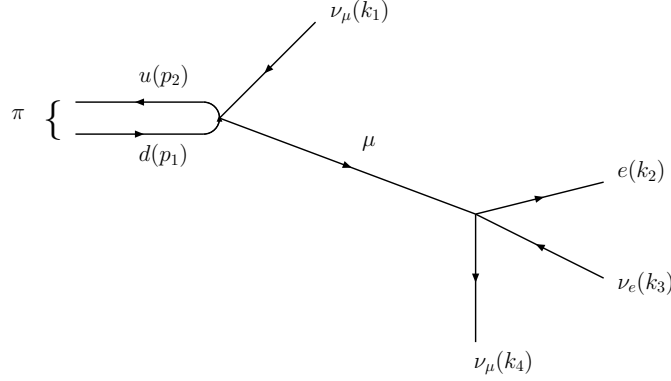


図 A.1: $\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + (e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)$ の Feynmann 図

はミュー粒子は中間状態にあり、Feynmann 図の内線で表されている。この過程の不変散乱振幅 \mathcal{M} は

$$\mathcal{M} = \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right)^2 \bar{v}_u(p_2) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_d(p_1) \times \bar{u}_{\nu_\mu}(k_4) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \frac{m + q^\rho \gamma_\rho}{m^2 - q \cdot q - im\Gamma_{\text{total}}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_{\nu_\mu}(k_1) \times \bar{u}_e(k_2) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(k_3) \quad (\text{A.1})$$

である。ここで G_F はフェルミ結合定数であり、弱い相互作用の結合定数 g_2 と W ボソンの質量 M_W を用いて

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8M_W^2} \quad (\text{A.2})$$

と表される。 m と Γ_{total} はそれぞれミュー粒子の質量と全崩壊幅を表す。式 (A.1) の不変散乱振幅に含まれている

$$S_F(q, m) = \frac{m + q^\rho \gamma_\rho}{m^2 - q \cdot q - im\Gamma_{\text{total}}} \quad (\text{A.3})$$

は 4 元運動量 q^μ を持つミュー粒子の Feynmann 伝播関数であり、不変散乱振幅の中で中間状態を伝播するミュー粒子を表している。3.2.2 節で述べた Feynmann 伝播関数の輻射補正の性質から、ミュー粒子の Feynmann 伝播関数の分母には複素数 $im\Gamma_{\text{total}}$ が含まれている。

cutting rules を用いて散乱断面積を求める。まず、図 A.2 のように元の Feynmann 図のミュー粒子に対応する内線を切断し外線にする。この操作により中間状態にあったミュー粒子は始状態と終状態になり on-shell の状態にあるミュー粒子となる。内線を切断することで得られたより小さい Feynmann 図に対応する過程はそれぞれ、on-shell の状態にあるミュー粒子を生成する過程と on-shell の状態にあるミュー粒子の崩壊過程である。この Feynmann 図の内線を切断する操作に対応して、散乱断面積を求める際に中間状態にあるミュー粒子の運動量を on-shell の状態に制限し運動量積分を実行する。中間状態にあるミュー粒子を記述しているのは式 (A.3) の Feynmann 伝播関数であるので、Feynmann 伝播関数の運動量を on-shell の状態に制限する

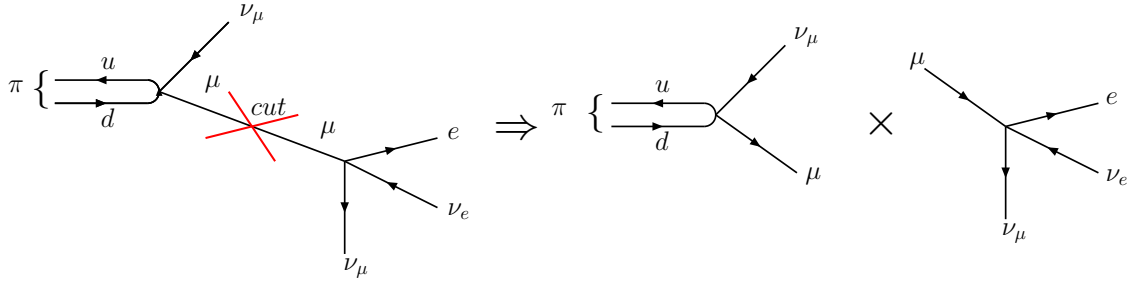


図 A.2: $\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + (e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)$ の Feynmann 図における cutting rules

ため次の置き換えを行う。

$$\frac{1}{m^2 - q \cdot q - im\Gamma_{\text{total}}} \frac{1}{m^2 - q \cdot q + im\Gamma_{\text{total}}} \rightarrow \frac{\pi}{m\Gamma_{\text{total}}} \delta(m^2 - q \cdot q) \theta(q) \quad (\text{A.4})$$

ここで $\theta(q)$ は階段関数で、

$$\theta(q) = \begin{cases} 1 & (q \geq 0) \\ 0 & (q < 0) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

である。左辺の量は散乱断面積を求める際の運動量積分の被積分関数である不変散乱振幅の絶対値の2乗 $\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger$ に含まれる量である。右辺の δ 関数の係数 $\pi/m\Gamma$ は左辺の運動量積分と右辺の運動量積分の値を等しくするため

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{1}{m^2 - q^2 - im\Gamma_{\text{total}}} \frac{1}{m^2 - q^2 + im\Gamma_{\text{total}}} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\pi}{m\Gamma_{\text{total}}} \delta(m^2 - q^2) \theta(q) = \frac{\pi}{m\Gamma_{\text{total}}} \quad (\text{A.6})$$

の条件から決まる。図 A.1 で表されるミュ-粒子の生成過程の散乱断面積 σ_Γ は

$$\sigma_\Gamma = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} \int \prod_{i=1}^4 \left[\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \right] \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3 - k_4) \quad (\text{A.7})$$

であるので、この式の $\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger$ に含まれる Feynmann 伝播関数に式 (A.4) の置き換えを行い運動量積分を実行すれば良い。ミュ-粒子の生成過程に cutting rules を用いて求めた散乱断面積を $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ とすると、 $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ は on-shell の状態にあるミュ-粒子の生成過程の散乱断面積とミュ-粒子の崩壊過程の分岐比の積になる。

$$\sigma_\Gamma^{\text{cut}} = \sigma(\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-) \times Br[\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu] \quad (\text{A.8})$$

これはちょうど図 (A.2) にある、ミュ-粒子の内線を切断することにより得られた2つの Feynmann 図に対応する過程の散乱断面積と分岐比の積の形になっている。崩壊過程の Feynmann 図に対応する量は本来崩壊幅 $\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)$ であるが、式 (A.4) の置き換えの際に δ 関数の係数として $1/\Gamma_{\text{total}}$ が加わるので、計算結果には崩壊過程の分岐比として表れる。以上がミュ-粒子の崩壊過程を含むミュ-粒子の生成過程に cutting rules を用いて散乱断面積を求める手順である。

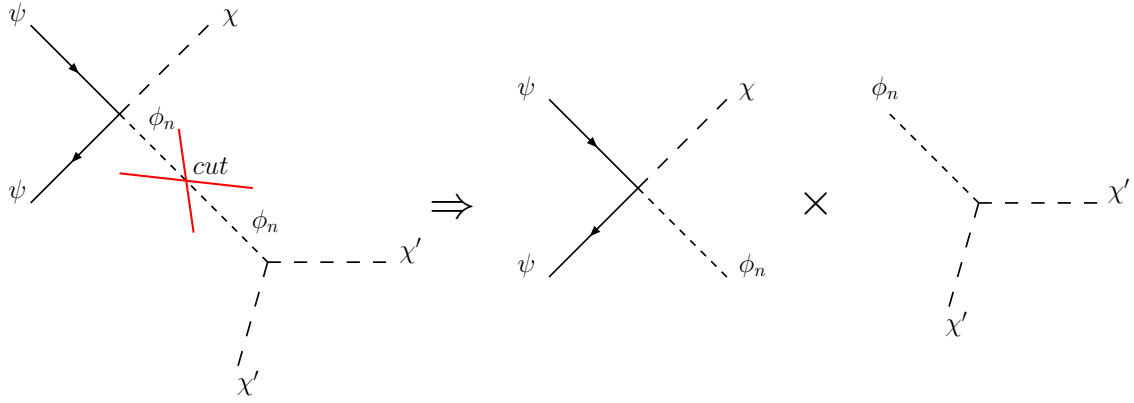


図 A.3: $\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\chi'\chi'$ の Feynmann 図における cutting rules

次にこの cutting rules の手順を用いて、 ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \chi\chi'\chi'$$

の散乱断面積を求め、求めた散乱断面積が ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ と一致することを示す。ミュー粒子の生成過程の場合と異なり ϕ_n の生成過程の場合は中間状態にある無限個の ϕ_n が量子力学的に干渉しているため、式 (A.4) の置き換えが若干異なる。 ϕ_n の生成過程の Feynmann 図における cutting rules を図 (A.3) に示す。ミュー粒子の生成過程の場合と同じように、中間状態にある ϕ_n に対応する内線を切断し ϕ_n を終状態と始状態に持つ 2 つの Feynmann 図に書き換える。この操作に対応して式 (3.38) の $\mathcal{M}_\Gamma(m_1)\mathcal{M}_\Gamma^\dagger(m_2)$ に含まれる ϕ_n の Feynmann 伝播関数に対し

$$\frac{1}{m_1^2 - q \cdot q - im\Gamma(m_1)} \frac{1}{m_2^2 - q \cdot q + im\Gamma(m_2)} \rightarrow \delta^{\vec{n}_1, \vec{n}_2} \frac{\pi}{m\Gamma} \delta(m^2 - q \cdot q) \theta(q) \quad (\text{A.9})$$

の置き換えを行う。cutting rules では中間状態にあった ϕ_n を on-shell の状態に制限するため、異なる \vec{n} で番号付けされている ϕ_n は互いに量子力学的に干渉しなくなる。散乱断面積を求め際に異なる \vec{n} で番号付けされている ϕ_n が干渉する効果を表す干渉項を落とすため、式 (A.9) の置き換えの際に on-shell 条件の δ 関数の係数に $\delta^{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$ が入る。 ϕ_n の生成過程に cutting rules を用いて求めた散乱断面積を $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ とすると $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma^{\text{cut}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^\infty dm \rho(m) \int \prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \right] \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} \left[\left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \left(\frac{g}{\bar{M}_p} \right)^2 (k_1 \cdot k_2)^2 p_1 \cdot p_2 \right] \\ &\quad \times \frac{\pi}{m\Gamma} \delta(m^2 - q \cdot q) \theta(q) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) \\ &\equiv \int_0^\infty dm \rho(m) \sigma_\Gamma^{\text{cut}}(m) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

である。ここで $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}(m)$ は

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma^{\text{cut}}(m) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int \prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \right] \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} \left[\left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \left(\frac{g}{\bar{M}_p} \right)^2 (k_1 \cdot k_2)^2 p_1 \cdot p_2 \right] \\ &\quad \times \frac{\pi}{m\Gamma} \delta(m^2 - q \cdot q) \theta(q) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

であり、図 3.4 で表される質量 $m = n/R$ を持つ ϕ_n が中間状態を伝播する過程に cutting rules を用いて求めた散乱断面積である。式 (A.11) の運動量積分を実行すると

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma^{\text{cut}}(m) &= \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \left(\frac{g}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{m^2}{(2\pi)^2 2^{10}} \frac{s - m^2}{s} \theta(\sqrt{s} - m) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{24}} \left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{s - m^2}{s} \times \frac{1}{(2\pi)^{26}} \left(\frac{g}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{m^3}{\Gamma} \theta(\sqrt{s} - m) \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

となる。ここで質量 m を持つ on-shell の状態の ϕ_n の生成過程 $\sigma(m)$ と ϕ_n が $2\chi'$ に崩壊する崩壊幅 $\Gamma(m)$ は式 (3.19) と式 (3.29) より

$$\sigma(m) = \frac{1}{32\pi} \left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{s - m^2}{s} = \frac{1}{(2\pi)^{24}} \left(\frac{\lambda}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{s - m^2}{s} \quad (\text{A.13})$$

$$\Gamma(m) = \left(\frac{g}{\bar{M}_p} \right)^2 \frac{m^3}{128\pi} = \frac{1}{(2\pi)^{26}} \left(\frac{g}{\bar{M}_p} \right)^2 m^3 \quad (\text{A.14})$$

であるので、これを式 (A.12) に代入すると

$$\sigma_\Gamma^{\text{cut}}(m) = \sigma(m) \theta(\sqrt{s} - m) \quad (\text{A.15})$$

となる。これより $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_\Gamma^{\text{cut}} &= \int_0^\infty dm \rho(m) \sigma_\Gamma^{\text{cut}}(m) \\ &= \int_0^{\sqrt{s}} dm \rho(m) \sigma(m) \\ &= \sigma \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

となり、 ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程に cutting rules を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ が ϕ_n の崩壊過程を含まない ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ に一致することが示された。

以下では cutting rules を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ が元の過程の散乱断面積 σ_Γ の近似となっている事を簡単に説明する。cutting rule を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ は元の過程の散乱断面積 σ_Γ の $\Gamma_{\text{total}} \rightarrow 0$ の極限となっている。すなわち

$$\lim_{\Gamma_{\text{total}} \rightarrow 0} \sigma_\Gamma^{\text{cut}} = \sigma \quad (\text{A.17})$$

である。式 (A.17) が成り立つ時、元の過程の散乱断面積 σ_Γ と cutting rule を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ の差は

$$\sigma_\Gamma - \sigma_\Gamma^{\text{cut}} = \mathcal{O}\left(\frac{\Gamma_{\text{total}}}{\sqrt{s^2} m}\right) \quad (\text{A.18})$$

となり $\Gamma_{\text{total}}/m \ll 1$ の場合には散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ は散乱断面積 σ_Γ に対し良い近似となっている事が分かる。例えば、ミュー粒子の生成過程に cutting rules を用いて求めた式 (A.8) の散乱断面積は実際の実験で測定されるミュー粒子の生成過程の散乱断面積を良く説明している。これはミュー粒子の崩壊幅 Γ_{total} が

$$\frac{\Gamma_{\text{total}}}{m} \propto \frac{g_2^4 m^4}{M_W^4} \ll 1 \quad (\text{A.19})$$

と小さく $\Gamma_{\text{total}} \ll m$ の条件を満たしているためである。

式 (A.17) が成り立つ理由をミュー粒子の場合を例にとり説明する。ミュー粒子の生成過程に cutting rules を用いて散乱断面積を求める際、式 (A.4) のように Feynmann 伝播関数の 2 乗を on-shell 条件の δ 関数で置き換えた。これは中間状態にあるミュー粒子の 4 元運動量を on-shell 条件を満たす 4 元運動量に制限する為であった。中間状態にあるミュー粒子の運動量は一般に on-shell 条件を満たさない。これは 3.2.2 節で見たように、式 (A.3) のミュー粒子の Feynmann 伝播関数 $S_F(q, m)$ の分母に崩壊幅 Γ_{total} が入っている為である。このため式 (A.4) で行った Feynmann 伝播関数の 2 乗の on-shell 条件の δ 関数による置き換えは、実は式 (A.3) のミュー粒子の Feynmann 伝播関数 $S_F(q, m)$ の分母の崩壊幅 Γ_{total} をゼロとする置き換え

$$\frac{1}{m^2 - q \cdot q - im\Gamma_{\text{total}}} \frac{1}{m^2 - q \cdot q + im\Gamma_{\text{total}}} \longrightarrow \frac{1}{m^2 - q \cdot q} \frac{1}{m^2 - q \cdot q} \quad (\text{A.20})$$

と等価になっている。ミュー粒子の Feynmann 伝播関数 $S_F(q, m)$ の分母に崩壊幅をゼロとした場合、 $S_F(q, m)$ は

$$S_F(q, m) = \frac{m + q^\rho \gamma_\rho}{m^2 - q \cdot q} \quad (\text{A.21})$$

となりミュー粒子の 4 元運動量 q^μ が on-shell 条件を満たす点で Feynmann 伝播関数 $S_F(q, m)$ は極となる。崩壊幅 Γ_{total} が分母に入った Feynmann 伝播関数 $S_F(q, m)$ の代わりに式 (A.21) の Feynmann 伝播関数 $S_F(q, m)$ を式 (A.1) のミュー粒子の生成過程の不変散乱振幅に代入し式 (A.7) の運動量積分を実行し散乱断面積を求めると、不変散乱振幅の絶対値の 2 乗がミュー粒子の 4 元運動量 q^μ が on-shell 条件を満たす点で極を持つため、運動量積分の値が q^μ が on-shell 条件を満たす点での値によって決まる。すなわち、on-shell の状態にあるミュー粒子が中間状態を伝播する寄与のみによってミュー粒子の生成過程の散乱断面積が求まるのである。このため式 (A.4) で行った Feynmann 伝播関数の 2 乗の on-shell 条件の δ 関数による置き換えは Feynmann 伝播関数の分母の崩壊幅 Γ_{total} をゼロとする事は等価であり、崩壊幅 Γ_{total} をゼロとして求めた散乱断面積と cutting rules を用いて求めた散乱断面積は等しい。よって元の過程の散乱断面積 σ_Γ と cutting rules を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ の間に式 (A.17) が成立する。

ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程に cutting rules を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ は ϕ_n の Feynmann 伝播関数の分母の崩壊幅 $\Gamma(m)$ をゼロとして求めた散乱断面積と一致しない。これ

は ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積に同じ質量を持つ ϕ_n の干渉項からの寄与が含まれる為である。この為 ϕ_n の崩壊過程を含む ϕ_n の生成過程の散乱断面積 σ_Γ と cutting rules を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ は式 (A.17) を満たさず、cutting rules を用いて求めた散乱断面積 $\sigma_\Gamma^{\text{cut}}$ は散乱断面積 σ_Γ の近似になっていない。

関連図書

- [1] S. L. Glashow, “Partial Symmetries Of Weak Interactions,” Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
S. Weinberg, “A Model Of Leptons,” Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
A. Salam , In *Elementary Particle Physics, (Nobel Symp No. 8)*. (ed. N. Svarthholm).
Almqvist and Wilshell, Stockholm.
- [2] [ALEPH Collaboration], “Precision electroweak measurements on the Z resonance,” Phys. Rept. **427**, 257 (2006) [arXiv:hep-ex/0509008].
- [3] J. Alcaraz *et al.* [ALEPH Collaboration], “A combination of preliminary electroweak measurements and constraints on the standard model,” arXiv:hep-ex/0612034.
- [4] G. Altarelli and M. W. Grunewald, “Precision electroweak tests of the standard model,” Phys. Rept. **403-404**, 189 (2004) [arXiv:hep-ph/0404165].
- [5] G. Altarelli, R. Barbieri and F. Caravaglios, “Electroweak precision tests: A concise review,” Int. J. Mod. Phys. A **13**, 1031 (1998) [arXiv:hep-ph/9712368].
- [6] D. Rainwater, “Searching for the Higgs boson,” [arXiv:hep-ph/0702124].
- [7] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” J. Phys. G **33**, 1 (2006).
Higgs 粒子の質量についての最新のデータは以下にある Review を参照、
http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/higgs_s055.pdf
- [8] G. 't Hooft, “Naturalness, Chiral Symmetry, And Spontaneous Chiral Symmetry Breaking,” NATO Adv. Study Inst. Ser. B Phys. **59**, 135 (1980).
- [9] E. Fermi, “An attempt of a theory of beta radiation. 1,” Z. Phys. **88**, 161 (1934).
- [10] 例えば、次の論文とその参考文献を参照。
S. P. Martin, “A supersymmetry primer,” arXiv:hep-ph/9709356.
- [11] S. Weinberg, “Implications Of Dynamical Symmetry Breaking,” Phys. Rev. D **13**, 974 (1976).
S. Weinberg, “Implications Of Dynamical Symmetry Breaking: An Addendum,” Phys. Rev. D **19**, 1277 (1979).

- L. Susskind, “Dynamics Of Spontaneous Symmetry Breaking In The Weinberg-Salam Theory,” *Phys. Rev. D* **20**, 2619 (1979).
- [12] I. Antoniadis, “A Possible new dimension at a few TeV,” *Phys. Lett. B* **246**, 377 (1990).
- [13] M. E. Peskin and T. Takeuchi, “A New constraint on a strongly interacting Higgs sector,” *Phys. Rev. Lett.* **65**, 964 (1990).
- [14] S. Matsumoto, K. Hagiwara and Y. Yamada, “Constraint On Mssm From Precision Experiments,” *Prepared for 3rd Workshop on Physics and Experiments with e+ e- Linear Colliders (LCWS 95), Iwate, Japan, 8-12 Sep 1995*
- [15] R. Barbieri and A. Strumia, “The ‘LEP paradox’,” arXiv:hep-ph/0007265.
- [16] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998) [arXiv:hep-ph/9803315].
N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and TeV scale quantum gravity,” *Phys. Rev. D* **59**, 086004 (1999) [arXiv:hep-ph/9807344].
- [17] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV,” *Phys. Lett. B* **436**, 257 (1998) [arXiv:hep-ph/9804398].
- [18] E. A. Mirabelli, M. Perelstein and M. E. Peskin, “Collider signatures of new large space dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2236 (1999) [arXiv:hep-ph/9811337].
- [19] G. F. Giudice, R. Rattazzi and J. D. Wells, “Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders,” *Nucl. Phys. B* **544**, 3 (1999) [arXiv:hep-ph/9811291].
- [20] T. Han, J. D. Lykken and R. J. Zhang, “On Kaluza-Klein states from large extra dimensions,” *Phys. Rev. D* **59**, 105006 (1999) [arXiv:hep-ph/9811350].
- [21] T. Banks and W. Fischler, arXiv:hep-th/9906038.
S. Dimopoulos and G. L. Landsberg, “Black holes at the LHC,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 161602 (2001) [arXiv:hep-ph/0106295].
- [22] R. E. Cutkosky, “Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes,” *J. Math. Phys.* **1**, 429 (1960).