

大気ニュートリノ実験からのフレーバーに依存した
非標準相互作用への制限

深澤信也

首都大学東京大学院 理工学研究科 物理学専攻

目次

第 1 章	はじめに	3
第 2 章	標準模型	4
2.1	ゲージ対称性	4
2.2	電弱相互作用	5
2.3	Higgs 場と自発的対称性の破れ	10
2.4	フェルミオンの混合と質量	11
2.5	低エネルギーにおける有効ラグランジアン	14
第 3 章	ニュートリノの質量	16
3.1	Dirac 質量	16
3.2	Majorana 質量	17
3.3	Dirac-Majorana 質量	19
第 4 章	ニュートリノ振動	21
4.1	真空中のニュートリノ振動	21
4.2	物質中のニュートリノ振動	23
4.3	木村-高村-横枕の方法	26
4.4	ニュートリノ振動の実験	29
第 5 章	非標準相互作用	33
5.1	フレーバーに依存した非標準相互作用	33
5.2	非標準相互作用への制限	34
第 6 章	解析方法	39
6.1	検出器において観測されるイベント数	39
6.2	振動確率	41
6.3	χ^2 検定	44
6.4	NSI への制限	45
第 7 章	結果	48

7.1	NSI の許容領域	48
第 8 章	まとめ	52
	参考文献	54

第 1 章

はじめに

素粒子標準模型 (以下、標準模型) は現在の素粒子物理学の実験結果をよく説明する理論である。2012 年 7 月の Higgs 粒子の発見は、標準模型の地位を確固たるものにしたと言っても過言ではないだろう。しかし、標準模型では説明できない現象としてニュートリノ振動がある。この現象は 1998 年に高山で行われた国際会議 Neutrino 1998 で報告された。ニュートリノ振動は、ニュートリノが質量をもつことによって起こる現象である。標準模型はニュートリノを質量がない粒子として扱うため、これは明らかに標準模型を超えた物理を示唆するものである。またニュートリノは弱い相互作用のみが働くため、標準模型の中で最も調べられていない粒子である。よって、ニュートリノは新物理を探求する格好の手段であると言ってもよいだろう。

2011 年の Double Chooz、翌年 2012 年には Daya Bay, RENO によって θ_{13} の値が高い精度で測定された。これによりニュートリノの混ざり具合を表す混合角が全て決まり、ニュートリノ振動の標準 3 世代の枠組みにおいて残された課題は Dirac CP 位相の測定と質量階層性の決定となった。これらを決定すべく、近い将来には大強度のビームを用いた実験が計画されている。このような実験で得られるイベント数は非常に多く、物理量の精密測定が可能になると期待されている。以上をふまえると、標準模型からのずれをみることによって新物理を探求することができる時代は目の前にあると言っていいだろう。このような背景のもとで本研究は、ニュートリノが空間を伝播するときに働く、フレーバーに依存した非標準相互作用について調べた。この相互作用に対する実験からの制限は強くなり、その大きさは標準模型のものと同程度まで許されている。特に大気ニュートリノ実験において $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ セクターに働く非標準相互作用への制限が弱い。そこで将来に稼働することが期待される大気ニュートリノ実験のハイパーカミオカンデを想定し、非標準相互作用に対してどのような制限与えられるのかを考えた。また、現在稼働中の大気ニュートリノ実験のスーパーカミオカンデのアップデートされた実験データを用いて、どの程度の制限が得られるかも調べた。

第2章

標準模型

標準模型はゲージ理論である。その構成要素は強い相互作用を記述する $SU(3)_C$ と電弱相互作用を記述する $SU(2)_L \times U(1)_Y$ である。ゲージ群 $SU(3)_C$ は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に直交しているため、相互作用が混ざり合うことがなくそれぞれ別に扱うことが出来る。ニュートリノは $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に含まれる弱い相互作用しか働かない。本研究はニュートリノを対象とするため、強い相互作用を考える必要がない。従って、以下では標準模型の電弱相互作用について概観する。

2.1 ゲージ対称性

標準模型について議論する前に、その指導原理であるゲージ原理についてみておく必要がある。我々は、系を記述するラグランジアンが回転対称性を持っていたり、並進対称性を持っている場合があることを知っている。これらの対称性は空間に依存しない大域的な変換によるものである。ゲージ原理とは、このような変換が空間に依存する局所的なものであるときにもラグランジアンが不変であることを要求するものであり、これ満たすにはゲージ場を導入する必要がある。以下ではラグランジアンといえば、ラグランジアン密度のことを意味しているものとして話を進める。

例えばラグランジアンが以下で与えられている系を考える。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \quad (2.1.1)$$

ここで γ_μ はガンマ行列で

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \equiv \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (2.1.2)$$

を満たす行列である。また

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 \quad (2.1.3)$$

である。本稿では自然単位系 $\hbar = c = 1$ を用い、メトリックは $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -, 1, -1)$ とする。また、添字に関して繰り返しがあった場合はアインシュタインの規約を用いる。

$$A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=1}^4 A^\mu B_\mu \quad (2.1.4)$$

ラグランジアン (2.1.1) は質量 m の Dirac 場 ψ を記述するものであり、大域的なユニタリー変換

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(\alpha)\psi(x) \quad (2.1.5)$$

で不変である。ここで α は変換を特徴づける定数パラメーターである。このユニタリー変換が局所的 $\alpha \rightarrow \alpha(x)$ になったものをゲージ変換と呼び、このとき

$$U^\dagger(\alpha(x))\partial_\mu U(\alpha(x)) \neq \partial_\mu \quad (2.1.6)$$

となるため、ラグランジアンはもはや不変ではなくなる。しかしラグランジアンの中に現れる微分 ∂_μ をゲージ場を導入して共変微分 D_μ に置き換えることによってラグランジアンは不変となる。

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \sum_a A_\mu^a I_a \quad (2.1.7)$$

ここで I_a は Lie 代数の生成子で、 a の和は生成子の数だけ走る。また g は考えている変換群に関する結合定数である。ちなみに共変微分とゲージ場はそれぞれゲージ変換のもとで以下のように変換する。

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = U(\alpha(x))D_\mu U^\dagger(\alpha(x)) \quad (2.1.8)$$

$$A_\mu^a \rightarrow A'^a_\mu = A_\mu^a + \sum_{b,c} f_{abc} A_\mu^b \alpha_c - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a \quad (2.1.9)$$

ここで f_{abc} は生成子の交換関係における構造定数である。

$$[I_a, I_b] = i f_{abc} I_c \quad (2.1.10)$$

このゲージ原理は標準模型だけでなく、現在の物理学において非常に重要な役割を果たしている。

2.2 電弱相互作用

標準模型に登場する粒子は、物質を構成する物質粒子が 12 種類、相互作用を媒介するゲージ粒子が 5 種類、質量の起源となるヒッグス粒子が 1 種類の計 18 種類である。物質粒子を表 2.1 にまとめた。これらの粒子は群論によって分類することができる。この分類は元素の周期表のようなものである。物質粒子はクォークとレプトンから成り、これらを分類するときは、アップクォークとダウンクォークで対を作り、電子と電子ニュートリノで対を作るように分類する。こうすることによって同じ相互作用をするものに分類することができる。しかしこの分類では 12 もある物質粒子のうち 4 しか登場していないが、実はこれで十分である。その理由は、残りのクォークとレプトンは上の 4 つの分類がそっくりそのまま繰り返すからである。この繰り返しのことを世代と呼び、質量が軽い順に第 1 世代、第 2 世代、第 3 世代といった具合である。誤解を恐れずに言えば、周期表でいう周期のようなものである。しかし、なぜ同じような構造をもったクォークとレプトンが繰り返

表 2.1 物質粒子

	第1世代	第2世代	第3世代
アップ型クォーク	u アップ	c チャーム	t トップ
ダウン型クォーク	d ダウン	s ストレンジ	b ボトム
荷電レプトン	e 電子	μ ミュー	τ タウ
ニュートリノ	ν_e 電子ニュートリノ	ν_μ ミューニュートリノ	ν_τ タウニュートリノ

すのか、なぜ3世代なのかといった疑問に標準模型は答えることができない。ここではこの深遠な問題についてこれ以上立ち入らないことにする。

相互作用は各世代ごとで等しいので、第1世代のみを考えれば容易に3世代の枠組みに拡張できる。物質粒子は Dirac 方程式に従うスピン $\frac{1}{2}$ の粒子である。標準模型では、ニュートリノを除いたフェルミオン場に右手型と左手型が存在し、ニュートリノは左手型のみ存在する。このことが、標準模型はニュートリノを質量がない粒子として扱っていることを意味している。ゲージ群 $SU(2)_L$ の L は、フェルミオン場の左手型のみを変換することを示しており、右手型の粒子は $SU(2)_L$ で変換しない。

これからゲージ群 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の性質を簡単に説明する。 $SU(2)_L$ の生成子 $I_a (a = 1, 2, 3)$ は以下の代数を満たす。

$$[I_a, I_b] = i\epsilon_{abc}I_c \quad (2.2.1)$$

ここで ϵ_{abc} は完全反対称テンソルで $\epsilon_{123} = 1$ である。例えば、式 (2.2.1) を満たすようなものとしてパウリ行列 τ_1, τ_2, τ_3 を用いて $I_a = \tau_a/2$ と表現することができ、この表現は2次元表現であるという。また I_3 の固有値をアイソスピンと呼ぶ。この節の冒頭で述べた粒子の分類法はアイソスピンによるものであり、クォークとレプトンの左手型はそれぞれアイソスピン2重項を成しているといい、右手型はアイソスピン1重項であるという。以下では誤解のない限り、生成子とその固有値を同じ名前と呼ぶことにする。

$U(1)_Y$ は生成子 Y による変換で、この生成子の固有値はハイパーチャージと呼ばれる。また、ハイパーチャージは電荷 Q とアイソスピン I_3 を Gell-Mann–西島の関係式で結びつけている。

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (2.2.2)$$

ゲージ理論では、上に述べたゲージ群の変換のパラメーターが空間依存性をもつために各々の生成子に対応したゲージ場を導入する必要があることが分かる。このゲージ場 A_μ^a, B_μ は、ラグランジアンに現れる通常の微分を共変微分に置き換えるときに出てくる接続としてのゲージ場である。

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \sum_{a=1}^3 A_\mu^a I_a + ig' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (2.2.3)$$

ここで g は $SU(2)_L$ の結合定数で、 g' は $U(1)_Y$ の結合定数である。上で述べたように、クォークとレプトンの左手型はアイソスピン 2 重項として扱うことが出来る。

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad L_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

右手型は $SU(2)_L$ で変換しないので、それぞれ 1 重項である。また、ニュートリノは右手型がない。

$$u_R, d_R, e_R \quad (2.2.5)$$

この表記を用いると、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ でゲージ不変かつ、ここでは議論しない繰り込み可能性を考慮すると、最も一般的な電弱相互作用を表すラグランジアンは以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{L}_L \not{D} L_L + i\bar{Q}_L \not{D} Q_L + \sum_{f=u,d,e} i\bar{f}_R \not{D} f_R - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 A_{\mu\nu}^a A_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ & - y^e (\bar{L}_L \Phi e_R + \bar{e}_R \Phi^\dagger L_L) - y^d (\bar{Q}_L \Phi d_R + \bar{d}_R \Phi^\dagger Q_L) - y^u (\bar{Q}_L \tilde{\Phi} u_R + \bar{u}_R \tilde{\Phi}^\dagger Q_L) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

ここで $\not{D} = \gamma_\mu D^\mu$ で、 $A_a^{\mu\nu}$ と $B^{\mu\nu}$ はそれぞれ $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ の場の強さで

$$A_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g \sum_{b,c=1}^3 f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.2.7)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.2.8)$$

である。右手型と左手型のフェルミオンはそれぞれ違う変換則なので、ラグランジアン (2.2.6) はゲージ対称性より質量項

$$\bar{f}f = \bar{f}_L f_R + \bar{f}_R f_L \quad (f = e, \mu, \tau) \quad (2.2.9)$$

が禁止されていることに注意。ここで f は

$$f = f_L + f_R \quad (2.2.10)$$

$$f_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} f, \quad f_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} f \quad (2.2.11)$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (2.2.12)$$

である。またラグランジアン (2.2.6) の 2,3 行目に出てくる $\Phi, \tilde{\Phi}$ は Higgs 場で、質量項がない標準模型のラグランジアンから粒子の質量を生成するために必要な場である。Higgs 場に関する部分は 2.3.2 で議論する。まずは電弱相互作用を表す 1 行目の部分について調べていくことにする。

ラグランジアン (2.2.6) の1行目はフェルミオン場とゲージ場との相互作用を記述する部分である。共変微分の中身をあからさまに書き、運動項を落とせば相互作用項が出てくる。まず最初にレプトンのみを考える。

$$\mathcal{L}_{I,L} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eL} & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} gA_3 - g'B & g(A_1 - iA_2) \\ g(A_1 + iA_2) & -gA_3 - g'B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + g'\bar{e}_R B e_R \quad (2.2.13)$$

ここで、 u と d の電荷はそれぞれ $\frac{2}{3}$ と $-\frac{1}{3}$ であることに注意して、ハイパーチャージはそれぞれの固有値を用いた。この相互作用ラグランジアンを荷電カレント (Carged-Current, CC) 相互作用と中性カレント (Neutral-Current, NC) 相互作用と呼ばれるものに分ける。この呼び方の理由は、相互作用を媒介するゲージボソンの電荷による。CC 相互作用と NC 相互作用はそれぞれ

$$\mathcal{L}_{I,L}^{CC} = -\frac{g}{2} \{ \bar{\nu}_{eL}(A_1 - iA_2)e_L + \bar{e}_L(A_1 + iA_2)\nu_{eL} \} \quad (2.2.14)$$

$$\mathcal{L}_{I,L}^{NC} = -\frac{1}{2} \{ \bar{\nu}_{eL}(gA_3 - g'B)\nu_{eL} + \bar{e}_L(gA_3 + g'B)e_L - 2g'\bar{e}_R B e_R \} \quad (2.2.15)$$

となる。ここで

$$W^\mu \equiv \frac{A_1^\mu - iA_2^\mu}{\sqrt{2}} \quad (2.2.16)$$

を定義すると、CC 相互作用は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L}^{CC} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e W^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} e + h.c. \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_{W,L}^\mu W_\mu + h.c. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

ここで $h.c.$ は前の項のエルミート共役を表している。また $j_{W,L}^\mu$ はレプトン荷電カレントである。

$$j_{W,L}^\mu = \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e = 2\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L \quad (2.2.18)$$

理論は量子電磁力学 (Quantum ElectroDynamics, QED) を含むはずなので、電磁場と電磁カレントの結合

$$\mathcal{L}_{I,L}^\gamma = -e j_{\gamma,L}^\mu A_\mu, \quad j_{\gamma,L}^\mu = -\bar{e} \gamma^\mu e \quad (2.2.19)$$

の相互作用がある。しかし $SU(2)_L \times U(1)_Y$ には、あからさまにこれに対応する場が存在していない。標準模型では、電氣的に中性な A_3^μ と B^μ の混合で電磁場は表される。これらの場の混ざり具合はワインバーグ角 θ_W を用いて

$$A^\mu = \sin \theta_W A_3^\mu + \cos \theta_W B^\mu \quad (2.2.20)$$

$$Z^\mu = \cos \theta_W A_3^\mu - \sin \theta_W B^\mu \quad (2.2.21)$$

と表される。ここで Z^μ は A^μ に直交する場として定義した。ニュートリノは中性なので電磁相互作用 A^μ と結合しないようにワインバーグ角を選ぶと

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (2.2.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L}^{NC} = & -\frac{g}{2\cos\theta_W} \{ \overline{\nu_{eL}} \not{Z} \nu_{eL} - (1 - 2\sin^2\theta_W) \overline{e_L} \not{Z} e_L + 2\sin^2\theta_W \overline{e_R} \not{Z} e_R \} \\ & + g\sin\theta_W \overline{e} \not{A} e \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

となる。上式の最後の項が電磁相互作用を表しているので

$$g\sin\theta_W = e \quad (2.2.24)$$

を得る。また、弱い相互作用のうち NC 相互作用を表すラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{I,L}^Z = -\frac{g}{2\cos\theta_W} j_{Z,L}^\mu Z_\mu \quad (2.2.25)$$

$$j_{Z,L}^\mu = 2g_L^\nu \overline{\nu_{eL}} \gamma^\mu \nu_{eL} + 2g_L^l \overline{e_L} \gamma^\mu e_L + 2g_R^l \overline{e_R} \gamma^\mu e_R \quad (2.2.26)$$

ここで係数 g_L^ν, g_L^l, g_R^l を導入したが、任意のフェルミオン f に対して一般的に

$$g_{L,R}^f = I_3^f - q^f \sin^2\theta_W \quad (2.2.27)$$

で与えられる。ここで I_3 は $SU(2)_L$ の生成子の第3成分の固有値で q は電荷を表している。ここで注意することは、NC 相互作用において $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ が混ざったことによって、右手型のフェルミオン場も弱い相互作用に加わったことである。式 (2.2.26) はベクトル結合 g_V^f と軸性ベクトル結合 g_A^f を用いて

$$j_{Z,L}^\mu = \overline{\nu_e} \gamma^\mu (g_V^\nu - g_A^\nu \gamma^5) \nu_e + \overline{e} \gamma^\mu (g_V^l - g_A^l \gamma^5) e \quad (2.2.28)$$

$$g_V^f = g_L^f + g_R^f = I_3^f - 2\sin^2\theta_W \quad (2.2.29)$$

$$g_A^f = g_L^f - g_R^f = I_3^f \quad (2.2.30)$$

と書くことができる。

レプトンの電弱相互作用を調べたので、次はクォークについて調べることにする。レプトンのときと同様にクォークの相互作用は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,Q} = & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{u_{eL}} & \overline{d_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} gA_3 + \frac{1}{3}g'B & g(A_1 - iA_2) \\ g(A_1 + iA_2) & -gA_3 + \frac{1}{3}g'B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\ & -\frac{2}{3}g'\overline{u_R} \not{B} u_R + \frac{1}{3}g'\overline{d_R} \not{B} d_R \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

となる。CC 相互作用は

$$\mathcal{L}_{I,Q}^{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_{W,Q}^\mu W_\mu + h.c. \quad (2.2.32)$$

$$j_{W,Q}^\mu = \overline{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d = 2\overline{u_L} \gamma^\mu d_L \quad (2.2.33)$$

であり、NC 相互作用はレプトンのときと同様に弱い相互作用と電磁相互作用に分けることができ

$$\mathcal{L}_{I,Q}^{NC} = \mathcal{L}_{I,Q}^Z + \mathcal{L}_{I,Q}^\gamma \quad (2.2.34)$$

$$\mathcal{L}_{I,Q}^\gamma = -e j_{\gamma,Q}^\mu A_\mu \quad (2.2.35)$$

$$\mathcal{L}_{I,Q}^Z = -\frac{g}{2\cos\theta_W} j_{Z,Q}^\mu Z_\mu \quad (2.2.36)$$

ここで電磁相互作用と弱い相互作用のクォークのカレントはそれぞれ

$$j_{\gamma,Q}^\mu = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d \quad (2.2.37)$$

$$\begin{aligned} j_{Z,Q}^\mu &= 2g_L^U \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + 2g_R^U \bar{u}_R \gamma^\mu u_R + 2g_L^D \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + 2g_R^D \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \\ &= \bar{u}\gamma^\mu (g_V^U - g_A^U \gamma^5)u + \bar{d}\gamma^\mu (g_V^D - g_A^D \gamma^5)d \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

で与えられる。

2.3 Higgs 場と自発的対称性の破れ

標準模型では、W、Z、フェルミオン場の質量は Higgs 機構を通して得られる。この質量獲得機構は Higgs2 重項によって実現される。

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

ここで $\phi^+(x)$ は荷電複素スカラー場で、 $\phi^0(x)$ は中性複素スカラー場である。Higgs2 重項の量子数は $Y = 1$ で、成分場 $\phi^+(x)$ の電荷は 1 である。標準模型のラグランジアン of Higgs 部分は

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(x) \quad (2.3.2)$$

$$V(x) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.3.3)$$

で表される。ここでポテンシャルの最低点である真空が安定であるために λ は正でなくてはならない。また自発的対称性の破れ

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q \quad (2.3.4)$$

を引き起こすために μ^2 は負であると仮定する。ここで $U(1)_Q$ は電磁相互作用のゲージ群である。また、自発的対称性の破れとは系のラグランジアンが無限に縮退した真空を切り合う対称性を持っているとき、ただ 1 つの真空が選ばれることによってその対称性が破れることをいう。Higgs ポテンシャル (2.3.3) の最小値は

$$|\Phi|^2 = \frac{v^2}{2}, \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (2.3.5)$$

であることが容易に分かる。真空は電氣的に中性であるはずなので、Higgs2 重項の中にある荷電複素スカラー場は真空期待値 (Vacuum Expectation Value, VEV) を持たないはずである。従って系が元々持っていた真空が無限に縮退しているという対称性を積極的に用いて

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.3.6)$$

という VEV を持つような真空を考えることにする。ここで $\langle \dots \rangle$ は \dots の VEV を表している。物理的な Higgs 場 $H(x)$ はこの VEV からのずれとして観測されるので Higgs2 重項は

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

のユニタリーゲージと呼ばれる形で書くことにする。式 (2.3.7) を式 (??) に代入することにより

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} = & \frac{1}{2}(\partial H)^2 - \lambda v^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 + \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2 v^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \\ & + \frac{g^2 v}{2} W_\mu^\dagger W^\mu H + \frac{g^2 v}{4 \cos^2 \theta_W} Z_\mu H \\ & + \frac{g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu H^2 + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu H^2 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

を得る。Higgs の質量は

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} \quad (2.3.9)$$

で与えられるが μ は手で入れた量であり、標準模型は Higgs の質量を予言することができないが、2012 年に LHC において測ることができた。

2.4 フェルミオンの混合と質量

前の節でゲージ場の質量獲得の機構をみたので、この節ではフェルミオンの質量獲得の機構と、質量を獲得したことによってクォークが混合することをみる。標準模型では、ニュートリノに質量がないため、ニュートリノの混合は起こらないが、実際は混合していることが知られている。これは次とその次の章で詳しく議論することにする。

まずは荷電レプトンの質量獲得をみる。電弱相互作用のラグランジアン (2.2.6) の 3 行目のレプトン部分を 3 世代に拡張すると

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha,\beta}^l \overline{L'_{\alpha L}} \Phi'_{\beta R} + h.c. \quad (2.4.1)$$

となる。ここでレプトン 2 重項 $L'_{\alpha L}$ は

$$L'_{\alpha L} = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha L} \\ l'_{\alpha L} \end{pmatrix}, \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (2.4.2)$$

$$l'_{eL} = e'_L, \quad l'_{\mu L} = \mu'_L, \quad l'_{\tau L} = \tau'_L \quad (2.4.3)$$

である。行列 Y^l は一般に 3×3 の複素行列であり対角的でないため、ラグランジアンに登場する場は質量固有状態でない。従って各場にプライム (') を付けておいた。Higgs2 重項をユニタリーゲージにとると (2.4.1) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,L} = & - \frac{v+H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha,\beta}^l \overline{l'_{\alpha L}} l'_{\beta R} + h.c. \\ = & - \frac{v+H}{\sqrt{2}} \overline{l'_L} Y^l l'_R + h.c. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

と書ける。ここでレプトンの配列

$$\boldsymbol{l}'_L \equiv \begin{pmatrix} e'_L \\ \mu'_L \\ \tau'_L \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l}'_R \equiv \begin{pmatrix} e'_R \\ \mu'_R \\ \tau'_R \end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

という表記を導入した。右手型のフェルミオンと左手型のフェルミオンは別々の場なので、別々に基底の取り替えをすることができる。

$$\boldsymbol{l}_L = V_L^{l\dagger} \boldsymbol{l}'_L \equiv \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_R = V_R^{l\dagger} \boldsymbol{l}'_R \equiv \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

一般の複素行列は2つのユニタリ行列によるバイユニタリ変換で対角化できることが知られており、この V_L, V_R を用いて行列 Y^l を対角化することが可能である。

$$V_L^{l\dagger} Y^l V_R^l = Y^l = \text{diag}(y_e^l, y_\mu^l, y_\tau^l) \quad (2.4.7)$$

従って式 (2.4.4) は Y^l が対角的な基底で

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^l v}{\sqrt{2}} \bar{l}_\alpha l_\alpha - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^l}{\sqrt{2}} \bar{l}_\alpha l_\alpha H \quad (2.4.8)$$

$$l_\alpha = l_{\alpha L} + l_{\alpha R} \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (2.4.9)$$

$$l_e = e, \quad l_\mu = \mu, \quad l_\tau = \tau \quad (2.4.10)$$

と書ける。ここで荷電レプトンの質量は

$$m_\alpha = \frac{y_\alpha^l v}{\sqrt{2}} \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (2.4.11)$$

で与えられる。 y_α^l はパラメーターなので、荷電レプトンの質量も実験的に測らなくてはならない。

上で基底の変換をしたので、カレントがどのようになるかをみておく必要がある。まずニュートリノの配列として

$$\boldsymbol{\nu}'_L = \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ \nu'_{\mu L} \\ \nu'_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (2.4.12)$$

を定義するとレプトン荷電カレント (2.2.18) は

$$j_{W,L}^\mu = 2\bar{\boldsymbol{\nu}'_L} \gamma^\mu \boldsymbol{\nu}'_L = 2\bar{\boldsymbol{\nu}'_L} \gamma^\mu V_L^l \boldsymbol{l}_L \quad (2.4.13)$$

となるが、質量がないニュートリノも自由に基底をとりかえてよいので変換した配列

$$\boldsymbol{\nu}_L = V_L^{l\dagger} \boldsymbol{\nu}'_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (2.4.14)$$

を用いればレプトン荷電カレントは

$$j_{W,L}^\mu = 2\bar{\nu}_L \gamma^\mu \mathbf{l}_L = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu l_{\alpha L} \quad (2.4.15)$$

となり、質量固有状態でカレントを書くことができる。同様に NC 相互作用のカレントも考えると、プライムがついたフェルミオン場と質量固有状態の場でカレントが同じ形を取ることが分かる。

次にクォークの質量項を考える。ダウン型クォークは荷電レプトンと同じように質量項を持たせることができるが、アップ型クォークは右手型と左手型を組み合わせるとハイパーチャージが $Y = 1$ になってしまうため、ゲージ不変性より $Y = 1$ の Higgs 場 Φ と結合できない。しかし

$$\tilde{\Phi}(x) = i\tau_2 \Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.16)$$

がハイパーチャージ $Y = -1$ で変換するので、新しい Higgs 場を導入せずにアップ型のクォークの質量項を得ることができる。従ってクォークの湯川結合は

$$\mathcal{L}_{H,Q} = -\frac{v+H}{\sqrt{2}} \left[\sum_{\alpha,\beta=d,s,b} Y_{\alpha\beta}^{iD} \bar{q}'_{\alpha L} q'_{\beta R} + \sum_{\alpha,\beta=u,c,t} Y_{\alpha\beta}^{iU} \bar{q}'_{\alpha L} q'_{\beta R} \right] \quad (2.4.17)$$

となる。以下の流れはレプトンのときと同様である。まずクォークの配列を以下のように定義する。

$$\mathbf{q}'_L^U \equiv \begin{pmatrix} u'_L \\ c'_L \\ t'_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}'_R^U \equiv \begin{pmatrix} u'_R \\ c'_R \\ t'_R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}'_L^D \equiv \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}'_R^D \equiv \begin{pmatrix} d'_R \\ s'_R \\ b'_R \end{pmatrix} \quad (2.4.18)$$

次にバイユニタリー変換によって

$$V_L^{D\dagger} Y^{iD} V_R^D = Y^D = \text{diag}(y_d^D, y_s^D, y_b^D) \quad (2.4.19)$$

$$V_L^{U\dagger} Y^{iU} V_R^U = Y^U = \text{diag}(y_u^U, y_c^U, y_t^U) \quad (2.4.20)$$

と対角化する。ここでバイユニタリー変換に用いた行列は基底の変換

$$\mathbf{q}_L^U = V_L^{U\dagger} \mathbf{q}'_L^U \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_R^U = V_R^{U\dagger} \mathbf{q}'_R^U \equiv \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix} \quad (2.4.21)$$

$$\mathbf{q}_L^D = V_L^{D\dagger} \mathbf{q}'_L^D \equiv \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_R^D = V_R^{D\dagger} \mathbf{q}'_R^D \equiv \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} \quad (2.4.22)$$

を引き起こす。この基底のもとでクォークの質量が

$$m_\alpha = \frac{y_\alpha^D}{\sqrt{2}} \quad (\alpha = d, s, b) \quad (2.4.23)$$

$$m_\alpha = \frac{y_\alpha^U}{\sqrt{2}} \quad (\alpha = u, c, t) \quad (2.4.24)$$

で与えられることは簡単に確かめられる。 y_α^D, y_α^U もパラメーターなので、標準模型はレプトンのときと同様にクォークの質量を予言することができない。

この節の最後にレプトンのときと同様に、カレントがプライム付きとそうでない場合でどうなるのかをみておく。CC 相互作用のカレントは

$$j_{W,Q}^\mu = 2\overline{q_L^U} \gamma^\mu q_L^D = 2\overline{q_L^U} \gamma^\mu V_L^{U\dagger} V_L^D q_L^D \quad (2.4.25)$$

となって、プライム付きとそうでない場合でカレントの形が変わる。違いとして現れる

$$V = V_L^{U\dagger} V_L^D \quad (2.4.26)$$

は Cabbibo-小林-益川 (Cabbibo-Kobayashi-Masukawa, CKM) 行列として知られており、クォーク混合の効果を現すものである。ここでクォークは3世代存在するため、CKM 行列は 3×3 行列である。一般の $N \times N$ ユニタリー行列は $N(N-1)/2$ 個の混合角と $N(N+1)/2$ 個の位相でパラメトライズすることができる。CKM 行列は $N=3$ の場合に相当し、3個の混合角と6個の位相でパラメトライズされるが、実際の観測量は3個の混合角と1個の位相しかない。それは各クォークに大域的な位相変換を行ってもラグランジアンは不変で、この変換によって CKM 行列の位相を吸収することができるからである。この変換は CKM 行列の左と右から対角的位相因子をかける自由度があることを意味し、式 (2.4.25) に

$$V \rightarrow \sum_{\alpha,\beta} \exp[-i\theta_\alpha^U] V_{\alpha\beta} \exp[i\theta_\beta^D] \quad (2.4.27)$$

という形で現れる。ここで $\alpha = u, c, t, \beta = d, s, b$ と走る。式 (2.4.27) から共通の位相をくくりだすと

$$\exp[-i(\theta_u^U - \theta_d^D)] \sum_{\alpha,\beta} \exp[-i\theta_\alpha^U - \theta_\beta^D] V_{\alpha\beta} \exp[i\theta_\beta^D - \theta_d^D] \quad (2.4.28)$$

となり、計5個の位相が自由に取れることが分かる。従って6個ある CKM 行列の位相のうち5個が吸収されて、1個の物理的な位相が残ることになる。

2.5 低エネルギーにおける有効ラグランジアン

弱い相互作用を媒介する W, Z は 100GeV のオーダーの質量を持つため、このオーダーよりも低エネルギーの過程ではゲージ場のプロパゲーターが相互作用の頂点に近似できるため CC 相互作用は4フェルミ相互作用と呼ばれるもので記述することが出来る。

$$\mathcal{L}_{eff}^{CC} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_{W\mu}^\dagger j_W^\mu \quad (2.5.1)$$

ここで G_F はフェルミ定数と呼ばれる量で、 W ボソンの質量と

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \quad (2.5.2)$$

の関係で結ばれている。NC 相互作用も同様に

$$\mathcal{L}_{eff}^{NC} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_Z^{\mu\dagger} j_{Z\mu} \quad (2.5.3)$$

で表すことができる。ニュートリノ振動で扱うエネルギー領域は4フェルミ相互作用で十分な精度を得ることができる。本研究の対象であるフレーバーに依存した非標準相互作用も有効的にエキゾチックな4フェルミ相互作用で記述できるものである。

第3章

ニュートリノの質量

この章ではニュートリノ物理を議論する上で、非常に重要なニュートリノの質量について議論する。標準模型では質量が正確に0であるニュートリノが、実験で質量があることが確認されている。この事実は標準模型を超える物理があることを示唆している。しかしニュートリノ質量の絶対値は知られておらず、非常に小さな質量の二乗差しか分かっていない。さらに、ニュートリノの質量は非常に小さいと考えられているが、その小ささの理由は未知な部分が多い。

ニュートリノ質量は Dirac 質量か Majorana 質量、または最も一般的な Dirac-Majorana 質量と呼ばれる形で記述される。ここではニュートリノの質量の性質を概観すると共に、ニュートリノ振動において非常に重要な牧-中川-坂田 (MNS) 行列を導入する。

3.1 Dirac 質量

ニュートリノも右手型の場合を導入すれば、クォークや荷電レプトンと同じように質量項を組むことができる。ここで右手型ニュートリノは標準模型のどの相互作用も働かないゲージ1重項である。左手型ニュートリノと同様に右手型も配列を

$$\nu'_R \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{eR} \\ \nu'_{\mu R} \\ \nu'_{\tau R} \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

のように定義して標準模型に加えると、レプトンと Higgs 場の結合は

$$\mathcal{L}_{H,L} = -\frac{v+H}{\sqrt{2}} [\bar{l}'_L Y^{\prime\mu} l'_R + \bar{\nu}'_L Y^{\prime\nu} \nu'_R] + h.c. \quad (3.1.2)$$

となって、今までと同様に基底を取り直すことにより Y^{ν} は対角化することができる。

$$V_L^{\nu\dagger} Y^{\prime\nu} V_R^{\nu} = Y^{\nu} = \text{diag}(y_1^{\nu}, y_2^{\nu}, y_3^{\nu}) \quad (3.1.3)$$

この基底のもとでは、プライム付きの配列は以下ようになる。

$$\mathbf{n}_L = V_L^{\nu\dagger} \nu'_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_R = V_R^{\nu\dagger} \nu'_R \equiv \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

この場合、ニュートリノの質量は今までと同じように

$$m_k = \frac{y'_k v}{\sqrt{2}} \quad (3.1.5)$$

で与えられる。形は今までみてきたものと同じだが、ニュートリノの質量は非常に小さい。従って、このままだと y'_k が他のフェルミオンに対して不自然に小さい値を取らなくてはならないことになる。このことに対して、現在の物理学は明確な回答を与えることができていない。

また、クォークのときと同様にフレーバー固有状態と質量固有状態が混ざる現象が起こる。これをみるために CC 相互作用のカレントについてみてみよう。プライム付きの場が変換されたことによってカレントは以下のように書ける。

$$j_{W,L}^\mu = 2\overline{\nu'_L} \gamma^\mu \nu'_L = 2\overline{\mathbf{n}_L} U^\dagger \gamma^\mu \mathbf{l}_L \quad (3.1.6)$$

ここで U は

$$U = V_L^{l\dagger} V_L^\nu \quad (3.1.7)$$

と定義した。この行列はクォークの混合でみたようにレプトンの混合を表し、Pontecorvo-牧-中川-坂田 (PMNS) 行列、または牧-中川-坂田 (MNS) 行列と呼ばれている*¹。CKM 行列のときと同じで、標準 3 世代の枠組みであれば、レプトン混合行列は 3 つの混合角と 1 つの位相が物理的観測量となる。通常ニュートリノのフレーバー固有状態は

$$\nu_L = U \mathbf{n}_L = V_L^{l\dagger} \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (3.1.8)$$

で書かれる。この表記を用いれば CC 相互作用のカレントは

$$j_{W,L}^\mu = 2\overline{\nu_L} \gamma^\mu \mathbf{l}_L \quad (3.1.9)$$

と書ける。ニュートリノ振動はレプトン混合行列とニュートリノの質量 2 乗差によって記述される。

3.2 Majorana 質量

この節ではニュートリノの質量項の可能性として、Dirac 質量項とは違う Majorana 質量項が可能であることをみる。まず最初に Majorana 粒子がどのような性質を持っているのかをみる。その後に Majorana 質量項がどのように組まれるかをみる。

ニュートリノは Dirac 方程式に従うことが知られている。質量が有限な場合の Dirac 方程式は

$$(i\partial - m)\psi = 0 \quad (3.2.1)$$

*¹ 2013 年の Particle Data Group の neutrino mass, mixing, and oscillations[1] のレビューに基づく。以後、この論文では MNS 行列と呼ぶことにする。

である。この方程式は

$$i\partial\psi_L = m\psi_R \quad (3.2.2)$$

$$i\partial\psi_R = m\psi_L \quad (3.2.3)$$

と等価である。質量がない場合は右手型と左手型が満たす方程式は分離して、Wyle 方程式と呼ばれる方程式に従う。

$$i\partial\psi_L = 0 \quad (3.2.4)$$

$$i\partial\psi_R = 0 \quad (3.2.5)$$

ここに出てくる $\psi_{R,L}$ を Wyle スピノールという。Landau, Lee-Yang, Salam らは質量がないニュートリノを左手型のみで記述する 2 成分理論を提唱した。質量がある場合の式 (3.2.2), (3.2.3) は 4 成分場であるが、この方程式も 2 成分場で書けることが知られており、2 つの方程式は等価であることが分かる。このようなことができるのはフェルミオンが Majorana 粒子と呼ばれる性質を持っている場合である。Majorana 粒子は右手型と左手型が

$$\psi_R = \xi \mathcal{C} \overline{\psi_L}^T \quad (3.2.6)$$

で結びついている。ここで ξ は位相因子である。また、 \mathcal{C} は電荷共役行列で粒子と反粒子を結びつける演算子で以下の性質を持つ。

$$\mathcal{C} \gamma_\mu^T \mathcal{C}^{-1} = -\gamma_\mu \quad (3.2.7)$$

$$\mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} \quad (3.2.8)$$

$$\mathcal{C}^T = -\mathcal{C} \quad (3.2.9)$$

位相因子 ξ は

$$\psi_L \rightarrow \xi^{1/2} \psi_L \quad (3.2.10)$$

という場の位相の再定義によって消すことができる。すると (3.2.3) は Majorana スピノールを用いて

$$i\partial\psi_L = m \mathcal{C} \overline{\psi_L}^T \quad (3.2.11)$$

という形になる。これを Majorana 方程式という。フェルミオンが Majorana スピノールである条件は

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L + \mathcal{C} \overline{\psi_L}^T \quad (3.2.12)$$

なので

$$\psi = \mathcal{C} \overline{\psi}^T \quad (3.2.13)$$

という形にまとめることができる。これは粒子と反粒子が同一であることを主張しているので、Majorana スピノールは電氣的に中性な場合に限る。ニュートリノが Dirac 粒子なのか Majorana 粒子なのかは今のところ分かっていない。これらを見分ける現実的な実験として無ニュートリノ 2 重 β 崩壊の探索が精力的に行われている。

簡単のため、1種類のニュートリノだけを考えると、Majorana 質量項は

$$\mathcal{L}_{mass}^M = -\frac{1}{2}m\nu_L^C\nu_L \quad (3.2.14)$$

で与えられる。ここで

$$\nu_L^C = C\bar{\nu}_L^T \quad (3.2.15)$$

という表記を用いた。1/2がついている理由は右手型と左手型が独立な場ではないためである。ここで Majorana 質量項は大域的な $U(1)$ 変換で不変でないために、レプトン数を破る項であることに注意。

Majorana 質量項はハイパーチャージ $Y = -2$ なので、ゲージ不変にするためには $Y = 2$ のアイソスピン 2 重項と結合しなくてはならない。しかし、標準模型にそのようなものはないため、繰り込み可能な項として Majorana 質量項を導入することはできない。一番簡単な高次元演算子は

$$\mathcal{L}_5 = \frac{g}{\mathcal{M}}(L_L^T\tau_2\Phi)C^\dagger(\Phi^T\tau_2L_L) + h.c. \quad (3.2.16)$$

という形である。 g は無次元の結合定数で \mathcal{M} は質量の次元を持った定数である。自発的対称性の破れによってこの項から

$$\mathcal{L}_{mass}^M = \frac{1}{2}\frac{gv^2}{\mathcal{M}}\nu_L^C\nu_L \quad (3.2.17)$$

という Majorana 質量項がでてくる。Majorana 質量項が存在するときにも 3 世代に拡張すれば Dirac 粒子のときと同じで質量固有状態とフレーバー固有状態の混合が生じる。Majorana 粒子の場合は Dirac 粒子のときと比べて、新たな位相が 2 つレプトン混合行列に加わるが、この位相はニュートリノ振動では測定できない。

3.3 Dirac-Majorana 質量

標準模型によると左手型のニュートリノは存在しているので、左手型のニュートリノによる Majorana 質量項を組むことができる。また右手型ニュートリノが存在すれば Dirac 質量項も組むことができる。さらに右手型だけで Majorana 質量項を組むことができるので、一般にニュートリノの質量項は

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \mathcal{L}_{mass}^D + \mathcal{L}_{mass}^L + \mathcal{L}_{mass}^R \quad (3.3.1)$$

$$\mathcal{L}_{mass}^D = -m_D\bar{\nu}_R\nu_L + h.c. \quad (3.3.2)$$

$$\mathcal{L}_{mass}^L = \frac{1}{2}m_L\nu_L^T C^\dagger\nu_L + h.c. \quad (3.3.3)$$

$$\mathcal{L}_{mass}^R = \frac{1}{2}m_R\nu_R^T C^\dagger\nu_R + h.c. \quad (3.3.4)$$

で与えられる。 \mathcal{L}_{mass}^L は $SU(2)_L$ のもとで 1 重項でないため、標準模型の枠内では禁止されている。3つの独立な質量に対して、独立な場は 2 つなので、3つの質量のうち実にとれるのは 2 つまでである。一般的な質量項を記述するために

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ C\bar{\nu}_R^T \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

を定義すると、式 (3.3.1) は

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \frac{1}{2} N_L^T C^\dagger M N_L + h.c. \quad (3.3.6)$$

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \quad (3.3.7)$$

と書ける。ここで N_L に対してユニタリ変換

$$n_L = U_L^{-1} N_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

を行って行列 M を対角化する。

$$U^T M U = \text{diag}(m_1, m_2) \quad (3.3.9)$$

ここで $m_{1,2}$ は常に正にとれることが知られている。すると式 (3.3.1) は

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \nu_{kL}^T C^\dagger \nu_{kL} + h.c. = -\frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \bar{\nu}_k \nu_k \quad (3.3.10)$$

と書ける。ここで

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^C = \nu_{kL} + C\bar{\nu}_{kL}^T \quad (3.3.11)$$

と定義した。一般的な Dirac-Majorana 質量項は Majorana 質量項と同じ性質を持っていることが分かる。この章でニュートリノに Dirac 質量項や Majorana 質量項があることによって、フレーバー固有状態と質量固有状態が混ざることを見た。一般的な Dirac-Majorana 質量項の場合も Majorana 質量項と同じ性質をもつため、レプトン混合は起こることが分かる。

第 4 章

ニュートリノ振動

前の章でニュートリノに質量があることによって、レプトン混合が起こることをみた。この章では、ニュートリノのフレーバーが変わる確率、すなわち振動確率がどのように求められるのかを、真空中と物質中のそれぞれの場合について説明する。

4.1 真空中のニュートリノ振動

この節では、真空中の標準的な 3 世代のニュートリノ振動の枠組みをみる。MNS 行列は 3 つの混合角 $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ と 1 つの Dirac の CP 位相 δ でパラメトライズすることができる。パラメトライズする方法はいくつかあるが、標準的なものは以下の通りである。

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (4.1.1)
 \end{aligned}$$

ここで

$$s_{ij} = \sin \theta_{ij}, \quad c_{ij} = \cos \theta_{ij} \quad (4.1.2)$$

という表記を用いた。Majorana 質量項が存在することによって出てくる位相については、ニュートリノ振動で測定できないためここでは含めなかった。

質量固有状態 $|\nu_j\rangle (j = 1, 2, 3)$ とフレーバー固有状態 $|\nu_\alpha\rangle (\alpha = e, \mu, \tau)$ は MNS 行列を用いて

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j}^* |\nu_j\rangle \quad (4.1.3)$$

という関係式で結びついている*1。ここでそれぞれの状態は

$$\langle \nu_j | \nu_k \rangle = \delta_{jk} \quad (4.1.4)$$

$$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad (4.1.5)$$

と規格直交しているようにとる。質量固有状態はハミルトニアン H の固有状態なので Dirac 方程式

$$i \frac{d}{dt} |\nu_j\rangle = E_j |\nu_j\rangle \quad (4.1.6)$$

を満たす。ここで E_j は質量固有状態のエネルギー固有値である。

$$H |\nu_j\rangle = E_j |\nu_j\rangle \quad (4.1.7)$$

式 (4.1.6) は簡単に解けて、質量固有状態の時間発展が求まる。

$$|\nu_j(t)\rangle = e^{-iE_j t} |\nu_j(t=0)\rangle \quad (4.1.8)$$

ニュートリノは CC 相互作用で生成されるため $t=0$ では1つの定まったフレーバー固有状態である。また測定は CC 相互作用により生成された荷電レプトンをみて、それに対応するニュートリノと同定するため、終状態もフレーバー固有状態である。ニュートリノが $t=0$ で $|\nu_\alpha\rangle$ の状態で生成されたのち、 $|\nu_\beta\rangle$ で観測される確率振幅 $\mathcal{A}_{\alpha\rightarrow\beta}(t)$ は、式 (4.1.3) を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\alpha\rightarrow\beta}(t) &= \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle \\ &= \langle \nu_\beta | \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j}^* |\nu_j(t)\rangle \rangle \\ &= \langle \nu_\beta | \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j}^* e^{-iE_j t} \sum_{\gamma} U_{\gamma j} |\nu_\gamma\rangle \rangle \\ &= \sum_j U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-iE_j t} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

となる。最後の式変形はフレーバー固有状態の規格直交性を用いた。従って $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ という遷移が起こる確率、すなわち振動確率 $P_{\alpha\rightarrow\beta}(t)$ は

$$P_{\alpha\rightarrow\beta}(t) = |\mathcal{A}_{\alpha\rightarrow\beta}(t)|^2 = \sum_{j,k} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k}^* e^{-i(E_j - E_k)t} \quad (4.1.10)$$

で与えられる。もう少し使いやすい形にするために、ニュートリノが超相対論的粒子であることを用いて以下の近似をする。ニュートリノのエネルギーは

$$E_j \simeq E + \frac{m_k^2}{2E} \quad (4.1.11)$$

1 波動関数に $\nu_\alpha = \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} \nu_j$ という関係を要請すると式 (4.1.3) の関係が導かれる。ここで波動関数は $\nu_\alpha = \langle \nu_\alpha | \nu \rangle$, $\nu_j = \langle \nu_j | \nu \rangle$ で与えられるものとする。 $\nu_\alpha = \langle \nu_\alpha | \nu \rangle = \sum_j \langle \nu_\alpha | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu \rangle = U_{\alpha j} \nu_j = U_{\alpha j} \langle \nu_j | \nu \rangle$ より $U_{\alpha j} = \langle \nu_\alpha | \nu_j \rangle$ を得る。この複素共役をとると $U_{\alpha j}^ = \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle$ となって、式 (4.1.3) $|\nu_\alpha\rangle = \sum_j |\nu_j\rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle = \sum_j U_{\alpha j}^* |\nu_j\rangle$ を得る [1]。

と近似できるので、振動確率の式中で

$$E_j - E_k \simeq \frac{\Delta m_{jk}^2}{2E} \quad (4.1.12)$$

となる。ここで Δm_{jk}^2 は質量 2 乗差である。

$$\Delta m_{jk}^2 \equiv m_j^2 - m_k^2 \quad (4.1.13)$$

また、ニュートリノは光速で伝播するため、時間 t の間に伝播する距離 (基線長) L との間には $t = L$ の関係がある。以上を用いると振動確率は基線長 L とニュートリノのエネルギー E の関数になる。

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L, E) = \sum_{j,k} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k}^* \exp(-i \frac{\Delta m_{jk}^2 L}{2E}) \quad (4.1.14)$$

さらに、指数関数を三角関数で書き直すことによって振動確率は

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}(L, E) = & \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \Re[U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k}^*] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{jk}^2 L}{4E} \right) \\ & + 2 \sum_{j < k} \Im[U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k}^*] \sin \left(\frac{\Delta m_{jk}^2 L}{2E} \right) \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

となる。この式は任意のフレーバー数でも使える式である。反ニュートリノを議論するとき

$$U_{\alpha j} \rightarrow U_{\alpha j}^* \quad (4.1.16)$$

とすればよい。

4.2 物質中のニュートリノ振動

ニュートリノはほとんど物質と相互作用することはないが、基線長が地球の直径ほど長くなると、ニュートリノと物質の相互作用の効果が振動確率に影響する。歴史的には、1978年に Wolfenstein が物質中を伝播するニュートリノがコヒーレントな前方散乱によってポテンシャルを感じることを発見したことが始まりである。続いて 1985年に Mikheev と Smirnov が一様でない物質密度中をニュートリノが伝播するとき、フレーバーの遷移確率を非常に大きくすることができることを発見した。これらをまとめて MSW 効果または物質効果と呼び、太陽ニュートリノ問題をはじめ、様々な実験によって確認されている。本研究で扱うフレーバーに依存した非標準相互作用は MSW 効果の拡張として捉えることができる。

まず最初に CC 相互作用によって ν_e がどのようなポテンシャルを感じるのかを考える。物質中には電子以外の荷電レプトンはないとする。このとき、電子は一様かつ等方的で偏

向していないとする。低エネルギーにおける CC 相互作用を表す有効ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_{eff}^{CC}(x) &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(x) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e(x)] [\bar{e}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e(x)] \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(x) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e(x)] [\bar{e}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e(x)] \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

である。1行目から2行目は Fierz 変換をした。物質の静止系で、電子の効果を積分すると有効ハミルトニアンは

$$H_{eff}^{CC}(x) \rightarrow \sqrt{2} G_F N_e \bar{\nu}_{eL}(x) \gamma^0 \nu_{eL}(x) \quad (4.2.2)$$

となる。ここで N_e は電子の数密度である。以上より CC 相互作用によって

$$A_{CC} = \sqrt{2} G_F N_e \quad (4.2.3)$$

というポテンシャルが加わることが分かる。NC 相互作用も同様な計算によって

$$A_{NC}^f = \sqrt{2} G_F N_f g_V^f \quad (4.2.4)$$

というポテンシャルが加わることが分かる。ここで添字 f はフェルミオンの種類を表している。 g_V^f は式 (2.2.29) で定義したベクトル結合定数である。物質中には電子、陽子、中性子が存在しているのでそれらの寄与を合わせると、NC 相互作用からの寄与は

$$A_{NC} = -\frac{1}{2} \sqrt{2} G_F N_n \quad (4.2.5)$$

となる。ここで N_n は中性子の数密度である。

さて、上で述べたポテンシャルが加わることによって、振動確率がどう変化するかをみてみよう。真空中を伝播するニュートリノの Dirac 方程式をフレーバー固有状態の基底で書くと

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U E U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

となる。ここで E はエネルギー固有値を対角成分に持つ

$$E = \text{diag}(E_1, E_2, E_3) \quad (4.2.7)$$

である。物質効果によってこのハミルトニアンにポテンシャルが加わって、物質中の Dirac 方程式は

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = (U E U^\dagger + A) \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

となる。ここで新しく加わったポテンシャル A は

$$A = \begin{pmatrix} A_{CC} + A_{NC} & 0 & 0 \\ 0 & A_{NC} & 0 \\ 0 & 0 & A_{NC} \end{pmatrix} \quad (4.2.9)$$

である。CC相互作用は物質中に電子しか存在しないため、電子ニュートリノの部分だけに効いている。NC相互作用からくる物質効果は世代の区別なく効くため、単位行列に比例した形で入っている。単位行列に比例した項は全体の確率振幅の位相を変更するだけなので、遷移確率には影響しない。従って、遷移確率を与えるハミルトニアンは

$$(E_1 + A_{NC})\mathbf{1}_{3\times 3} \quad (4.2.10)$$

を差し引いた

$$M = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.11)$$

を考えればよいことになる。 M は形式的に

$$\tilde{U}^\dagger M \tilde{U} = \text{diag}(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3) \equiv \tilde{E} \quad (4.2.12)$$

と対角化できる。ここで \tilde{U} は物質中の混合角によってパラメトライズされたMNS行列で \tilde{E} も同様に物質中のニュートリノがもつエネルギーである。物質中のDirac方程式は

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \tilde{U} \tilde{E} \tilde{U}^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (4.2.13)$$

となって、形式的に真空中のものと同じ形をしている。従って、密度が一定の物質中を伝播する場合の振動確率は形式的に

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \Re[\tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta j} \tilde{U}_{\alpha k} \tilde{U}_{\beta k}^*] \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{jk} L}{2} \right) + 2 \sum_{j < k} \Im[\tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta j} \tilde{U}_{\alpha k} \tilde{U}_{\beta k}^*] \sin \left(\Delta \tilde{E}_{jk} L \right) \quad (4.2.14)$$

で与えられる。ここで $\Delta \tilde{E}_{jk} = \tilde{E}_j - \tilde{E}_k$ である。また、一般的に物質中の混合行列を解析的に求めることは難しいが、振動確率を求める上で必要な

$$\tilde{X}_j^{\alpha\beta} \equiv \tilde{U}_{\alpha j} \tilde{U}_{\beta j}^* \quad (4.2.15)$$

という形であれば比較的簡単に求めることができる。反ニュートリノを議論するとき

$$U_{\alpha j} \rightarrow U_{\alpha j}^* \quad (4.2.16)$$

と共に

$$A_{CC} \rightarrow -A_{CC} \quad (4.2.17)$$

として、同様の計算をすれば振動確率は求まる。

4.3 木村-高村-横枕の方法

物質中の振動確率を解析的に計算する方法は木村-高村-横枕 [12, 13] によって与えられたが、ここでは [14, 15] による方法で振動確率を求めるために必要な

$$\tilde{X}_j^{\alpha\beta} \equiv \tilde{U}_{\alpha j} \tilde{U}_{\beta j}^* \quad (4.3.1)$$

の求め方を説明する。

まず最初に \tilde{U} はユニタリ行列なので

$$\delta_{\alpha\beta} = [\tilde{U}\tilde{U}^{-1}]_{\alpha\beta} = \sum_j \tilde{U}_{\alpha j} \tilde{U}_{\beta j}^* = \sum_j \tilde{X}_j^{\alpha\beta} \quad (4.3.2)$$

という関係を得る。また

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = (UEU^\dagger + A)_{\alpha\beta} = (\tilde{U}\tilde{E}\tilde{U}^\dagger)_{\alpha\beta} = \sum_j \tilde{U}_{\alpha j} \tilde{E}_j \tilde{U}_{\beta j}^* = \sum_j \tilde{X}_j^{\alpha\beta} \tilde{E}_j \quad (4.3.3)$$

と

$$(\mathcal{M}^2)_{\alpha\beta} = [(\tilde{U}\tilde{E}\tilde{U}^\dagger)^2]_{\alpha\beta} = \sum_j \tilde{U}_{\alpha j} \tilde{E}_j^2 \tilde{U}_{\beta j}^* = \sum_j \tilde{X}_j^{\alpha\beta} \tilde{E}_j^2 \quad (4.3.4)$$

の関係式を得る。これらをまとめると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_3 \\ \tilde{E}_1^2 & \tilde{E}_2^2 & \tilde{E}_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_2^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_3^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \\ (UEU^\dagger + A)_{\alpha\beta} \\ [(UEU^\dagger + A)^2]_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

のように書ける。左辺は Vandermonde 行列と呼ばれる行列で簡単に逆行列を求めることができる

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_1^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_2^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_3^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{21}\Delta\tilde{E}_{31}}(\tilde{E}_2\tilde{E}_3, -(\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3), 1) \\ \frac{-1}{\Delta\tilde{E}_{21}\Delta\tilde{E}_{32}}(\tilde{E}_3\tilde{E}_1, -(\tilde{E}_3 + \tilde{E}_1), 1) \\ \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}}(\tilde{E}_1\tilde{E}_2, -(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2), 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \\ (UEU^\dagger + A)_{\alpha\beta} \\ [(UEU^\dagger + A)^2]_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (4.3.6)$$

のように $\tilde{X}_j^{\alpha\beta}$ を \tilde{E}_j を用いて表すことができる。振動確率を求めるためには物質中のハミルトニアンを対角化するユニタリ行列の形まで必要だったのに対し、木村-高村-横枕の方法では物質中のハミルトニアンの固有値 \tilde{E}_j を何らかの方法で求めるという問題に帰着することができる。 \mathcal{M} の固有値 λ を求めるには、特性方程式

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{1}_{3\times 3} - \mathcal{M}| &= \lambda^3 - \lambda^2 \text{tr} \mathcal{M} + \frac{\lambda}{2} \{(\text{tr} \mathcal{M})^2 - \text{tr} \mathcal{M}^2\} - \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \mathcal{M}^3 - \frac{1}{2} (\text{tr} \mathcal{M}^2)(\text{tr} \mathcal{M}) + \frac{1}{6} (\text{tr} \mathcal{M})^3 \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

を解けばよい。ここで

$$\text{tr} \mathcal{M} = \Delta E_{21} + \Delta E_{31} + A_{CC} \quad (4.3.8)$$

$$\text{tr}\mathcal{M}^2 = \Delta E_{21}^2 + \Delta E_{31}^2 + A_{CC}^2 + 2A(X_2^{ee}\Delta E_{21} + X_3^{ee}\Delta E_{31}) \quad (4.3.9)$$

$$\text{tr}\mathcal{M}^3 = \Delta E_{21}^3 + \Delta E_{31}^3 + A_{CC}^3 + 3A_{CC}^2(X_2^{ee}\Delta E_{21} + X_3^{ee}\Delta E_{31}) + 3A_{CC}(X_2^{ee}\Delta E_{21}^2 + X_3^{ee}\Delta E_{31}^2) \quad (4.3.10)$$

$$X_j^{\alpha\beta} \equiv U_{\alpha j}U_{\beta j}^* \quad (4.3.11)$$

を特性方程式に代入して整理すれば

$$\begin{aligned} 0 = |\lambda\mathbf{1}_{3\times 3} - \mathcal{M}| &= \lambda^3 - \lambda^2(\Delta E_{21} + \Delta E_{31} + A_{CC}) \\ &\quad + \lambda\{\Delta E_{31}A_{CC}(1 - X_3^{ee}) + \Delta E_{21}[\Delta E_{31} + A_{CC}(1 - X_2^{ee})]\} \\ &\quad - A_{CC}\Delta E_{21}\Delta E_{31}X_1^{ee} \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

を得る。これで木村-高村-横枕の方法の説明は終わりである。

物質効果が働く場合の振動確率を求める方法が分かったので、大気ニュートリノ実験における質量階層性と呼ばれる未解決問題について議論してみよう。標準3世代のニュートリノ振動の枠組みでは、ニュートリノの質量固有状態は3つ存在する。それらの質量を m_1, m_2, m_3 としたとき、 $m_1 < m_2 < m_3$ という順番で並んでいるのか、それとも $m_3 < m_1 < m_2$ という順番なのかを問題にするのが質量階層性である。前者の場合を Normal Hierarchy(NH) と呼び、後者の場合を Inverted Hierarchy(IH) と呼ぶ。ここで $m_1 < m_2$ という順番が固定されているのは太陽ニュートリノ実験より分かっているためである。質量階層性は、NH と IH で振動確率が縮退してしまうことによるので、このことを (i) $|\Delta E_{31}| \gg A_{CC}$ 、(ii) $|\Delta E_{31}| \sim A_{CC}$ 、(iii) $|\Delta E_{31}| \ll A_{CC}$ の3つの場合に分けて考える。以下の議論では後述の太陽ニュートリノ実験や大気ニュートリノ実験より $\Delta E_{21} \ll |\Delta E_{31}|$ であることが分かっているため、 ΔE_{21} を無視して考える。

(i) $|\Delta E_{31}| \gg A_{CC}$ の場合

この場合の振動確率は真空振動のものと同じになる。このとき $\Delta E_{31} \rightarrow -\Delta E_{31}$ としても遷移振幅の位相が変わるだけなので振動確率は変わらない。従って、NH と IH では振動確率が縮退していることが分かる。

(ii) $|\Delta E_{31}| \sim A_{CC}$ の場合

まず $\Delta E_{21} \rightarrow 0$ の極限で特性方程式 (4.3.7) を解くと、その解は

$$\lambda = \lambda_-, 0, \lambda_+ \quad (4.3.13)$$

と求まる。ここで

$$\lambda_{\pm} = \frac{\Delta E_{31} + A \pm \Delta \tilde{E}_{31}}{2} \quad (4.3.14)$$

$$\Delta \tilde{E}_{31} = \sqrt{(\Delta E_{31} \cos 2\theta_{13} - A_{CC})^2 + (\Delta E_{31} \sin 2\theta_{13})^2} \quad (4.3.15)$$

とおいた。 $\tilde{E}_1 = \lambda_-$, $\tilde{E}_2 = 0$, $\tilde{E}_3 = \lambda_+$ として木村-高村-横枕の方法を用いると、大気ニュートリノ実験の主なチャンネルの1つである ν_μ の消失確率を求めるのに必要な $\tilde{X}_j^{\mu\mu}$ はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\tilde{X}_1^{\mu\mu} = \frac{\Delta E_{31}c_{13}^2(A_{cc} - \Delta E_{31} + \Delta \tilde{E}_{31})s_{23}^2}{\Delta \tilde{E}_{31}(A_{CC} + \Delta E_{31} - \Delta \tilde{E}_{31})} \quad (4.3.16)$$

$$\tilde{X}_2^{\mu\mu} = c_{23}^2 \quad (4.3.17)$$

$$\tilde{X}_3^{\mu\mu} = \frac{\Delta E_{31} c_{13}^2 (\Delta E_{31} - A_{CC} + \Delta \tilde{E}_{31}) s_{23}^2}{\Delta \tilde{E}_{31} (A_{CC} + \Delta E_{31} + \Delta \tilde{E}_{31})} \quad (4.3.18)$$

ここで $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ である。簡単のため、 $\theta_{13} = 0$ の極限のもとで式 (4.2.14) を用いると振動確率は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} 1 - P_{\mu \rightarrow \mu} &= 4 \sum_{j < k} [\tilde{X}_j^{\mu\mu} \tilde{X}_k^{\mu\mu}] \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{jk} L}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{23} \left\{ (\text{sig} + 1) \sin^2 \left(\frac{(A_{CC} + \Delta E_{31} - |A_{CC} - \Delta E_{31}|) L}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - (\text{sig} - 1) \sin^2 \left(\frac{(A_{CC} + \Delta E_{31} + |A_{CC} - \Delta E_{31}|) L}{4} \right) \right\} \\ &= \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta E_{31} L}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

ここで

$$\text{sig} = \frac{A_{CC} - \Delta E_{31}}{|A_{CC} - \Delta E_{31}|}$$

である。この場合も $\Delta E_{31} \rightarrow -\Delta E_{31}$ としても振動確率は同じで、 θ_{13} の最低次では NH と IH の振動確率が縮退していることが分かる。

(iii) $|\Delta E_{31}| \ll A_{CC}$ の場合

これは大気ニュートリノ実験の高エネルギー領域に相当する。(ii) の場合と同様に $\tilde{E}_1 = \lambda_-$, $\tilde{E}_2 = 0$, $\tilde{E}_3 = \lambda_+$ として $|\Delta E_{31}| \ll A_{CC}$ の極限を考えると

$$\tilde{E}_1 \simeq \Delta E_{31} c_{13}^2, \quad \tilde{E}_2 = 0, \quad \tilde{E}_3 \simeq A_{CC} \quad (4.3.20)$$

を得る。これと合わせて $[\mathcal{M}]_{\mu\mu} \simeq \Delta E_{31} X_3^{\mu\mu}$, $[\mathcal{M}^2]_{\mu\mu} \simeq \Delta E_{31}^2 X_3^{\mu\mu}$ を式 (4.3.6) に代入して $\Delta E_{31} \simeq A_{CC}$ であることを用いると、振動確率を求めるために必要な係数を得ることができる。

$$\tilde{X}_1^{\mu\mu} \simeq \frac{X_3^{\mu\mu}}{c_{13}^2} \quad (4.3.21)$$

$$\tilde{X}_2^{\mu\mu} \simeq 1 - \frac{X_3^{\mu\mu}}{c_{13}^2} \quad (4.3.22)$$

$$\tilde{X}_3^{\mu\mu} \simeq \left(\frac{\Delta E_{31}}{A_{CC}} \right)^2 X_3^{\mu\mu} s_{13}^2 \quad (4.3.23)$$

これらの結果を式 (4.2.14) に代入することによって振動確率は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} 1 - P_{\mu \rightarrow \mu} &= 4 \sum_{j < k} [\tilde{X}_j^{\mu\mu} \tilde{X}_k^{\mu\mu}] \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{jk} L}{2} \right) \\ &\simeq 4 \left(\tilde{X}_1^{\mu\mu} \tilde{X}_2^{\mu\mu} \sin^2 \left(\frac{\Delta E_{31} c_{13}^2 L}{2} \right) + \left(1 - \tilde{X}_3^{\mu\mu} \right) \tilde{X}_3^{\mu\mu} \sin^2 \left(\frac{A_{CC} L}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

ここで \tilde{U} がユニタリーであることから従う $\sum_j \tilde{X}_j^{\mu\mu} = 1$ という関係式を用いた。ここでも振動確率 (4.3.24) は $\Delta E_{31} \rightarrow -\Delta E_{31}$ としても不変である。ちなみに、振動確率 (4.3.24) は θ_{13} が小さいときは $\tilde{X}_3^{\mu\mu} \propto s_{13}^2$ であることを用いると、物質効果の影響がない真空振動の確率に一致することが分かる。

以上より、 $\Delta E_{31} \rightarrow -\Delta E_{31}$ の入れ替えで振動確率が縮退していることが分かった。しかし ΔE_{21} まで含めたより高次の摂動を考慮することによってこの縮退を解消することができるが、その効果は小さいため今の実験では有意な差を測定できていない。

4.4 ニュートリノ振動の実験

標準的3世代の枠組みにおけるニュートリノ振動のパラメータは混合角 $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ 、Dirac の CP 位相 δ 、質量2乗差 $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ である。主に $\theta_{12}, \Delta m_{21}^2$ は太陽から飛来するニュートリノを観測することによって決まる。また、 $\theta_{23}, \Delta m_{31}^2$ は宇宙線が大気に衝突したときに生成されるニュートリノを観測する大気ニュートリノ実験によって決まる。 θ_{13} は原子炉からのニュートリノを観測することによって決まる。また、人工的にニュートリノを生成して、それを観測する加速器実験も行われている。この節では、これらの実験に簡単に紹介する。

4.4.1 太陽ニュートリノ

太陽ニュートリノとは、太陽の中で起きている核融合反応で作られるニュートリノのことである。太陽の中では

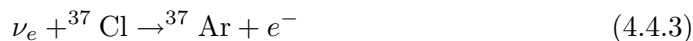


という反応が起きている。ここで Q は Q 値と呼ばれる値で、この過程で解放されるエネルギーである。(4.4.1) の反応の場合は

$$Q = 4m_p + 2m_e - m_{\text{He}} = 26.731\text{MeV} \quad (4.4.2)$$

で与えられる。地球上で太陽の明るさが分かるため、どの程度のニュートリノが飛来するかを標準太陽模型と呼ばれるもので見積もることができる。標準太陽模型によれば、飛来するニュートリノは数 MeV のエネルギーをもっている。

Homestake 実験は



という反応を使って、太陽ニュートリノを観測した。この反応のエネルギーしきい値は 0.81MeV である。 ${}^{37}\text{Ar}$ の半減期が 35 日であるので、その期間以上測定を続ければ測定装置の中の ${}^{37}\text{Ar}$ は一定になる。このアルゴンの量からニュートリノの飛来数を測定する。しかし、この方法では飛来した方向や時刻、またニュートリノのエネルギーが分からないため、太陽ニュートリノであると断定する根拠が十分でない。とりあえずその不定性には目を瞑ることにすると、実験結果は標準太陽模型の予言の約 $1/3$ ほどの飛来数しか

いという結果だった。これが、太陽ニュートリノ問題の始まりである。その後、ガリウム実験、カミオカンデ、スーパーカミオカンデ、SNO、KamLand 等の実験によって理論値よりも少ない観測値が報告された。これらの実験結果を合わせると

$$\Delta m_{21}^2 = 7.58_{-0.26}^{+0.22} \times 10^{-5} \text{eV}^2, \quad \sin^2 \theta_{12} = 0.306_{-0.015}^{+0.018} \quad (4.4.4)$$

という値が得られる [1]。

4.4.2 大気ニュートリノ

大気ニュートリノは宇宙線が大気中の原子核と相互作用することによって作られる。このときに作られるニュートリノのエネルギースペクトルは数 GeV にピークをもつものである。宇宙線の主な粒子は陽子である。陽子と大気中の原子核が相互作用した結果、パイオンが作られ、それが崩壊してニュートリノが生成される。

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (4.4.5)$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (4.4.6)$$

このときに生成されたミューオンは電子に崩壊する。

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (4.4.7)$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (4.4.8)$$

(4.4.5)~(4.4.8) の過程で作られるニュートリノを大気ニュートリノという。これらから分かるように、ニュートリノのフラックスの比は理論的に

$$\frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e} \simeq 2 \quad (4.4.9)$$

となる。しかし実測値はこの比が2よりも小さい。また等方的であるはずの宇宙線由来の大気ニュートリノが、飛来方向によって $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)/(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ の値が異なることが実験によって明らかになった。これらを大気ニュートリノ問題と呼ぶ。大気ニュートリノも様々な実験で調べられているが、ここでは本研究に関係があるスーパーカミオカンデの実験について紹介する。

スーパーカミオカンデは岐阜県飛騨市神岡町にある神岡鉱山で行われている実験である。この実験では水チェレンコフ光を観測することによって、間接的にニュートリノを観測している。水チェレンコフ光とは、荷電レプトンが水中における光速より速い速度で運動することによって発せられる光であり、荷電レプトンの進行方向に円錐型の拡がりをもつ。この方法は太陽ニュートリノのところで述べた Homestake 実験の化学変化を用いた観測とは違い、ニュートリノの飛来方向などをリアルタイムで観測することができる。ニュートリノと水中の原子核との散乱断面積は非常に小さいので、大量の水が必要である。また、光が減衰しないように高純度の水が必要である。スーパーカミオカンデは50キロトンの超純水を蓄えることができる水タンクを用いている。このタンクは

内水槽と外水槽いう2層構造になっていて、内水槽には水タンクの内向きに光電子増倍管 (PhotoMultiplier Tube, PMT) と呼ばれる水チェレンコフ光を検出する装置が取り付けられている。また、外水槽には外向きに PMT が取り付けられている。この外向きの PMT は主に宇宙線ノイズを少なくするために用いる。

大気ニュートリノ実験は以下の反応を用いてニュートリノを観測している。

$$\nu_{\mu} + N \rightarrow \mu + X \quad (4.4.10)$$

$$\nu_e + N \rightarrow e + X \quad (4.4.11)$$

$$\nu_{\alpha} + N \rightarrow \nu_{\alpha} + X \quad (4.4.12)$$

ここで N は水中の原子核で、 X は相互作用の結果できた核子を表す。上の2つの反応は CC 相互作用で、最後の反応は NC 相互作用である。スーパーカミオカンデは磁化された測定器を用いていないため、質量が違うだけの荷電レプトンを区別することは難しい。しかし、電子は水中を走るとクーロン多重散乱などによってチェレンコフ光の輪郭がぼやけるのに対し、ミューオンは輪郭がはっきりしたチェレンコフ光を出す。この違いによってニュートリノのイベントを判別している。また、タウニュートリノは CC 相互作用でタウを作るが、タウがすぐに他のレプトンやハドロンに崩壊してしまうため、検出することが難しい。冒頭でも述べたが、大気ニュートリノのエネルギースペクトルは数 GeV にピークをもつので、その場合の主要な反応は準弾性散乱と呼ばれる、上の式の X にパイオンを含まない CC 相互作用による散乱過程である。この反応の散乱断面積は理論的不定性があるため、その不定性をキャンセルするために電子ニュートリノとミューニュートリノの事象の比を観測量とする。

スーパーカミオカンデでは大気ニュートリノの事象を以下のように分類する。

- Fully Contained (FC) Events ... 検出器の中の水とニュートリノが反応し、その過程で生成された粒子が全て内水槽にの中にとどまる事象。
- Partially Contained (FC) Events ... 検出器の中の水とニュートリノが反応し、その過程で生成された粒子の一部が内水槽にとどまり、その残りが外水槽でとまる事象。
- upward-through-going muon ... 地球の裏側から飛んできたミューニュートリノが検出器の下の岩盤と反応して、CC 相互作用によってできたミューオンが検出器に侵入し、そのまま通過する事象。
- upward-stopping-going muon ... 地球の裏側から飛んできたミューニュートリノが検出器の下の岩盤と反応して、CC 相互作用によってできたミューオンが検出器に侵入し、水槽内にとどまる事象。
- Sub-GeV Events ... FC Events において、ニュートリノのエネルギーが 1.33GeV より小さい事象。
- Multi-GeV Events ... FC Events において、ニュートリノのエネルギーが 1.33GeV より大きい事象。

これらの分類は、それぞれに関与するニュートリノのエネルギーが違うこと、また Sub-GeV と Multi-GeV の区別は観測される電子やミューオンの運動方向とニュートリノの飛来方向の成す角の相関に差があることが1つの理由である。それぞれの分類におけるニュートリノのエネルギーは、FC が1GeV 付近、PC と upward-stopping-going muon は10GeV 付近、upward-through-going muon は100GeV 付近である。

観測量は

$$\left(\frac{\mu}{e}\right)_{data} \quad (4.4.13)$$

である。ここで μ, e はそれぞれ μ の観測数と e の観測数である。実際に考えるのは、モンテカルロシミュレーションとの比で

$$R \equiv \left(\frac{\mu}{e}\right)_{data} / \left(\frac{\mu}{e}\right)_{MC} \quad (4.4.14)$$

という量である。スーパーカミオカンデの実験では、この R が高いエネルギー領域で天頂角分布に異常がみられる。ここで天頂角は真上からやってくるニュートリノを 0° とし、真下からやってくるものを 180° とする角度である。高いエネルギーの事象を使うメリットは、散乱の過程において、ニュートリノと荷電レプトンの運動方向がよく保存されるためである。現在の大気ニュートリノ実験による実験値のベストフィットは

$$|\Delta m_{31}^2| = 2.35_{-0.09}^{+0.12} \times 10^{-3} \text{eV}^2, \quad \sin^2 \theta_{23} = 0.42_{-0.03}^{+0.08} \quad (4.4.15)$$

となっている [1]。

4.4.3 原子炉ニュートリノ実験

原子炉ニュートリノ実験は原子炉の核分裂反応から生成される反電子ニュートリノを観測する実験である。 θ_{13} に対しては CHOOZ[6] によって上限値が与えられているだけだったが、2011年の Double Chooz[7]、翌年2012年の Daya Bay[9]、RENO[10]、Double Chooz[8] によって θ_{13} の値が高い精度で測定された。これらの実験は原子炉で生成される反電子ニュートリノの $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e$ というチャンネルの消失確率をみる実験である。原子炉実験は基線長が短いため、物質効果が働かず精度の高い θ_{13} の測定が行えることがメリットである。ニュートリノの検出は逆ベータ崩壊を用いる。

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ n \quad (4.4.16)$$

この反応における終状態の陽電子がすぐに電子と対消滅をして光を出し、中性子は熱中性子化して、原子核に捕獲されてガンマ線が放出される。この2つのシグナルをもってニュートリノを観測する。実験のベストフィットは

$$\sin^2 \theta_{13} = 0.0251 \pm 0.0034 \quad (4.4.17)$$

となっている [1]。

第 5 章

非標準相互作用

前章までは標準模型にニュートリノの質量を導入した、標準 3 世代のニュートリノ振動の枠組みを議論してきた。この章では標準模型を超える新しい物理について考える。ここで考える新しい物理はフレーバーに依存した非標準相互作用 (Non-Standard Interactions, NSI) と呼ばれるものである。この相互作用に対する実験からの制限はあまり強くなく、この相互作用が存在したとしても現在の実験データと矛盾しないことが知られている。まず最初に NSI を導入し、その後現在までに知られている NSI への制限を議論する。最後に NSI を大気ニュートリノを用いて議論する理由を述べる。

5.1 フレーバーに依存した非標準相互作用

標準模型には、すでに述べたように、CC 相互作用と NC 相互作用が存在しそれらは低エネルギーの現象においてゲージ場のプロパゲーターを 1 点につぶした 4-fermi 相互作用で記述できる。ここでは現象論的にその 4-fermi 相互作用を拡張した

$$\mathcal{L}_{NP} = -2\sqrt{2}G_F[\bar{\nu}_\alpha\gamma^\mu\nu_\beta][\epsilon_{\alpha\beta}^{fL}\bar{f}_L\gamma_\mu f_L + \epsilon_{\alpha\beta}^{fR}\bar{f}_R\gamma_\mu f_R] \quad (5.1.1)$$

という NC 相互作用を考える。ここで G_F はフェルミ定数、 $\epsilon_{\alpha\beta}^{fP}$ はニュートリノが物質中のカイラリティ P のフェルミオンと相互作用して、 $\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha$ となるときに結合定数の強さのフェルミ定数に対する比である。より一般的には物質中のフェルミオンも変化することが考えられるが、ニュートリノの振動確率に影響があるのはコヒーレントな前方散乱であることが知られているので、バックグラウンドのフェルミオンは相互作用の前後で変わらない場合を考えればよい。ここで式 (5.1.1) は $SU(2)_L$ ゲージ対称性を明らかに破っていることに注意しなくてはならない。ニュートリノと荷電レプトンは $SU(2)_L$ 2 重項を組み、荷電レプトンのエキゾチックな 4 点相互作用は実験で強く制限されている。そこで新しい荷電レプトンの 4 点相互作用がなく、レプトン数の保存などを要請すると、式 (5.1.1) を導くような高次元演算子として次元 6 演算子や次元 8 演算子を考えることができる。[2] しかし NSI を導くような具体的な模型は知られていないため、ここでは現象論的に導入した式 (5.1.1) のまま話を進めることにする。また、NC 相互作用だけを考える

理由は、エキゾチックな CC 相互作用が強く制限されているためである。もしフレーバーが保存しないようなエキゾチックな CC 相互作用が存在したとすると、短い基線長の実験でニュートリノのフレーバーが変わることが確認されているはずであるが、実際は確認されていない。従ってニュートリノが空間を伝播するときに影響がある NC 相互作用を考える。

次に、NSI が存在することによってニュートリノの物理にどのような影響について考える。NSI は NC 相互作用なので、4.2 で議論した物質効果に影響が出る。

$$\begin{pmatrix} A_{cc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A_{cc} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_{ee} & \epsilon_{e\mu} & \epsilon_{e\tau} \\ \epsilon_{e\mu}^* & \epsilon_{\mu\mu} & \epsilon_{\mu\tau} \\ \epsilon_{e\tau}^* & \epsilon_{\mu\tau}^* & \epsilon_{\tau\tau} \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

ここで $\epsilon_{\alpha\beta}$ は

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \sum_{P=L,R} \sum_{f=e,u,d} \epsilon_{\alpha\beta}^{fP} n_f / n_e \quad (5.1.3)$$

である。また n_f はフェルミオン f の数密度である。非対角の物質効果はニュートリノのフレーバーを変える働きをし、対角成分はニュートリノのフレーバーを保つように働く。

5.2 非標準相互作用への制限

NSI への直接的な制限は主にニュートリノビームを標的にぶつけ、そのときの散乱断面積をみることによって得られる。この種の制限は CHARM や NuTeV がミューニュートリノと物質の結合の仕方に制限をつけている。他には $\nu_e e \rightarrow \nu e$ の散乱断面積を精度よく測った LSND の結果より電子ニュートリノと物質との結合の強さにも制限がついている。また、 $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}\gamma$ を測った LEP よりタウニュートリノへの制限もついている。しかし、1つの実験ですべての $\epsilon_{\alpha\beta}^{fP}$ に対して制限をつけることができないということに注意する必要がある。大気ニュートリノを考えるときの、NSI に対する大域的な制限は [3] によって与えられた。

$$\begin{pmatrix} |\epsilon_{ee}| < 4 \times 10^0 & |\epsilon_{e\mu}| < 3 \times 10^{-1} & |\epsilon_{e\tau}| < 3 \times 10^0 \\ & |\epsilon_{\mu\mu}| < 7 \times 10^{-2} & |\epsilon_{\mu\tau}| < 3 \times 10^{-1} \\ & & |\epsilon_{\tau\tau}| < 2 \times 10^1 \end{pmatrix} \quad (5.2.1)$$

“大気ニュートリノを考えるときの” という但し書きをしたのは、地球は電子、陽子、中性子で構成されており、それらの数の比が 1:1:1 であるので $\epsilon_{\alpha\beta}$ が

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \sum_{P=L,R} (\epsilon_{\alpha\beta}^{eP} + 3\epsilon_{\alpha\beta}^{uP} + 3\epsilon_{\alpha\beta}^{dP}) \quad (5.2.2)$$

で与えられるためである。ここで陽子は uud 、中性子は udd で構成されていることを用いた。従って、ここでの $\epsilon_{\alpha\beta}$ に対する制限は太陽ニュートリノなどの他の実験にそのまま適用できるものではない。

さらに、それぞれ $\epsilon_{\alpha\beta}$ が独立だと仮定してきたが、お互いに関係があることを許したときの大気ニュートリノ実験からの制限は [4] によって与えられた。この制限は本研究にお

いて大事な部分を占めているので、以下で詳しく説明する。NSI への制限 (5.2.1) から分かるようにミューニュートリノが関係する部分は他のものに比べて強く制限されている。

$$|\epsilon_{e\mu}| \ll 1, |\epsilon_{\mu\mu}| \ll 1, |\epsilon_{\tau\mu}| \ll 1 \quad (5.2.3)$$

従って、本研究においてはこれらの値を 0 と取る。すると我々が考える NSI を含んだニュートリノの伝播を記述する方程式は以下のようになる。

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \left[U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \end{pmatrix} U^\dagger + A_{CC} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_{ee} & 0 & \epsilon_{e\tau} \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{e\tau}^* & 0 & \epsilon_{\tau\tau} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

この式から分かるように、NSI は $\nu_e - \nu_\tau$ セクターにのみ働くことが分かる。上式の第 1 項の真空振動項は $1/E$ というファクターがかかっていることに注意すると、エネルギーが高くなればなるほど振動確率への寄与が小さくなり、upward-through-going muon などの高エネルギー領域のイベントでは真空振動項よりも上式第 2 項の物質効果が優勢になる。スーパーカミオカンデの高エネルギー領域の実験結果は、 $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ の真空振動で説明できることが知られているため、このままでは NSI は実験結果と相容れない。そこでスーパーカミオカンデの高エネルギー領域の実験結果が ν_μ の消失確率をみていることに注目して、 $\nu_e - \nu_\tau$ セクターを物質効果に対角的になるように回転させた新しい基底 ($\nu'_e, \nu_\mu, \nu'_\tau$) を考える。この基底を物質基底と呼ぶことにしよう。

$$A_{CC} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_{ee} & 0 & \epsilon_{e\tau} \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{e\tau}^* & 0 & \epsilon_{\tau\tau} \end{pmatrix} = \mathcal{O} \begin{pmatrix} \lambda'_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'_\tau \end{pmatrix} \mathcal{O}^\dagger \quad (5.2.5)$$

$$\begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} = \mathcal{O}^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (5.2.6)$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -e^{i\phi} \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ e^{-i\phi} \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (5.2.7)$$

$$\phi = \arg(\epsilon_{e\tau}) \quad (5.2.8)$$

$$\tan 2\beta = \frac{2|\epsilon_{e\tau}|}{1 + \epsilon_{ee} - \epsilon_{\tau\tau}} \quad (5.2.9)$$

ここで

$$\lambda'_e = A_{cc}(1 + \epsilon_{ee} + \epsilon_{\tau\tau} + \sqrt{(1 + \epsilon_{ee} - \epsilon_{\tau\tau}) + 4|\epsilon_{e\tau}|^2}) \quad (5.2.10)$$

$$\lambda'_\tau = A_{cc}(1 + \epsilon_{ee} + \epsilon_{\tau\tau} - \sqrt{(1 + \epsilon_{ee} - \epsilon_{\tau\tau}) + 4|\epsilon_{e\tau}|^2}) \quad (5.2.11)$$

である。上で定義した物質基底での Dirac 方程式は

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} = \left[U' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \end{pmatrix} U'^\dagger + \begin{pmatrix} \lambda'_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'_\tau \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} \quad (5.2.12)$$

という形になる。ここで

$$U' = O^\dagger U \quad (5.2.13)$$

と定義した。 $\nu_\mu \leftrightarrow \nu'_\tau$ の真空振動になるためには

$$\lambda'_\tau = 0 \quad (5.2.14)$$

となればよい。従って、この極限において $\epsilon_{\tau\tau}$ は

$$\epsilon_{\tau\tau} = \frac{|\epsilon_{e\tau}|^2}{1 + \epsilon_{ee}} \quad (5.2.15)$$

という関係をもつことになる。 $\epsilon_{ee}, |\epsilon_{e\tau}|, \epsilon_{\tau\tau}$ の3つをフリーパラメーターとして実験との整合性を調べた Friedland-Lunardini[4] によると、 ϵ_{ee} を固定した $|\epsilon_{e\tau}| - \epsilon_{\tau\tau}$ 平面において式 (5.2.15) が示すような2次関数の領域のみが実験結果と矛盾がないことが分かっている。彼らの解析で得られた $|\epsilon_{e\tau}| - \epsilon_{\tau\tau}$ の許容領域を図 5.1 に示す。この解析はスーパーカミオカンデで得られた 1489 日間のデータを用いて行われた。図 5.1 から明らかに分かるように、各 ϵ_{ee} の値に対して式 (5.2.15) を満たすような放物線上のパラメーターのみが許されている。従って式 (5.2.15) という関係があると仮定することは、解析的にも数値計算的にも裏付けされたものであることが分かる。ここで、本研究は要請 (5.2.15) が厳密に成り立つとして解析をする。

ここで、物質基底で書いた Dirac 方程式 (5.2.12) に出てくるレプトン混合行列に注意する必要がある。式 (5.2.13) によってレプトン混合行列が新しく定義されているため、混合角や質量 2 乗差が形式上新しく定義されたことになる。従って、大気ニュートリノ実験の結果と矛盾がない NSI の存在は真空振動におけるニュートリノ振動のパラメーターを変えることを意味している。ここで問題となることは、低エネルギー領域の実験データ、すなわち Sub-GeV Events との整合性である。Sub-GeV Events では真空振動項が優勢なため、物質効果を無視できる。従ってそこから得られるニュートリノ振動のパラメーターは本当の真空振動のパラメーターである。これらを考慮するとあまりにも大きい NSI は大気ニュートリノの高エネルギー領域と低エネルギー領域の間に矛盾を生じてしまう。この矛盾を生じさせないための制限は、式 (5.2.9) で定義した β に対する制限に焼き直すことができる。仮定 (5.2.15) のもとで β は

$$\tan \beta = \frac{|\epsilon_{e\tau}|}{1 + \epsilon_{ee}} \quad (5.2.16)$$

で表される。[5] では 2.5σ で $\tan \beta < 1.5$ という制限が与えられている。

最後にまとめると、ニュートリノが空間を伝播するときの時間発展は

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \left[U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \end{pmatrix} U^\dagger + A_{CC} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_{ee} & 0 & |\epsilon_{e\tau}| e^{i\phi} \\ 0 & 0 & 0 \\ |\epsilon_{e\tau}| e^{-i\phi} & 0 & \frac{|\epsilon_{e\tau}|^2}{1 + \epsilon_{ee}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (5.2.17)$$

という方程式に従う。

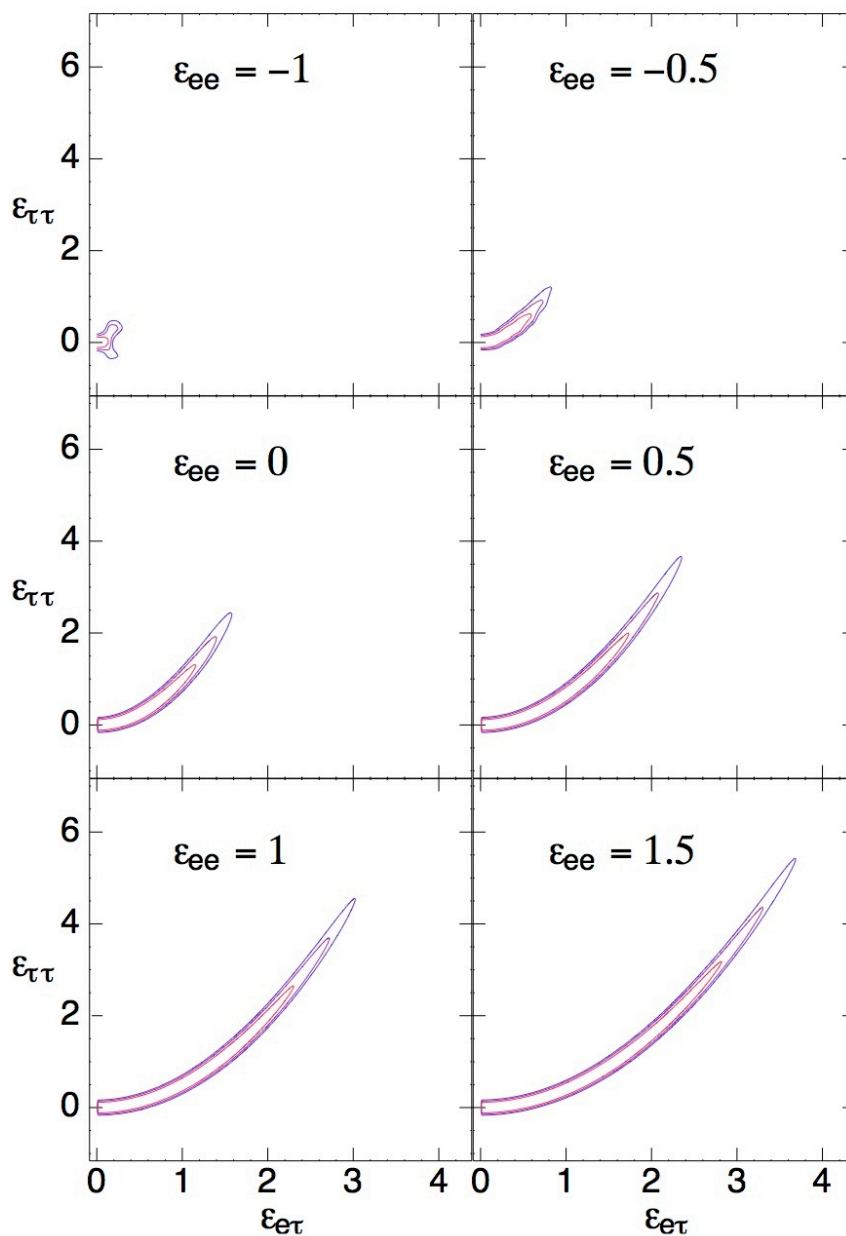


図 5.1 ϵ_{ee} を固定したときの、 $|\epsilon_{e\tau}| - \epsilon_{\tau\tau}$ 平面における許容領域。3本の線は内側から外側に向かって $\Delta\chi^2 \equiv \chi_{min}^2 - \chi^2 = 7.81, 11.35, 14.16$ を表す。信頼度に直せば、内側から 3σ, 95%, 99% [4]

物質効果は基線長が長くないと効かないことが知られており、地球の電子密度を考えるとニュートリノのエネルギーが 10GeV 程度のときが物質効果が顕著になる。これらの条件を満たしているのは、大気ニュートリノ実験である。従って本研究では大気ニュートリノ実験を行っているスーパーカミオカンデの実験結果を用いて NSI への制限をつけるとともに、次世代の検出器であるハイパーカミオカンデを想定して解析を行うことが最適である。

第 6 章

解析方法

この章では大気ニュートリノ実験からくる NSI への制限をどのように求めるかについて述べる。先行研究は Friedland らによって与えられている。[4, 5] 本研究は、先行研究において示唆された $\epsilon_{\tau\tau} = \frac{|\epsilon_{e\tau}|^2}{1+\epsilon_{ee}}$ という関係が厳密に成り立っていると仮定して解析していることが新しい。また、先行研究よりも多くの NSI パラメーターについて解析している。これらの解析は χ^2 検定によるものである。

6.1 検出器において観測されるイベント数

大気ニュートリノ実験を行っているスーパーカミオカンデは、ニュートリノの飛来数をフレーバーごとに数えている。現在のスーパーカミオカンデの解析において、ニュートリノと反ニュートリノを各イベントごとに区別することはできないが、運動学的な違いや終状態のパイオンを用いて統計的に区別することができる。スーパーカミオカンデで得られているイベント数を表 6.1 に示す。

ニュートリノのエネルギーが幅 $E_j \sim E_{j+1}$ にあるときのイベント数 N_j は

$$N_j(\varphi) = (\text{観測時間}) \times V \rho_t \int_{E_j}^{E_{j+1}} dE \sigma(E) f(E) P(E, L(\varphi)) \quad (6.1.1)$$

で与えられる。ここで V は検出器の有効体積、 ρ_t は水中の原子核の密度、 $\sigma(E)$ はニュートリノと水中の原子核との散乱断面積、 $f(E)$ は大気ニュートリノのフラックス、 $P(E, L(\varphi))$ は振動確率、 φ は天頂角である。天頂角によりニュートリノが走る基線長が異なり、それに伴って振動確率も変わるため、イベント数が天頂角依存性をもつ。NSI は振動確率に影響を及ぼすため、それによってイベント数が変化する。このときのイベント数を実験値と比較することによって、NSI への制限をつける。実験値との比較に用いるイベント数はモンテカルロシミュレーションによって計算した。この計算は [11] を基にして行った。

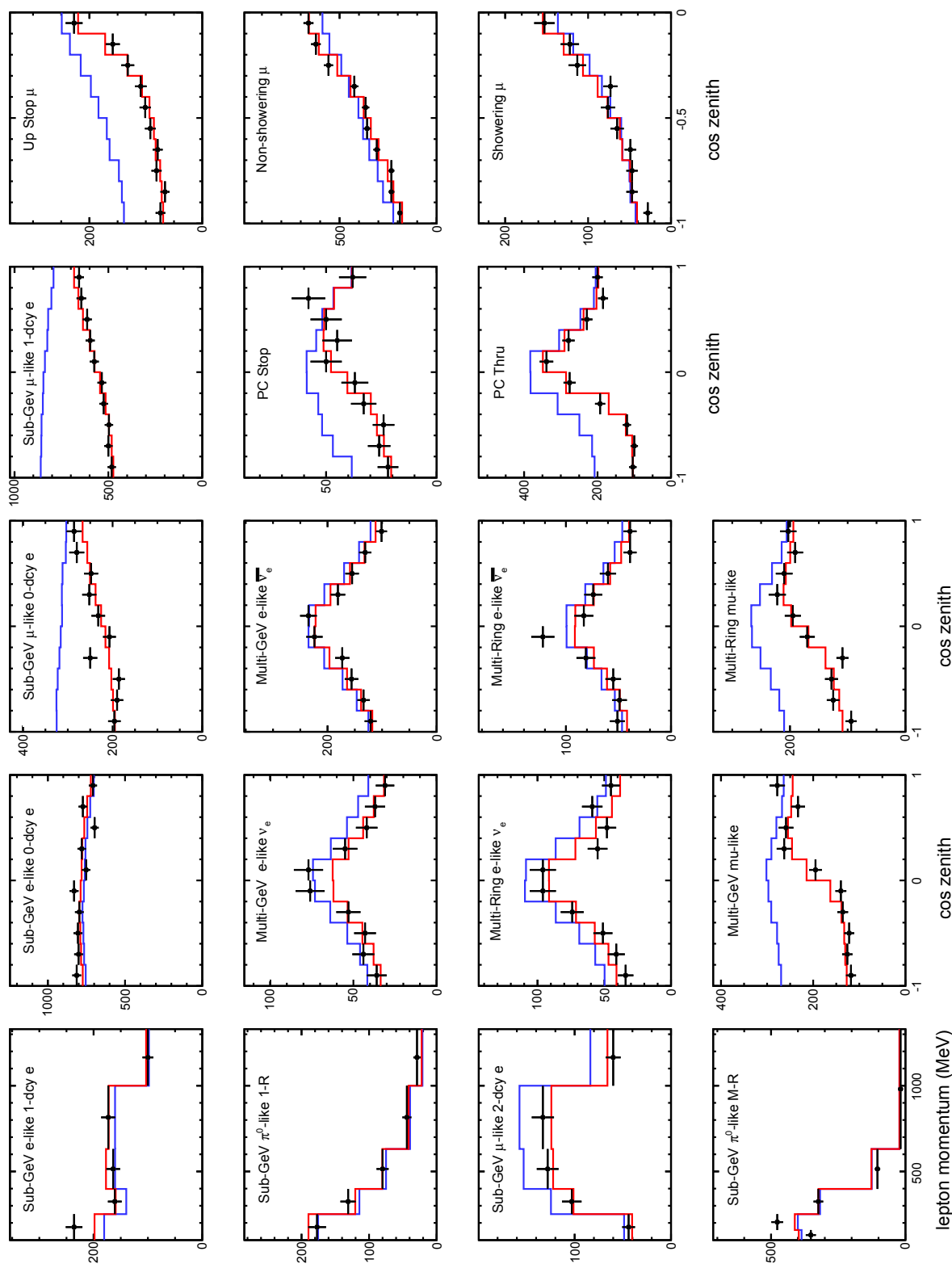


図 6.1 スーパーカミオカンデにおけるイベント数 [16, 17, 18]

6.2 振動確率

物質効果が存在するときに振動確率を解析的に求めることが難しいことは先に議論した通りだが、物質密度が一定でない場合はより難しくなる。地球の物質密度は一様でなく、中心になればなるほど高くなる。従って地球内部を伝播するニュートリノのハミルトニアンは、物質密度に比例する物質効果の項が時間変化することによって、時間依存性をもつ。このような状況で Dirac 方程式を解くことは数値的にも難しいので、ニュートリノの基線を分割して、その区間における物質密度を一定として扱って遷移振幅を計算する方法をとった。すなわち、 $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ の遷移振幅 $\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}(L)$ を

$$\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \sum_{\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1}} \mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \gamma_1}^{(1)}(\Delta L) \mathcal{A}_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2}^{(2)}(\Delta L) \cdots \mathcal{A}_{\gamma_{n-1} \rightarrow \beta}^{(n)}(\Delta L) \quad (6.2.1)$$

と計算した。ここで L は基線長で、 $\Delta L = L/n$ である。 $\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}^{(k)}$ ($k = 1 \cdots n$) は基線においてニュートリノが生成されてから距離 $(k-1)\Delta L \sim k\Delta L$ の間を伝播するときの物質密度を平均化して求めた遷移振幅である。このように基線を分割すれば密度一定の Dirac 方程式を解けばよいだけなので、これは数値的に解くことができる。ここで分割数 n は小さい値から始め、振動確率が収束するまで大きくしていく。

まずニュートリノの基線が天頂角によって異なることを考慮する。地球が完全な球体であると仮定すると、大気ニュートリノ実験における基線の幾何は図 6.2 のようになる [19]。ここで D は検出器、 R は地球の半径、 h はニュートリノが生成されたときの地上からの高さ、 φ は天頂角、 L が基線長である。このような幾何を考えると、基線長 L は

$$L = \sqrt{(R+h)^2 - R^2 \sin^2 \varphi} - R \cos \varphi \quad (6.2.2)$$

となる。また、地球の物質密度は図 6.3 のようになっている。普通の物質は陽子、中性子、電子の数が近似的にそれぞれ同じ数だけあると考えられるので、地球の物質密度 ρ から電子数密度 N_e を求めることができる。これを用いると物質効果は

$$A_{CC} = \sqrt{2} G_F N_e = 1.39 \times 10^{-14} \rho \quad (6.2.3)$$

のように表すことができる。 $\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}^{(k)}$ を求めるためには、物質中のハミルトニアン

$$H^{(k)} = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \end{pmatrix} U^\dagger + A_{CC}^{(k)} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_{ee} & 0 & \epsilon_{e\tau} \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{e\tau}^* & 0 & \epsilon_{\tau\tau} \end{pmatrix} \quad (6.2.4)$$

を対角化すればよいので、このハミルトニアンを数値的に対角化することを考える。ここで ρ は、基線においてニュートリノが生成されてから距離 $(k-1)\Delta L \sim k\Delta L$ を伝播しているときの物質密度を平均化したものを用いる。

一般論として、ハミルトニアンは複素行列であるがエルミートなので実対称行列の対角化の方法が応用できる。一般のエルミート行列 H は実固有値をもつので、固有方程式は

$$H \mathbf{u}_j = E_j \mathbf{u}_j \quad (6.2.5)$$

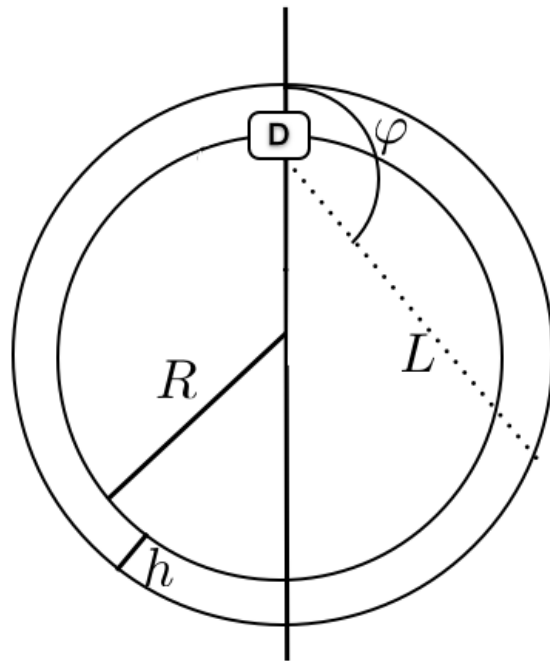


図 6.2 基線の幾何

となる。この方程式において

$$H = A + iB \tag{6.2.6}$$

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{x}_j + i\mathbf{y}_j \tag{6.2.7}$$

と書き直すことによって固有方程式は以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{y}_j \end{pmatrix} = E_j \begin{pmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{y}_j \end{pmatrix} \tag{6.2.8}$$

ここでエルミートである条件 $H^\dagger = H$ は

$$A^T - iB^T = A + iB \tag{6.2.9}$$

のように書くことができ、このことから行列 A, B は

$$A^T = A, \quad B^T = -B \tag{6.2.10}$$

という関係式を満たし、式 (6.2.8) に出てくる行列

$$V = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = V^T \tag{6.2.11}$$

は実対称行列であることが分かる。実対称行列は Jacobi 法という方法で対角化することができる [20]。この方法は実対称行列が直交行列を用いて対角化できること、また直交行列の積は直交行列であることを利用した方法である。対角化する行列は対称行列なので、右上半分だけを考えればよい。まず最初にその中で最も絶対値が大きい要素を探し出す。

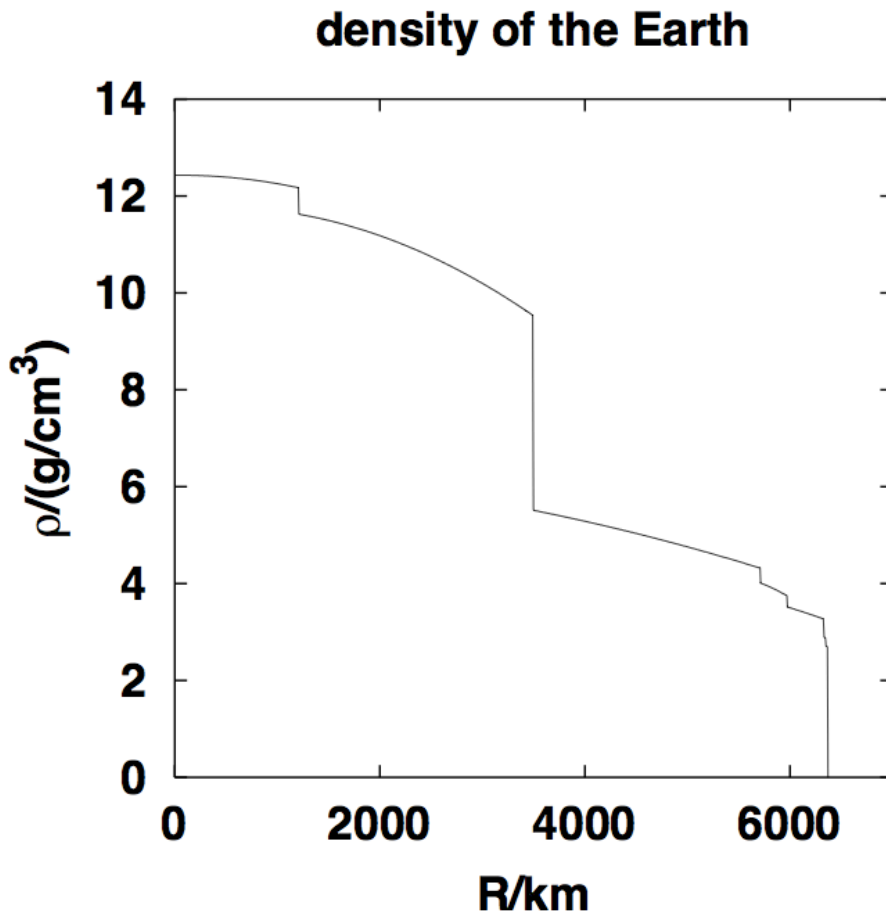


図 6.3 地球中の物質密度

その要素が行列の (i,j) 成分であったとき、それが 0 になるように (i,j) 平面を回転させる。

すなわち

$$V \rightarrow R_{ij}^{-1} V R_{ij} \tag{6.2.12}$$

という相似変換を行う。ここで R_{ij} は回転行列である。

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{ij} & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_{ij} & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & -\sin \theta_{ij} & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.2.13}$$

この操作を次々に行い、全ての非対角成分が全て 0 になるまで相似変換を続ければ対角化

をすることができる。ここで遷移振幅を求める問題に戻ると、いま考えているハミルトニアンは 3×3 行列なので、 V を対角化した結果は

$$(R_1 \cdots R_n)^{-1} V R_1 \cdots R_n = \text{diag}(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3) \quad (6.2.14)$$

となる。ここで固有値が2つずつ出てきているのは V の固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{y}_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathbf{y}_j \\ \mathbf{x}_j \end{pmatrix} \quad (6.2.15)$$

が同じ固有値をもつためである。また $R \equiv R_1 \cdots R_n$ の 1~3 列目の上3個と下3個の成分はそれぞれハミルトニアンの固有ベクトルの実部と虚部である。

$$\mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} R_{j1} \\ R_{j2} \\ R_{j3} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} R_{j4} \\ R_{j5} \\ R_{j6} \end{pmatrix} \quad (6.2.16)$$

この固有ベクトル \mathbf{u}_j を用いれば、ニュートリノが生成されてから距離 $(k-1)\Delta L \sim k\Delta L$ を伝播しているときの $\tilde{U}^{(k)}$ が

$$\tilde{U}^{(k)} = (\mathbf{u}_1^{(k)}, \mathbf{u}_2^{(k)}, \mathbf{u}_3^{(k)}) \quad (6.2.17)$$

と求まる。これを用いれば $\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}^{(k)}$ は

$$\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}^{(k)} = \sum_j \tilde{U}_{\alpha j}^{(k)} \tilde{U}_{\beta j}^{(k)} e^{-i\tilde{E}_j^{(k)} \Delta L} \quad (6.2.18)$$

と求まる。これを用いれば $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ の振動確率は以下のように求まる。

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = |\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}|^2 = \left| \sum_{\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1}} \mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \gamma_1}^{(1)} \mathcal{A}_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2}^{(2)} \cdots \mathcal{A}_{\gamma_{n-1} \rightarrow \beta}^{(n)} \right|^2 \quad (6.2.19)$$

6.3 χ^2 検定

NSIがある値をとったときに予想されるイベント数が、実際に観測されているイベント数とどの程度差があるかを定量的に調べる方法として、今回は χ^2 検定というものを用いた。 χ^2 検定とは、例えば n 個の測定値があったとする。

$$(x_1, y_2), \cdots, (x_i, y_i), \cdots, (x_n, y_n) \quad (6.3.1)$$

これらのデータから

$$y_i = f(x_i; \alpha_j) \quad (6.3.2)$$

という関係式で測定結果をフィットしようとしたときに、最も測定結果をよく再現する理論のパラメーターの組 α_j を決めるときに用いる方法である。いま、 y_i がそれぞれ正規分布 $N(f(x_i; \alpha_j), \sigma_i^2; y_i)$ に従っていると考え、ここで平均値が μ で分散が σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2; x)$ とは

$$N(\mu, \sigma^2; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (6.3.3)$$

である。この正規分布を用いれば、測定値の組 (6.3.1) が得られる確率は

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{(y_i - f(x_i; \alpha_j))^2}{2\sigma_i^2}\right] \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f(x_i; \alpha_j))^2}{\sigma_i^2}\right] \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

で与えられる。測定結果はこの確率が最大であるから得られたと考えられるので、理論のパラメーター α_j は

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f(x_i; \alpha_j))^2}{\sigma_i^2} \quad (6.3.5)$$

が最小になるように定められる。従って、様々な理論のパラメーターである NSI の値において χ^2 を求め、それらを比べることで定量的に実験値との違いを議論することができる。

今までの議論は統計誤差である分散のみを考えてきたが、実際の実験では系統誤差と呼ばれる誤差も含まれる。この系統誤差とは、大気ニュートリノのフラックスに関する不定性などである。もしそのような不定性があるときは上で述べた χ^2 の定義を拡張して

$$\chi^2 \equiv \min_{\beta} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - (1 + \beta)f(x_i; \alpha_j))^2}{\sigma_i^2} + \left(\frac{\beta}{\sigma_{\beta}}\right)^2 \right\} \quad (6.3.6)$$

というものを考えればよい。もし系統誤差がない $\sigma_{\beta} \rightarrow 0$ の極限では β に関して最小化するときに $\beta = 0$ が選ばれるので、この極限において χ^2 の定義は式 (6.3.6) と式 (6.3.5) が一致する。

6.4 NSI への制限

NSI への制限は前節で説明した χ^2 検定を用いる。ここでは本研究で用いた解析方法を具体的に述べる。式 (6.1.1) に基づいて Contained Events と upward-going muon のイベント数を求める。ここで Contained Events は Sub-GeV Events と Multi-GeV Events からなる。理論のパラメーターは $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \Delta m_{21}^2, \Delta m_{32}^2, \delta_{cp}, \epsilon_{ee}, |\epsilon_{e\tau}|, \phi = \arg(\epsilon_{e\tau})$ であるが、太陽ニュートリノ実験と原子炉ニュートリノ実験から定まるパラメーター $\theta_{12}, \theta_{13}, \Delta m_{21}^2$ は実験値を用いて固定する。NSI の存在は大気ニュートリノ実験で定まるパラメーター $\theta_{23}, \Delta m_{32}^2$ に影響を与えるため、フリーパラメーターとして扱う。従ってイベント数は $\theta_{23}, \Delta m_{32}^2, \delta_{cp}, \epsilon_{ee}, |\epsilon_{e\tau}|, \phi$ の計 6 個のパラメーター様々な値に振って計算し、 $\theta_{23}, \Delta m_{32}^2, \delta_{cp}, \phi$ に関して χ^2 を最適化して、 $\epsilon_{ee}, |\epsilon_{e\tau}|$ に関して許容領域を議論する。ここで χ^2 の最適化とは、最適化するパラメーターのなかで χ^2 が最小になるパラメーターの組を選ぶことである。

以下で Contained Events についての具体的な χ^2 の計算方法を示す。統計誤差はニュートリノの検出数がポアソン分布に従っているとすると、分散が平均値になることを

用いて評価することができる。系統誤差は以下の6つである。

$$\begin{cases} \sigma_\alpha \cdots \text{大気ニュートリノのフラックスの不定性} \\ \sigma_\gamma \cdots \text{Sub-GeV と Multi-GeV の区別の不定性} \\ \sigma_{\beta_s} \cdots \text{Sub-GeV における } \nu_e \text{ と } \nu_\mu \text{ の区別の不定性} \\ \sigma_{\beta_m} \cdots \text{Multi-GeV における } \nu_e \text{ と } \nu_\mu \text{ の区別の不定性} \\ \sigma_{\eta_s} \cdots \text{Sub-GeV における } \nu \text{ と } \bar{\nu} \text{ の区別の不定性} \\ \sigma_{\eta_m} \cdots \text{Multi-GeV における } \nu \text{ と } \bar{\nu} \text{ の区別の不定性} \end{cases} \quad (6.4.1)$$

また、イベント数をそれぞれ

$$\begin{cases} N_{s,\alpha\beta}^j \cdots \text{Sub-GeV における } \nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \text{ のイベント数} \\ \bar{N}_{s,\alpha\beta}^j \cdots \text{Sub-GeV における } \bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta \text{ のイベント数} \\ N_{m,\alpha\beta}^j \cdots \text{Multi-GeV における } \nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \text{ のイベント数} \\ \bar{N}_{m,\alpha\beta}^j \cdots \text{Multi-GeV における } \bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta \text{ のイベント数} \end{cases} \quad (6.4.2)$$

で表す。ここで添字 j は天頂角分布を表すものである。また実験値を

$$\begin{cases} N_{s,e}^{ex,j} \cdots \text{Sub-GeV における e-like のイベント数} \\ N_{s,\mu}^{ex,j} \cdots \text{Sub-GeV における } \mu\text{-like のイベント数} \\ N_{m,e}^{ex,j} \cdots \text{Multi-GeV における e-like のイベント数} \\ N_{m,\mu}^{ex,j} \cdots \text{Multi-GeV における } \mu\text{-like のイベント数} \end{cases} \quad (6.4.3)$$

で表し、これらを用いて Contained Events における χ^2 を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \chi^2(\epsilon_{ee}, |\epsilon_{e\tau}|, \theta_{23}, \Delta m_{32}^2, \delta_{cp}, \phi) = & \min_{\substack{\alpha, \gamma, \beta_s, \\ \beta_m, \eta_s, \eta_m}} \left\{ \sum_j \sum_{A=s,m} \left[\frac{1}{N_{A,e}^{ex,j}} \{ N_{A,e}^{ex,j} - (1 + \alpha + \epsilon_A \gamma + \beta_A + \eta_A) N_{A,ee}^j \right. \right. \\ & - (1 + \alpha + \epsilon_A \gamma - \beta_A + \eta_A) N_{A,\mu e}^j - (1 + \alpha + \epsilon_A \gamma + \beta_A - \eta_A) \bar{N}_{A,ee}^j - (1 + \alpha + \epsilon_A \gamma - \beta_A - \eta_A) \bar{N}_{A,\mu e}^j \}^2 \\ & + \frac{1}{N_{A,\mu}^{ex,j}} \{ N_{A,\mu}^{ex,j} - (1 + \alpha + \epsilon_A \gamma + \beta_A + \eta_A) N_{A,e\mu}^j - (1 + \alpha + \epsilon_A \gamma - \beta_A + \eta_A) N_{A,\mu\mu}^j \\ & \left. \left. - (1 + \alpha + \epsilon_A \gamma + \beta_A - \eta_A) \bar{N}_{A,e\mu}^j - (1 + \alpha + \epsilon_A \gamma - \beta_A - \eta_A) \bar{N}_{s,\mu\mu}^j \}^2 \right] \right. \\ & \left. + \left(\frac{\alpha}{\sigma_\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\beta_s}{\sigma_{\beta_s}} \right)^2 + \left(\frac{\beta_m}{\sigma_{\beta_m}} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\sigma_\gamma} \right)^2 + \left(\frac{\eta_s}{\sigma_{\eta_s}} \right)^2 + \left(\frac{\eta_m}{\sigma_{\eta_m}} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

ここで $\epsilon_s = +1, \epsilon_m = -1$ である。 χ^2 は不定性に関するパラメータに関して2次形式になっていることに注意すると

$$\chi^2(\epsilon_{ee}, |\epsilon_{e\tau}|, \theta_{23}, \Delta m_{32}^2, \delta_{cp}, \phi) = \min_{\substack{\alpha, \gamma, \beta_s, \\ \beta_m, \eta_s, \eta_m}} [\mathbf{p}'^T D' \mathbf{p}' - 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{p}' + \chi_0^2] \quad (6.4.4)$$

と書ける。ここで \mathbf{p} は

$$\mathbf{p}'^T = (\alpha, \gamma, \beta_s, \beta_m, \eta_s, \eta_m) \quad (6.4.5)$$

と定義した。また最後の定数項は

$$\chi_0^2 = \chi^2|_{\mathbf{p}'=0} \quad (6.4.6)$$

である。 D' は実対称行列であることに注意すると、直交行列 O で対角化できるので $\mathbf{p} = O^T \mathbf{p}'$ と定義し直せば χ^2 の不定性のパラメーターに関する部分は

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'^T D' \mathbf{p}' - 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{p}' &= \mathbf{p}^T D \mathbf{p} - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \\ &= \sum_{j=1}^6 (d_j p_j^2 - 2v_j p_j) \\ &= \sum_{j=1}^6 \left[d_j \left(p_j - \frac{v_j}{d_j} \right)^2 - \frac{v_j^2}{d_j} \right] \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

と書ける。ここで

$$D = O^T D' O = \text{diag}(d_1, \dots, d_6) \quad (6.4.8)$$

$$\mathbf{v} = O^T \mathbf{v}' \quad (6.4.9)$$

を用いた。この形にすれば不定性のパラメーターに関する最小化は簡単に実行できて

$$p_j = \frac{v_j}{d_j} \quad (6.4.10)$$

となるように選べばよいことが分かる。以上より χ^2 は

$$\chi^2(\epsilon_{ee}, |\epsilon_{e\tau}|, \theta_{23}, \Delta m_{32}^2, \delta_{cp}, \phi) = \chi_0^2 - \sum_{j=1}^6 \frac{v_j^2}{d_j} \quad (6.4.11)$$

となる。upward-going muon に関しても同様に χ^2 を計算することができる。

このようにして求めた Contained Events の χ^2 と upward-going muon の χ^2 をそれぞれ χ_c^2, χ_u^2 とすると、トータルの χ^2 は

$$\chi^2 = \chi_c^2 + \chi_u^2 \quad (6.4.12)$$

で与えられる。ここで $\epsilon_{ee}, |\epsilon_{e\tau}|$ を固定したときに $\theta_{23}, \Delta m_{32}^2, \delta_{cp}, \phi$ に関して χ^2 を最適化すれば、最終的な χ^2 が求まる。

第7章

結果

前章で述べた解析方法により、スーパーカミオカンデとハイパーカミオカンデにおいて、NSI にどのような制限がつけられるのかをみる。ニュートリノ振動のパラメーターで、大気ニュートリノに大きな影響を与えないものは固定して解析をしている。それらの値は以下の通りである。

$$\sin^2 2\theta_{12} = 0.86 \quad (7.0.1)$$

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.1 \quad (7.0.2)$$

$$\Delta m_{21}^2 = 7.6 \times 10^{-5} \text{eV}^2 \quad (7.0.3)$$

系統誤差は

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha} = \infty \cdots \text{大気ニュートリノのフラックスの不定性} \\ \sigma_{\gamma} = 10\% \cdots \text{Sub-GeV と Multi-GeV の区別の不定性} \\ \sigma_{\beta_s} = 10\% \cdots \text{Sub-GeV における } \nu_e \text{ と } \nu_{\mu} \text{ の区別の不定性} \\ \sigma_{\beta_m} = 10\% \cdots \text{Multi-GeV における } \nu_e \text{ と } \nu_{\mu} \text{ の区別の不定性} \\ \sigma_{\eta_s} = 10\% \cdots \text{Sub-GeV における } \nu \text{ と } \bar{\nu} \text{ の区別の不定性} \\ \sigma_{\eta_m} = 10\% \cdots \text{Multi-GeV における } \nu \text{ と } \bar{\nu} \text{ の区別の不定性} \end{array} \right. \quad (7.0.4)$$

とした。

7.1 NSI の許容領域

スーパーカミオカンデにおける、3903 日間の測定によるデータを用いて得られた結果を図 7.1,7.2 に示す。これらの結果はそれぞれ Normal Hierarchy(NH) の場合と Inverted Hierarchy(IH) の場合である。

ハイパーカミオカンデにおける結果は、スーパーカミオカンデにおける 3903 日間のイベント数を 20 倍して解析を行った。これはハイパーカミオカンデの有効体積がスーパーカミオカンデの 20 倍として設計される予定だからである [21]。またハイパーカミオカンデにおける系統誤差は、スーパーカミオカンデのそれと同じであるとした。以下の結果はスーパーカミオカンデのときと同様に、図 7.3,7.4 にそれぞれ NH と IH の場合を示した。

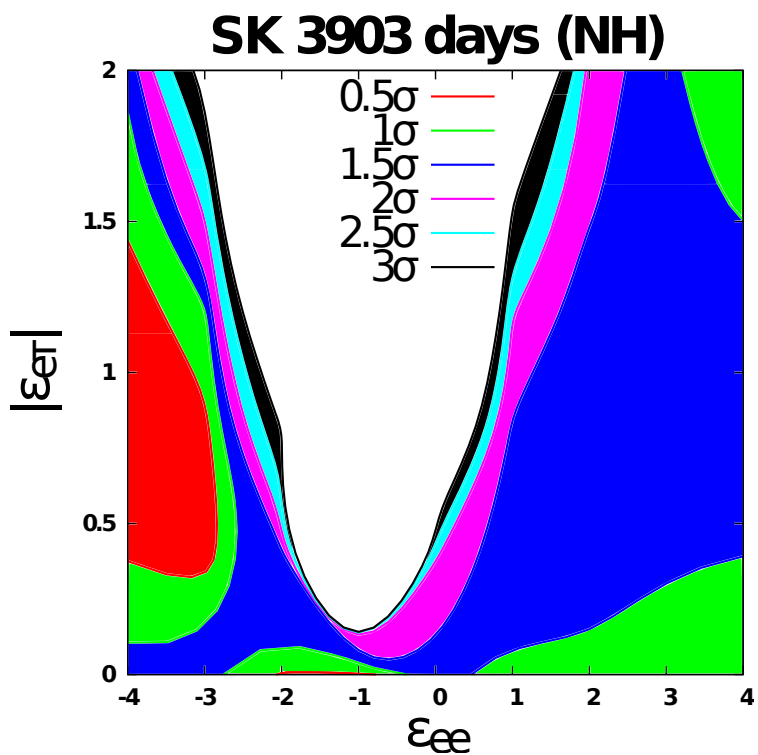


図 7.1 スーパーカミオカンデ (Normal Hierarchy)

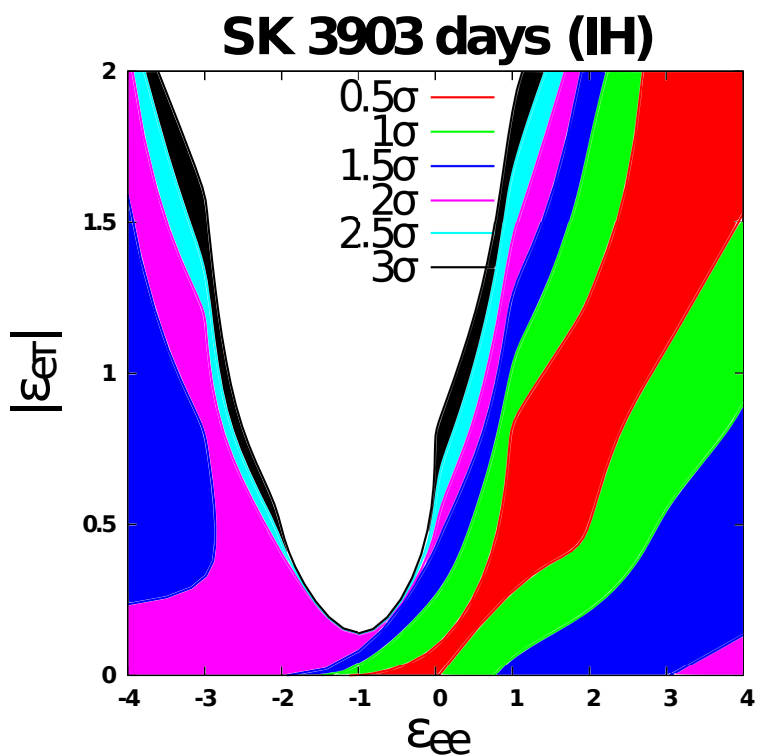


図 7.2 スーパーカミオカンデ (Inverted Hierarchy)

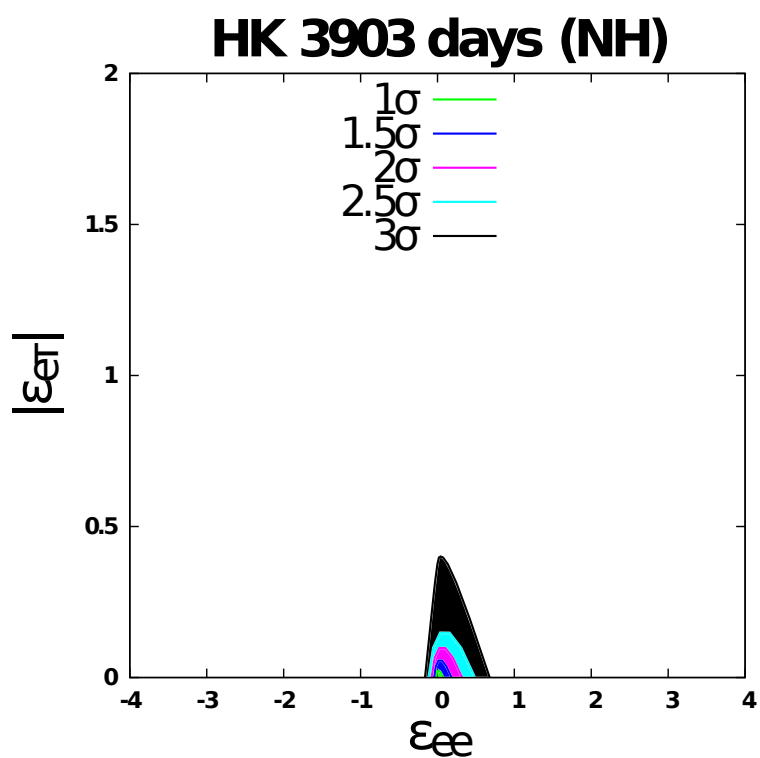


図 7.3 ハイパーカミオカンデ (Normal Hierarchy)

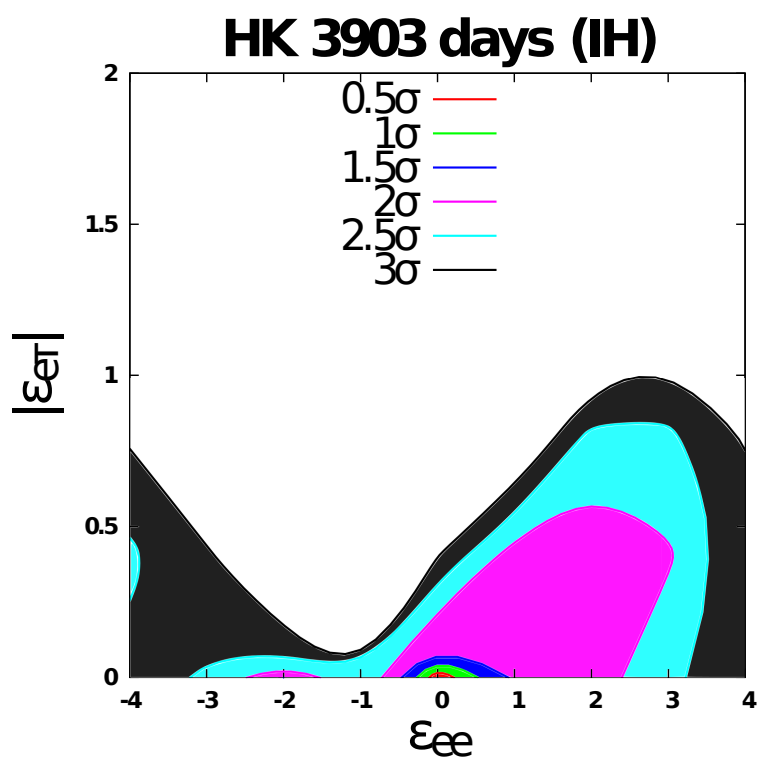


図 7.4 ハイパーカミオカンデ (Inverted Hierarchy)

スーパーカミオカンデにおけるアップデートされたデータを用いても大きな NSI を排除することはできなかった*1。しかし、今回得られた結果は Friedland-Lunardini が 2005 年に与えた $\tan \beta < 1.5(2.5\sigma)$ という制限よりも厳しい結果 $\tan \beta < 0.8(2.5\sigma)$ になっている。ハイパーカミオカンデにおいては $\tan \beta < 0.3(2.5\sigma)$ となつて $|\epsilon_{e\tau}| > 1$ が排除されており、スーパーカミオカンデと比べてハイパーカミオカンデでは制限が厳しくなっていることが分かる。また ϵ_{ee} への制限は大気ニュートリノ実験の観測では改善していないため、何か他の方法を用いて議論する必要がある。

*1 今回の研究ではモンテカルロシミュレーションがスーパーカミオカンデの結果を完全には再現している訳ではなかった。今回の上限値に対する結果が大幅な改善とならなかったのは、それが原因とであるのかどうかは不明で、今後の研究課題である。

第 8 章

まとめ

地球上で行われた実験と、大気ニュートリノ実験の高エネルギー領域での振る舞いより NSI パラメーターに対して $\epsilon_{e\mu} = \epsilon_{\mu\mu} = \epsilon_{\mu\tau} = 0, \epsilon_{\tau\tau} = |\epsilon_{e\tau}|^2 / (1 + \epsilon_{ee})$ という仮定の下で解析を行った。このことは伝播における NSI の $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ セクターに関する部分を調べたことに対応している。得られた NSI の許容領域は Friedland-Lunardini が 2005 年に与えた制限よりも厳しいものになっている。また、ハイパーカミオカンデではスーパーカミオカンデよりも NSI に対して厳しい制限を与えると予想されることが分かった。

謝辞

本論文を執筆するにあたり、多大な時間を割いて指導して頂いた安田修教授、北澤敬章助教に感謝の意を表します。また、研究に関する議論や時には他愛ない話の相手になって頂いた研究室のメンバーである橋真奈美さん、浅野克博さん、小原怜さん、酒井裕企君、同期の桑原裕典君、脇本佑紀君に感謝の意を表します。そして、いつも私のことを支えてくれた友人と家族に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D86, 010001 (2012)
- [2] S. Antusch et al. Nuclear Physics B Volume 810, Issues 1–2, 21 March 2009, Pages 369–388 [arXiv:0807.1003v3]
- [3] Carla Biggio et al. JHEP08(2009)090 [arXiv:0907.0097]
- [4] A. Friedland et al. Phys. Rev. D 70, 111301(R) (2004) [arXiv:hep-ph/0408264]
- [5] A. Friedland et al. Phys. Rev. D 72, 053009 (2005) [arXiv:hep-ph/0506143]
- [6] M. Apollonio et al. Eur. Phys. J. C27, 331, 2003 [hep-ex/0301017]
- [7] Y. Abe et al. PRL 108, 131801, (2012) [arXiv:1112.6353]
- [8] Y. Abe et al. Phys. Rev. D 86, 052008 (2012)
- [9] F. P. An et al., Phys. Rev. Lett. 108, 171803 (2012) [arXiv:1203.1669]
- [10] J. K. Ahn et al., Phys. Rev. Lett. 108, 191802 (2012)
- [11] O. Yasuda, Phys. Rev. D 58, 091301(R) (1998)
- [12] K. Kimura et al., Physics Letters B Volume 537, Issues 1–2, 13 June 2002, Pages 86–94, [arXiv:hep-ph/0203099]
- [13] K. Kimura et al., Phys. Rev. D 66, 073005 (2002), [arXiv:hep-ph/0205295]
- [14] O. Yasuda, [arXiv:0704.1531]
- [15] H. Oki and O. Yasuda, Phys. Rev. D 82, 073009 (2010)
- [16] The Super-Kamiokande Collaboration, Phys. Rev. D 81, 092004 (2010), [arXiv:1002.3471]
- [17] Y. Itow , Talk at Neutrino 2012, Kyoto, 5 June, 2012
<http://kds.kek.jp/getFile.py/access?contribId=12&sessionId=6&resId=0&materialId=slides&confId=9151>
- [18] Y. Itow Nuclear Physics B Volumes 235–236, February–March 2013, Pages 79–86
- [19] F.D. Stacey, Physics of the Earth, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc. (1977)
- [20] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery, Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, 2nd ed. (Cambridge University Press, 1992)
- [21] K. Abe et al. [arXiv:1109.3262]