

非標準的物質効果のあるニュートリノ振動確率の振る舞い

柳田 秀明

首都大学東京 理工学研究科 物理学専攻

目次

概要	i
第 1 章 素粒子標準模型	1
1.1 素粒子の分類	1
1.2 質量生成の機構	4
1.3 弱い相互作用の有効理論	6
1.4 世代の混合	8
第 2 章 ニュートリノ質量	12
2.1 Majorana 質量	12
2.2 Dirac-Majorana 質量	14
2.3 混合行列のパラメトリゼーション	14
第 3 章 ニュートリノ振動	17
3.1 真空中のニュートリノ振動	17
3.2 物質中のニュートリノ振動	19
3.3 ニュートリノ振動実験	22
第 4 章 非標準的相互作用	25
第 5 章 物質中ニュートリノ振動確率の解析的表式	29
5.1 地球内部における密度分布の不定性	29
5.2 標準的混合の場合の振動確率	30
5.3 NSI の考慮した場合の、コアマントルニュートリノ振動確率の解析的表式	33
5.4 NSI パラメータの変化におけるコアマントルニュートリノ振動確率の振る舞い	35
第 6 章 まとめと今後の課題	38
付録 A 標準的な混合の場合のコアマントルニュートリノ振動確率の導出	40
付録 B NSI を考慮した場合の、コアマントルニュートリノ振動確率の導出	42
参考文献	44

概要

1930年 β 崩壊への保存則の要請から W. Pauli は「ニュートリノ仮説」を提案した。その後 1955 年の F. Reines と C. L. Cowan らの実験により実在が確かめられたのが素粒子ニュートリノ ν である。「素粒子」とは自然界の最も基本的な構成単位のこと、素粒子物理学はそれらの多彩な運動によって森羅万象が導かれるという概念を再現しようというものである。素粒子標準模型 [1] は素粒子の基本的な相互作用を記述するもっとも正確な理論であり、2012 年 7 月 [2] からすでに標準模型に必要とされるすべての素粒子が出揃っている。だがしかし標準模型は素粒子のより込み入った記述に対して十分な説明能力があるわけではない。とくに質量起源に関する謎は尽きず、ニュートリノ振動の発見はニュートリノも質量をもつことを示している [3]。ニュートリノ質量の起源は標準模型の枠内からは説明することができない。このように標準模型の枠組みから外れた現象を説明する理論を標準模型を超えた物理 (Beyond the Standard Model, BSM) といい、その獲得が今日の素粒子研究において新たに目指されている。

とくにニュートリノ振動は BSM の 1 現象として、精力的に研究されている。ニュートリノは 3 種類 (ν_e, ν_μ, ν_τ) あり、我々はそれらをフレーバーと呼ぶもので区別している。ニュートリノ振動は、マクロな距離を伝播したニュートリノがそのフレーバーを遷移させる確率的現象である。ニュートリノ振動はフレーバー混合を表す混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$, CP 位相 δ_{CP} , そして質量階層性を表す質量二乗差 $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ という量で特徴づけることができる。すでに Double Chooz や Daya Bay, RENO によって 3 つ目の混合角 θ_{13} まで測定され [4], 残る CP 位相 δ_{CP} の測定と質量階層性問題の解決も将来の加速器実験の中に計画されている。ニュートリノ振動実験は今後も改良され、更なる精密測定を実現すると期待されている。ニュートリノ振動の発見に大きく貢献した Super-Kamiokande も現在大幅なアップデート計画が進められている。BSM の兆候をいち早く示したニュートリノ振動の研究は今後、標準模型とのズレを測定して新物理を探求することができるようになっていく。

本研究では、ニュートリノ振動とその物質効果について、その振動確率の振る舞いを調べた。ニュートリノには標準的に弱い相互作用しかはたらかないが、マクロなスケールで物質中を伝搬するとその相互作用の効果がニュートリノ振動に影響する。この効果を一般に物質効果と呼ぶ [5]。とくに非一様な密度をもつ媒質中の物質効果はニュートリノ振動と共鳴 [6] したり、媒質の急激な密度変化によって非断熱的な寄与 [7] が生じたりする場合がある。太陽中の密度は中心から外側へ指数減少しているし、地球はマントルとコアの密度差が大きく凸型の分布をもつ。本研究ではこの物質効果を非標準的相互作用にまで拡張し、大気ニュートリノ振動確率の振る舞いについて議論している。非標準的相互作用に対する制限は今のところ強くなく [8], 新たな BSM への可能性を否定できない。また、地球をコア-マントルの 2 層をもつ凸型の密度分布としてモデル化すると、各層の密度不定性について議論することができる。地球質量を一定に保ったままコアの密度に $\pm 10\%$ まで変化させたところ、スペクトルが互いにズレてニュートリノ振動確率のピークが低エネルギー側へシフトする。また非標準的相互作用をわずかに導入した場合にも、振動確率は同様の挙動をしていることがわかった。本研究ではこの類似点について考察した。

第 1 章

素粒子標準模型

1.1 素粒子の分類

素粒子標準模型は、素粒子にはたらく基本的相互作用 (電磁相互作用, 弱い相互作用, 強い相互作用) を数少ない原理の下に導く理論体系で, 強い相互作用を導くカラー対称性 $SU(3)_C$ と電磁相互作用と弱い相互作用を導く電弱対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に関するゲージ理論で記述されている. ゲージ理論とはゲージ原理にしたがってゲージ化された対称性をもつ場の理論のことである. ここで扱っている場の理論とは, くりこみ可能であり, 特殊相対性原理から要請される 4 次元時空の大域的な対称性 $SO(3,1)$ を備え, 主にスカラー場, スピノル場, ベクトル場で記述される. $c = 1, \hbar = 1$ とする自然単位系 $[T = L = M^{-1}]$ では次元解析が質量次元 $[M]$ のみを考慮することになり, 作用積分は無次元量 $[M^0]$ なので 4 次元時空における場の理論の Lagrangian は $[M^4]$ でなければならない, スカラー場やベクトル場は $[M]$, スピノル場は $[M^{3/2}]$ の量と指定される. また, 粒子的描像はそれぞれの場の量子化によって得られている. 最も基本的な場であるスカラー場は, くりこみ可能なもので, 単独で 4 次までの自己相互作用項をもつことができ, そのポテンシャルの最小値を真空と定義する. ワインボトル型のポテンシャルをもった Higgs 場の真空まわりの量子的揺らぎから Higgs 粒子が導かれる. また $SO(3,1)$ の表現を 2 つの対称性 $SU(2, \mathbf{C})$ と $SU(2, \mathbf{C})^*$ の表現に分け, 2 成分のスピノル場とその複素共役場の対で表現することもできる. Dirac 場はそれら 2 つを併せた 4 成分スピノル場である. 量子化された Dirac 場は Fermion を導くので物質粒子は Dirac 場で記述されている. Dirac 方程式は負エネルギー解を導くが, その実体は電荷を反転させた反粒子である. 現に各物質粒子に対してその反粒子の存在が確認されている. ベクトル場は時空の添え字 ($\mu = 0, 1, 2, 3$) をもっており, ここではゲージ場が該当する. ゲージ場の量子化によってゲージ粒子が導かれる. このような $SO(3,1)$ のスピン表現による粒子 (場) の分類以外にも, 素粒子はゲージ対称性によっても分類される. ここでは, ゲージ対称性とその分類について説明する.

1.1.1 ゲージ対称性

$SO(3,1)$ はすべての場がもつべき対称性でありエネルギーや運動量, 角運動量など基本的な保存量を持っている. 一方で $SU(N)$ は場そのものに関する内部対称性といって, ゲージ理論ではこの内部対称性と時空を結びつけて議論している. まず $SU(N)$ ゲージ理論について説明する.

Dirac 場 ψ の Lagrangian は

$$\mathcal{L}[\psi] = \bar{\psi}(i\partial - m_\psi)\psi \quad (1.1)$$

と記述される ($\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0, \not{K} \equiv \gamma^\mu K_\mu$). γ^μ は反交換関係 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を満たすガンマ行列であり,

$g_{\mu\nu}(\equiv \text{diag}[+1, -1, -1, -1])$ は時空のメトリックである。 m_ψ は ψ の質量で、一般に質量項は場の2次の項としてあらわれる。

$\mathcal{L}[\psi]$ が $SU(N)$ 変換の下で不変であることを、 $SU(N)$ の対称性があるという。このときそれに対応した保存電荷が存在し、基本表現の場合に ψ は $SU(N)$ の N 重項 $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{N^2-1})^T$ を組んでいる。また $SU(N)$ は Lie 群として、生成子という $(N^2 - 1)$ 個の Hermite な代数 T_1, \dots, T_{N^2-1} をもっている。生成子は交換関係 $[T_a, T_b] = i \sum_c f_{ab}{}^c T_c$ を満たしており、構造定数 f_{abc} によってその変換の合成則をあらわしている。慣習的に生成子は規格直交条件 $\text{tr}[T_a T_b] = \delta_{ab}/2$ を満たすものとされ、 $SU(2)$ や $SU(3)$ の規格直交化された生成子は Pauli 行列 τ_1, τ_2, τ_3 *1、Gell-Mann 行列 $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ のそれぞれの $1/2$ 倍に相当する。また複素数を成分とする場合は位相変換 ($U(1)$ 変換) に対しても不変なので、生成子に単位行列 $\mathbf{1}$ である第0成分 $T_0 = \mathbf{1}$ を追加して $U(N) (= SU(N) \times U(1))$ の対称性があると言ってもよい。任意の $SU(N)$ 変換 $U(\theta)$ は、 $(N^2 - 1)$ 個の変換パラメータ $\theta^1, \dots, \theta^{N^2-1}$ ($\theta = \theta^a T_a$) で特徴づけられていて

$$\psi_j \longrightarrow U(\theta)_j{}^k \psi_k = (e^{i\theta})_j{}^k \psi_k \quad [\forall \theta, j, k = 1, \dots, N] \quad (1.2)$$

と書かれる。「同じ添え字が上下にあれば和をとる」という Einstein の縮約規則はとくに断りなく用いている。上の変換に対して $\mathcal{L}[\psi]$ は確かに不変である。

ゲージ原理とは「全時空に一様な対称性だけではなく、各点それぞれに定義した変換による対称性も要求する」ことであり、パラメータが時空に依存する変換 $\theta = \theta(x)$ をゲージ変換という。ゲージ理論ではこのゲージ変換に関する不変性を Lagrangian に課している。微分 ∂_μ はゲージ変換後 $U^{-1}(\theta(x))\partial_\mu U(\theta(x)) \neq \partial_\mu$ となってしまうので、Lagrangian $\mathcal{L}[\psi]$ はゲージ不変ではない。ゲージ理論では、 ∂_μ は共変微分 $D_\mu (\equiv \partial_\mu + igA_\mu)$ に置き換えられている。 $A_\mu (= A_\mu^a T_a)$ はゲージ場といって

$$A_\mu(x) \longrightarrow U(\theta(x))A_\mu(x)U^{-1}(\theta(x)) - \frac{i}{g}U(\theta(x))\partial_\mu U^{-1}(\theta(x)) \quad [g \neq 0] \quad (1.3)$$

とゲージ変換するものと定義され、 D_μ の共変性を保証する。

$$D_\mu \longrightarrow U(\theta(x))D_\mu U^{-1}(\theta(x)). \quad (1.4)$$

したがってゲージ不変な Lagrangian はこのゲージ場が加えられて

$$\mathcal{L}[\psi, A_\mu] = -\frac{1}{2} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m_\psi)\psi \quad (1.5)$$

となる。右辺第1項はゲージ場の運動項で、これはゲージ場の強さ $F_{\mu\nu}$ で記述されている。

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^a T_a. \quad (1.6)$$

ゲージ不変な Lagrangian にはゲージ場の質量項 $m_A A^\mu A_\mu$ を加えることはできない。ゲージ場が非斉次にゲージ変換するので、ゲージ対称性を破ってしまうからである。また $\bar{\psi}i\not{D}\psi$ にはゲージ場との相互作用項 $-g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu (= -gj^\mu[\psi]A_\mu)$ が含まれている。 g は相互作用の度合いを示す物理量で結合定数といい、次元解析から $[M^0]$ の無次元量でなければならない。相互作用の物理的解釈は Feynman 図によってなされている。また Dirac 場 ψ はカレント $j^\mu[\psi] = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ という形でゲージ場と相互作用する。このようにゲージ原理という指導原理を下に、物理的に要求される対称性から相互作用を導くことができる。

*1 普段は σ で表記されるが、 $SU(2)$ の生成子の場合には τ と書くのが慣わしとなっている。本論文でも $SU(2)$ の生成子をとくに意味しない Pauli 行列に対しては σ と表記している。

1.1.2 群の表現と場の分類

一般に、対称性変換の行列は場によってそれぞれ異っており、場に関する変換群の表現という。すなわち、ありうる群の表現を調べればどんな場がその理論に許されているのかがわかる。\$SO(3,1)\$ におけるスピンの表現からスカラー場 (スピン $\mathbf{0}$)、スピノル場 (スピン $\mathbf{1/2}$)、ベクトル場 (スピン $\mathbf{1}$) と分類できたように、\$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y\$ の表現から標準模型を構成している場 (素粒子) の種類を把握することができる。

表 1.1: 物質場と Higgs 場の分類

$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	u_R	d_R	$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$
$(\underline{3}, \underline{2})_{1/6}$	$(\underline{3}, \underline{1})_{2/3}$	$(\underline{3}, \underline{1})_{-1/3}$	$(\underline{1}, \underline{2})_{1/2}$
$L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	e_R	(ν_R)	
$(\underline{1}, \underline{2})_{-1/2}$	$(\underline{1}, \underline{1})_{-1}$	$(\underline{1}, \underline{1})_0$	

カラー対称性 \$SU(3)_C\$ から、物質粒子はカラー (R,G,B) をもつクォーク \$Q\$ ともたないレプトン \$L\$ とに分かれている。また電弱対称性 \$SU(2)_L \times U(1)_Y\$ の保存電荷である弱アイソスピン \$\mathbf{I}_W\$ と弱超電荷 \$Y_W\$ もあって、とくに弱アイソスピンの固有値 \$I_{W3} = \pm 1/2\$ は \$Q\$ を U 型クォーク \$u(I_{W3} = +1/2)\$ と D 型クォーク \$d(I_{W3} = -1/2)\$ に分けている。同様に \$L\$ もニュートリノ \$\nu\$ と荷電レプトン \$e\$ に分かれている。このことは表 1.1 のように記述される。\$(\underline{K}, \underline{J})_{Y_W}\$ とは、その場が弱超電荷 \$Y_W\$ をもち \$SU(3)_C\$ のカラー \$K\$ 重項と \$SU(2)_L\$ の弱アイソスピン \$J\$ 重項を組んでいることを指す。なお一重項の場はその保存電荷をもたない。このような分類は物質場 (Dirac 場) だけでなく Higgs 場 \$\Phi\$ にも適用される。また、添え字 L(R) は物質場の左巻き (右巻き) 成分を指し、次のように定義されるものである。

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (1.7)$$

$$\psi_{L(R)} \equiv \frac{1 - (+)\gamma^5}{2} \psi \quad [\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3] \quad (1.8)$$

\$SU(2)_L\$ は左巻き成分にしかない対称性で、右巻き成分は弱アイソスピン一重項となる。このことから物質粒子の質量項も禁止される。Dirac 場 \$\psi\$ の質量項は

$$-m_\psi \bar{\psi}\psi = -m_\psi (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) = -m_\psi \bar{\psi}_L \psi_R + \text{h.c.} \quad (1.9)$$

と左右が入れ混じっており、\$SU(2)_L\$ の変換に関して不変ではないからである。右巻きニュートリノ \$\nu_R\$ は標準模型の保存電荷を何一つもたず、まだ発見されていない。式中にある +h.c. とはその前の項の Hermite 共役な項が足されていることを表す。

このように物質粒子を 4 種類に分類することができたが、実際には \$u, d, \nu, e\$ のそれぞれに質量の異なる素粒子が 3 つずつあることが知られていて、世代あるいはフレーバーと呼ばれている。それらの起源は標準模型の枠組みでは説明できず、BSM の 1 つである。物質粒子の一覧を表 1.2 に示す。標準模型の相互作用は 1 世代のセットで説明できるので、当面はフレーバーの自由度について考慮しない。

表 1.2: 物質粒子の一覧

	第1世代	第2世代	第3世代
U 型クォーク u	u	c	t
D 型クォーク d	d	s	b
ニュートリノ ν	ν_e	ν_μ	ν_τ
荷電レプトン e	e	μ	τ

ゲージ場はその生成子と同じ個数だけ存在し、 $SU(3)_C$ のゲージ対称性をもつ強い相互作用のゲージ粒子はグルーオン g といって 8 種類存在するとされている。 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ は破れていて、弱い相互作用を媒介するウィークボソン W/Z と電磁相互作用のゲージ粒子である光子 γ が存在する。

つい最近になって発見された Higgs 粒子 [2] は弱アイソスピン二重項を組むスカラー場から導かれる。このスカラー場の真空期待値と $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の対称性が破れることで、ウィークボソン W/Z の質量が導かれる。

1.2 質量生成の機構

我々はニュートリノに着目しているので強い相互作用について触れる必要があまりなく、今後 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ対称性だけを考える。このゲージ対称性をもつ素粒子理論は Glashow-Weinberg-Salam 模型 (GWS 模型)[9] と呼ばれている。その Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{GWS}} = & -\frac{1}{2}\text{tr} W^{\mu\nu}W_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \\ & + \bar{Q}_L i \not{D} Q_L + \bar{L}_L i \not{D} L_L + \sum_{f=u,d,e} f_R i \not{D} f_R \\ & + (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V[\Phi^\dagger \Phi] + \mathcal{L}_{\text{Yuk.}}[Q, L, \Phi] \end{aligned} \quad (1.10)$$

であり、共変微分と各ゲージ場の強さは

$$D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu + ig'YB_\mu, \quad (1.11)$$

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig[W_\mu, W_\nu], \quad (1.12)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (1.13)$$

($W_\mu = W_\mu^a I_{W_a} = W_\mu^a \tau_a/2$) となっている。 g, g' はそれぞれ $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ の結合定数である。前述したとおり $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ対称性がゲージ場や物質場の質量項を禁止しており、質量をもつためにはこの対称性が破れていなければならない。

対称性の自発的破れと素粒子質量の生成の機構は Brout-Englert-Higgs 機構 (BEH 機構)[10] で説明されている。 \mathcal{L}_{GWS} には物質場とゲージ場のほかに、ポテンシャル V をもつ Higgs 場 Φ が加わっていた。表 1.1 にあるように Φ は 2 つの複素スカラー場 (荷電成分 ϕ^+ , 中世成分 ϕ^0) で構成されており、計 4 つの自由度をもつ。 V はくりこみ可能な形で

$$V = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (1.14)$$

となっており、 λ は Higgs 場の 4 点自己相互作用の結合定数である。ポテンシャルの最小値にいる状態のことを真空というが、それが安定であるためには $\lambda > 0$ でなければならない。また、この真空は古典近似の場合で

- $\mu^2 > 0$ のとき $V = 0$ がポテンシャルの最小値となる.

$$|\Phi| \equiv \sqrt{\langle 0|\Phi^\dagger\Phi|0\rangle} = 0. \quad (1.15)$$

- $\mu^2 < 0$ のとき $V = -\mu^4/4\lambda$ がポテンシャルの最小値となる.

$$|\Phi| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (1.16)$$

の2通りが考えられる. 前者は自明な真空で Higgs 場も何もない状態である. 後者の真空では Φ が真空期待値 (Vacuum Expectation Value, VEV) v をもって存在しており, この VEV によって対称性が破られることを対称性が自発的に破れたという. Φ は適当にゲージ変換して

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{v + H(x)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

となる. このようなゲージの取り方をユニタリティゲージといて, 以後ゲージをユニタリティゲージに固定する. Higgs 場の中性成分にある H は VEV まわりのゆらぎ ($|H| < v$) であり, これが Higgs 粒子として観測される. Φ は D_μ によって W_μ や B_μ と結合しており, H の 0 次の項がゲージ粒子の質量を導く.

$$(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) = \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H + \frac{g^2v^2}{4}W^{-\mu}W^+_\mu + \frac{g^2v^2}{8\cos^2\theta_W}Z^{0\mu}Z^0_\mu + O(H). \quad (1.18)$$

$$m_W = \frac{gv}{2}, \quad m_Z = \frac{gv}{2\cos\theta_W}$$

W^\pm_μ, Z^0_μ は次のように定義されていて, $\theta_W (\equiv \arctan g'/g)$ は Weinberg 角という.

$$W^\pm_\mu \equiv \frac{W^1_\mu \mp iW^2_\mu}{\sqrt{2}}, \quad (1.19)$$

$$\begin{pmatrix} Z^0_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

それぞれに質量をもつベクトル場 W^\pm_μ, Z^0_μ は, 弱い相互作用を媒介する荷電粒子の W-boson W^\pm と中性の Z-boson Z^0 として観測される. 一方, 電氣的に中性な H と結合せず質量をもたない A_μ は電磁場に相当する. すなわち電磁相互作用の結合定数 (素電荷) e も $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ結合定数や Weinberg 角を用いて与えることができる.

$$e \equiv g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.21)$$

標準模型は $U(1)_{EM}$ のゲージ理論として量子電磁力学 (Quantum Electrodynamics, QED) を導く. BEH 機構では $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のすべてが破れるわけではなく $U(1)_{EM}$ ゲージ対称性が残る. それは, VEV まわりのゆらぎ H を除く Higgs 場の 3 成分だけが新しいベクトル場 W^\pm_μ, Z^0_μ の縦波成分としてそれぞれ吸収されているからである [11].

なおユニタリティゲージにおいて V には H の質量項があらわれる.

$$V[H] = -\frac{\mu^4}{2\lambda} + m_H^2 H^2 + O(H^3), \quad (1.22)$$

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2}. \quad [\mu^2 < 0]$$

物質場は Higgs 場と湯川相互作用をする。Higgs 場と物質場の左巻き成分が $SU(2)_L$ 二重項なのに対して右巻き成分は一重項であり、湯川相互作用項 $\mathcal{L}_{\text{Yuk.}}$ は

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk.}} = -y_u \overline{Q}_L \tilde{\Phi} u_R - y_d \overline{Q}_L \Phi d_R - y_e \overline{L}_L \Phi e_R + \text{h.c.} \quad (1.23)$$

と記述される。 y_u, y_d, y_e はそれぞれ u, d, e の湯川結合定数という。また u_R の弱超電荷は $2/3$ なので弱超電荷 $-1/2$ をもつスカラー場が結合しなければならず、Higgs 場の弱超電荷を反転させた $\tilde{\Phi} (\equiv i\tau_2 \Phi^*)$ が代わりに結合する。ユニタリティゲージにおいては

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk.}} = -\frac{y_u v}{\sqrt{2}} \overline{u}_L u_R - \frac{y_d v}{\sqrt{2}} \overline{d}_L d_R - \frac{y_e v}{\sqrt{2}} \overline{e}_L e_R + O(H) + \text{h.c.} \quad (1.24)$$

となり、物質粒子 u, d, e の質量が導かれる。

$$m_u = \frac{y_u v}{\sqrt{2}}, m_d = \frac{y_d v}{\sqrt{2}}, m_e = \frac{y_e v}{\sqrt{2}}.$$

ここでニュートリノ質量が説明されないのは、標準模型ではニュートリノ右巻き成分 ν_R がないとしているからである。ニュートリノ質量については後の章で触れる。

物質粒子のゲージ相互作用をここにまとめておく。

$$-e j_\gamma^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}} j_W^\mu W_\mu^+ - \frac{g}{2 \cos \theta_W} j_Z^\mu Z_\mu^0 + \text{h.c.} \quad (1.25)$$

電磁カレント j_γ^μ 、荷電カレント j_W^μ 、中性カレント j_Z^μ は以下のとおりである。

$$j_\gamma^\mu = \frac{2}{3} \overline{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \overline{d} \gamma^\mu d - \overline{e} \gamma^\mu e, \quad (1.26)$$

$$j_W^\mu = 2 \overline{u}_L \gamma^\mu d_L + 2 \overline{\nu}_L \gamma^\mu e_L = \overline{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d + \overline{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e, \quad (1.27)$$

$$j_Z^\mu = 2 \sum_f (g_L^f \overline{f}_L \gamma^\mu f_L + g_R^f \overline{f}_R \gamma^\mu f_R) = \sum_f \overline{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f. \quad [f = u, d, \nu, e] \quad (1.28)$$

弱い相互作用は左右非対称な相互作用であり、 j_W^μ は完全に左巻きに寄っている。 Z^0 との結合には右巻き成分も参与するので、 j_Z^μ はベクトル成分 (V) と軸性ベクトル成分 (A) とで結合の度合いが異なる。 $g_{V(A)}^f$ ($g_{L(R)}^f$) は弱アイソスピン I_{W3}^f と電荷 Q^f と $\sin \theta_W$ を用いて以下のように定義される。

$$g_V^f \equiv g_R^f + g_L^f = I_{W3}^f - 2Q^f \sin^2 \theta_W, \quad (1.29)$$

$$g_A^f \equiv g_R^f - g_L^f = I_{W3}^f. \quad (1.30)$$

また Y_W^f は Q^f と I_{W3}^f と以下の関係が成り立っている。

$$Q^f = I_{W3}^f + Y_W^f. \quad (1.31)$$

1.3 弱い相互作用の有効理論

ニュートリノは電氣的に中性なレプトンであり、弱い相互作用しかはたらかない。弱い相互作用を媒介する W/Z は非常に重たい粒子で、それより低いエネルギースケール ($\ll O(10^2)\text{GeV}$) の過程では W/Z のプロパゲータは相互作用の頂点に近似される。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_{W(Z)}^2}}{k^2 - m_{W(Z)}^2 + i\epsilon} \xrightarrow{|k| \ll m_{W(Z)}^2} -i \frac{g_{\mu\nu}}{m_{W(Z)}^2}. \quad (1.32)$$

k_μ は W/Z の運搬するエネルギー・運動量である。したがって弱い相互作用の低エネルギー有効理論は、以下のように2つの4点相互作用 (4-Fermi 相互作用) と呼ばれるもので記述される。

$$\mathcal{L}_{eff}^{CC} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_W^\mu j_{W\mu}^\dagger, \quad (1.33)$$

$$\mathcal{L}_{eff}^{NC} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_Z^\mu j_{Z\mu}. \quad (1.34)$$

これらはカレント同士が結合することからカレント-カレント相互作用とも呼ばれている。 G_F は Fermi 結合定数という [M^{-2}] の物理量である。

$$G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}m_W^2}. \quad (1.35)$$

G_F は β 崩壊などの実験から、 $G_F/(\hbar c)^3 \simeq 1.17 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ [1] と測定されている。

この低エネルギー極限における有効理論は、第4章から触れる非標準的相互作用においても同様で、標準模型を超える高エネルギー理論から導かれる相互作用が起源であると考えられている。

1.3.1 物質ポテンシャル

標準的なニュートリノ相互作用は、電子 e^- や陽子 $p(= uud)$ 、中性子 $n(= udd)$ から構成される通常物質との 4-Fermi 相互作用 $\mathcal{L}_{eff}^{CC(NC)}$ としてよく扱われている。

$$\mathcal{L}_{int}^{CC} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu - \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e \bar{n} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) p, \quad (1.36)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{NC} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu \sum_{f=e,p,n} \bar{f} \gamma_\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f. \quad (1.37)$$

\mathcal{L}_{int}^{CC} の各項はそれぞれニュートリノの準弾性散乱と β 崩壊を表し、 \mathcal{L}_{int}^{NC} はニュートリノ弾性散乱を表す。とくに \mathcal{L}_{int}^{CC} の第1項は Fiertz 変換*2 することで、 \mathcal{L}_{int}^{NC} と統合できるように変形できる。式 (1.29-31) から $g_V^e = -1/2 + 2s_W^2$, $g_A^e = -1/2$, $g_V^\nu = 1/2 - 4s_W^2/3$, $g_A^\nu = 1/2$, $g_V^d = -1/2 + 2s_W^2/3$, $g_A^d = -1/2$ であり、陽子 (中性子) のクォーク組成 $p = uud$ ($n = udd$) より $g_V^p = 2g_V^u + g_V^d = 1/2 - 2s_W^2$, $g_A^p = 2g_A^u + g_A^d = 1/2$, $g_V^n = g_V^u + 2g_V^d = -1/2$, $g_A^n = g_A^u + 2g_A^d = -1/2$ である。

\mathcal{L}_{int}^{CC} の第1項から電子との荷電カレント反応における有効 Hamilton 密度

$$\mathcal{H}_{eff}^{CC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e \quad (1.38)$$

が得られる。ここで電子場 e をバックグラウンドとして平均をとった Hamiltonian

$$\overline{H_{eff}^{CC}} = \frac{1}{2} \sum_{h_e=\pm} \int dp_e^3 f(E_e, T) \langle e(\vec{p}_e, h_e) | \mathcal{H}_{eff}^{CC} | e(\vec{p}_e, h_e) \rangle \quad (1.39)$$

*2 Fiertz 変換とは、4つのスピノル (Grassman 数) $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ が以下の積の公式

$$(\bar{\psi}_1 \Gamma_A \psi_2) (\bar{\psi}_3 \Gamma_B \psi_4) = -\frac{1}{16} \sum_B \text{tr} [(\Gamma_A \Gamma_B)^2] (\bar{\psi}_1 \Gamma_B \psi_4) (\bar{\psi}_3 \Gamma_A \psi_2)$$

にしたがって積の順序を変えることである。 Γ_A は γ 行列によって構成される 16 個の代数である。

$$\Gamma_A \equiv \mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu} (\equiv i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2). \quad [A = 1, \dots, 16]$$

$[E_e = \sqrt{\vec{p}_e^2 + m_e^2}]$ が、媒質中ニュートリノのポテンシャルとなる。 $f(E_e, T)$ は温度 T における電子の分布関数であるが、この分布の詳細は計算の結果に寄与しない。電子は有限の境界内に分布するものとし、その体積を $V (< \infty)$ とすると

$$1 \text{ 電子状態} : |e(\vec{p}_e, h_e)\rangle = \frac{1}{2E_e V} A_e^\dagger(\vec{p}_e, h_e)|0\rangle, \quad (1.40)$$

$$\text{規格化条件} : \int dp_e^3 f(E_e, T) = N_e V. \quad [\text{電子数密度} : N_e(x)] \quad (1.41)$$

である。ただし電子の消滅 (生成) 演算子 $A_e^{(\dagger)}(\vec{p}_e, h_e)$ は不変規格化されていて、反交換関係

$$\{A_e(\vec{p}_e, h_e), A_e^\dagger(\vec{q}_e, g_e)\} = (2\pi)^3 2E_e \delta(\vec{p}_e - \vec{q}_e) \delta_{h_e g_e} \quad (1.42)$$

を満たす。したがって

$$\overline{H_{eff}^{CC}} = V_{CC} \nu_L^\dagger \nu_L \quad (1.43)$$

となり、ポテンシャル $V_{CC} = \sqrt{2} G_F N_e$ を得る。

\mathcal{L}_{int}^{NC} から同様に、物質中ニュートリノのポテンシャルをつくる。中性カレント反応における有効 Hamilton 密度 $[g_{V(A)}^p = 2g_{V(A)}^u + g_{V(A)}^d, g_{V(A)}^n = g_{V(A)}^u + 2g_{V(A)}^d]$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff}^{NC} = & \frac{G_F}{2\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu \times \\ & [-\bar{e} \gamma_\mu (1 - 4s_W^2 - \gamma^5) e + \bar{p} \gamma_\mu (1 - 4s_W^2 - \gamma^5) p - \bar{n} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) n] \end{aligned} \quad (1.44)$$

($s_W = \sin \theta_W$) から、ニュートリノが各バックグラウンド ($f = e, p, n$) から感じるポテンシャル

$$V_{NC} = -\sqrt{2} G_F g_V^e N_e + \sqrt{2} G_F g_V^p N_p + \sqrt{2} G_F g_V^n N_n \quad (1.45)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} G_F N_n \quad (1.46)$$

[陽子 (中性子) 数密度 : $N_{p(n)}(x)$] を得る。最後の式は中性媒質の場合 ($N_p = N_e$) である。

フレーバーの自由度 ($\alpha = e, \mu, \tau$) を考慮し、ニュートリノが感じるポテンシャルをまとめると

$$V_\alpha = V_{CC} \delta_{e\alpha} + V_{NC} \delta_{\alpha\alpha} = \sqrt{2} G_F \left(N_e \delta_{e\alpha} - \frac{1}{2} N_n \right) \quad (1.47)$$

となる。

このポテンシャルは物質中のニュートリノ振動によく使われていて、物質ポテンシャルという。 $\sqrt{2} G_F = 7.63 \times 10^{-14} / N_A [\text{eV cm}^3]$ であり、通常物質 ($N_{e(n)} \sim O(1-10) N_A [\text{cm}^3]$) 中でニュートリノは相当長い距離 ($\sim O(10^{14}) / (E/\text{GeV}) [\text{cm}]$) の平均自由行程を伝播する。 $N_A (= 6.02 \times 10^{23} / \text{mol} [\mathbf{1}])$ は Avogadro 数である。

1.4 世代の混合

$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ対称性によって物質粒子の分類がなされているが、実際には同じ分類にも異なる質量をもつ粒子が存在しており、我々はフレーバー (世代) によって区別している。前節まではその多様性の意味について言及しなかったが、ここでフレーバーの自由度について考えフレーバー混合 (世代混合) を導く。

物質場は左巻きと右巻きそれぞれ異なるので、それぞれにフレーバーの自由度が与えられている。

$$\mathbf{Q}'_L = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_L \\ \mathbf{d}'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_L \\ c'_L \\ t'_L \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

$$\mathbf{u}'_R = \begin{pmatrix} u'_R \\ c'_R \\ t'_R \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

$$\mathbf{d}'_R = \begin{pmatrix} d'_R \\ s'_R \\ b'_R \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

$$\mathbf{L}'_L = (\nu'_L \mathbf{e}'_L) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ \nu'_{\mu L} \\ \nu'_{\tau L} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e'_L \\ \mu'_L \\ \tau'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

$$\mathbf{e}'_R = \begin{pmatrix} e'_R \\ \mu'_R \\ \tau'_R \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

プライム (') つきはフレーバーによってラベルづけられていることを指す。これらの VEV との湯川相互作用は

$$-\frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\mathbf{u}'_L} \mathbf{Y}'_u \mathbf{u}'_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\mathbf{d}'_L} \mathbf{Y}'_d \mathbf{d}'_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\mathbf{e}'_L} \mathbf{Y}'_e \mathbf{e}'_R + \text{h.c.} \quad (1.53)$$

となる。行列 $\mathbf{Y}'_u, \mathbf{Y}'_d, \mathbf{Y}'_e$ の各要素が湯川結合定数である。一般に $\mathbf{Y}'_u, \mathbf{Y}'_d, \mathbf{Y}'_e$ は複素行列であるが、これらは適当なユニタリ変換によって対角化することができる。例えば荷電レプトンの左巻き成分と右巻き成分をそれぞれユニタリ変換する。

$$\mathbf{e}'_{L(R)} = \begin{pmatrix} e'_{L(R)} \\ \mu'_{L(R)} \\ \tau'_{L(R)} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{e}_{L(R)} = V_{L(R)}^{e\dagger} \mathbf{e}'_{L(R)} = \begin{pmatrix} e_{L(R)} \\ \mu_{L(R)} \\ \tau_{L(R)} \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

このとき次式によって湯川結合定数の行列が対角化されるとする。

$$V_L^e \mathbf{Y}'_e V_R^{e\dagger} = \mathbf{Y}_e = \begin{pmatrix} y_e & 0 & 0 \\ 0 & y_\mu & 0 \\ 0 & 0 & y_\tau \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

上式の 2 乗 (Hermite 共役行列との積) は

$$V_L^e \mathbf{Y}'_e \mathbf{Y}'_e{}^\dagger V_L^{e\dagger} = \mathbf{Y}_e \mathbf{Y}_e{}^\dagger = \begin{pmatrix} y_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & y_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & y_\tau^2 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

であるが、これは一般に複素行列の 2 乗が Hermite 行列であることから成り立つものである。また $V_R^e = V_L^e \mathbf{Y}_e V_L^{e\dagger} \mathbf{Y}'_e$ とすればこれはユニタリ行列であり、 \mathbf{Y}'_e は 2 つのユニタリ行列 V_L^l, V_R^l によって対角

化可能である．さらに一般性を欠くことなく $y_{e\alpha} \geq 0$ ($\alpha = e, \mu, \tau$) とすることができる．このプライムなしの基底では湯川相互作用を対角的に書くことができ，質量が定義される．

$$m_\alpha = \frac{y_\alpha v}{\sqrt{2}} \quad (\alpha = e, \mu, \tau).$$

この新しい基底 $\mathbf{e}_L, \mathbf{e}_R$ はまさに質量固有状態である．以降プライムなしは質量固有状態とする．同様にクォークも基底を質量固有状態にとり直すことで，質量が定義される．

$$\mathbf{u}_{L(R)} = V_{L(R)}^{u\dagger} \mathbf{u}'_{L(R)} = \begin{pmatrix} u_{L(R)} \\ c_{L(R)} \\ t_{L(R)} \end{pmatrix}, \quad (1.57)$$

$$\mathbf{d}_{L(R)} = V_{L(R)}^{d\dagger} \mathbf{d}'_{L(R)} = \begin{pmatrix} d_{L(R)} \\ s_{L(R)} \\ b_{L(R)} \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

$$m_q = \frac{y_q v}{\sqrt{2}} \quad [q = u, c, t, d, s, b].$$

物質粒子の質量測定値を表 1.3 にまとめた．

表 1.3: 物質粒子の質量 [1]

クォーク		レプトン	
u	$2.3^{+0.7}_{-0.5} \text{MeV}/c^2$	ν_e	$< 2 \text{MeV}/c^2$
d	$4.8^{+0.5}_{-0.3} \text{MeV}/c^2$	ν_μ	-
s	$95 \pm 5 \text{MeV}/c^2$	ν_τ	-
c	$1.25\text{-}30 \text{GeV}/c^2$	e	$0.51 \text{MeV}/c^2$
b	$4.6\text{-}7 \text{GeV}/c^2$	μ	$105.66 \text{MeV}/c^2$
t	$172\text{-}4 \text{GeV}/c^2$	τ	$1.78 \text{GeV}/c^2$

荷電カレント反応は弱アイソスピン二重項の上下を入れ替える反応を起こすが，フレーバー間の遷移も含む．例えばクォークの荷電カレントは

$$2\overline{\mathbf{u}}'_L \gamma^\mu \mathbf{d}'_L = 2\overline{\mathbf{u}}_L V^\dagger \gamma^\mu \mathbf{d}_L = \overline{\mathbf{u}} V^\dagger \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mathbf{d} \quad (1.59)$$

となっている． V ($\equiv V_L^d V_L^u$) はフレーバー混合 (世代混合) を特徴づけるもので一般に混合行列という． N フレーバーある混合行列は $(N-1)^2$ 個の物理的自由度がある．その内訳は，実回転をあらわす混合角成分 $N(N-1)/2$ 個と物理的な位相成分 $(N-1)(N-2)/2$ 個である [12]． N 次ユニタリ行列は $N(N+1)/2$ 個の位相自由度をもつが，混合行列の場合，その両隣にある 2 つの N フレーバー物質場の $2N$ 個の位相 $\boldsymbol{\eta}^u = (\eta_u^u, \dots, \eta_t^u)$, $\boldsymbol{\eta}^d = (\eta_d^d, \dots, \eta_b^d)$ を適当にとることで，共通の位相を除いた $(2N-1)$ 個の位相を吸収することができる．

$$V \longrightarrow \underbrace{e^{-i(\eta_u^u - \eta_d^d)}}_{+1} \underbrace{\text{diag}[e^{-i(\eta^u - \eta_u^u)}]}_{-N} V \underbrace{\text{diag}[e^{i(\eta^d - \eta_d^d)}]}_{-N}. \quad (1.60)$$

中性カレント反応ではフレーバー間の遷移は tree level で起こらない．フレーバー基底から質量固有状態へとり直しても，中性カレントの形が変わらないからである．このようにフレーバーを変える中性カレント反応は強く抑制されていて，Glashow-Iliopoulos-Maiani 機構 (GIM 機構) [13] という．電磁カレントも同様なので，フレーバーを変える反応は荷電カレント反応が支配的である．クォークの混合行列 V は

Cabbibo-小林-益川行列 (CKM 行列)[1,12,14] という。クォークは 3 世代あるので, CKM 行列は 3 つの混合角と物理的な位相を 1 つもつ。ニュートリノ振動はレプトンフレーバー混合の 1 つの現象として位置づけられている。

標準模型において, $(W^\pm, Z^0, \mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ の質量は VEV と結合することで生成される。特に物質粒子の $(\mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ はその左右成分が互いに結合していなければならない。ニュートリノは右巻き成分が不明で, ほかの物質粒子同様にして質量が生成されるか定かではない。またトリチウム ${}^3\text{H}$ の β 崩壊などからニュートリノの質量上限は $2\text{eV}/c^2$ とされており, ニュートリノは顕著に軽い粒子である。この極端な質量の隔たりについても謎で, 次の章で扱う See-Saw 機構 [15] はこれらの謎を解消する有力な候補となっている。

第 2 章

ニュートリノ質量

標準模型だけではニュートリノ質量について説明することができなかった。ほかの物質粒子と同様にしてニュートリノ質量が獲得されているかどうか判断ができないからである。一方で、ニュートリノ振動によってニュートリノに質量があることが知られている。またニュートリノの質量は上限からして非常に小さいことも知られている。ここではニュートリノ質量について言及しその起源と謎に迫る。

ニュートリノ質量を説明する機構として主に 3 通りの候補が挙げられている。一つは他の物質粒子と同様の機構で Dirac 質量と呼ばれるものである。ニュートリノに右巻き成分の場合 $\nu'_{\text{R}} = (\nu_{\text{eR}}, \nu_{\mu\text{R}}, \nu_{\tau\text{R}})$ を導入して、VEV との湯川相互作用からニュートリノ質量を定義する。このとき、フレーバー基底 ν' から質量固有状態 ν に変換されなければならない。

$$\nu_{\text{L(R)}} = V_{\text{L(R)}}^{\nu\dagger} \nu'_{\text{L(R)}} = \begin{pmatrix} \nu_{1\text{L(R)}} \\ \nu_{2\text{L(R)}} \\ \nu_{3\text{L(R)}} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$m_j = \frac{y_j v}{\sqrt{2}}. \quad [j = 1, 2, 3]$$

また、レプトンの荷電カレントにはレプトン混合行列 $U (\equiv V_{\text{L}}^e V_{\text{L}}^{\nu})$ がかけられる。

$$2\overline{\nu}_{\text{L}} U^\dagger \gamma^\mu e_{\text{L}} = 2\overline{\nu} U^\dagger \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e \quad (2.2)$$

U は (Pontecorvo-) 牧-中川-坂田行列 ((P)MNS 行列)[16,17] といって、標準表示として以下のパラメトリゼーションが採用されている [1]。3 つの混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ と Dirac 位相と呼ばれる位相 δ_{CP} は、ニュートリノ振動実験によってそれぞれ測定されるものである。 [$c_{jk} = \cos \theta_{jk}, s_{jk} = \sin \theta_{jk}$]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{23} & s_{12}c_{23} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}s_{13} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

このように右巻きニュートリノを仮定すればニュートリノの質量を導くことができるが、それだけでは右巻きニュートリノが依然として発見されない理由やニュートリノ質量の小ささなどを説明することはできない。次節以降で扱う機構はそういった謎にも追求することができる。

2.1 Majorana 質量

ニュートリノが Majorana 粒子である場合、右巻きニュートリノを仮定することなく質量項を導くことができる。ここでは Majorana 粒子を説明し、その場合に質量がいかに導かれるかをみる。

Dirac 場 ψ の運動方程式を左右に分けると

$$i\partial\psi_L = m_\psi\psi_R, \quad (2.4)$$

$$i\partial\psi_R = m_\psi\psi_L. \quad (2.5)$$

となっており、それぞれを分離させて一般に解くことはできないことがわかる。ただし Majorana 条件

$$\psi_R = \xi C \overline{\psi_L}^T \quad [{}^\forall \xi \in \mathbf{C}, |\xi|^2 = 1] \quad (2.6)$$

を満たしているときは、上の連立方程式は一つの方程式として解くことができる。 C は正粒子場 ψ と反粒子場 ψ^C の変換 (荷電共役変換 $\psi \rightarrow \psi^C \equiv C\overline{\psi}^T$) を担う行列で荷電共役行列という。 ξ は任意の位相因子であるが、これは場の再定義 ($\psi_L \rightarrow \xi^{1/2}\psi_L$) によって打ち消すことができるので今後気にしないことにする。したがって ψ は

$$\psi = \psi_L + C\overline{\psi_L}^T = \psi_L + \psi_L^C = \psi^C \quad (2.7)$$

となるので正粒子場と反粒子場が同等になる。この Majorana 条件を満たす場を Majorana 場といい、それが記述する粒子は Majorana 粒子と呼ばれている [18]。荷電共役変換はその電荷の符号を反転させるので、Majorana 粒子は中性でなければならない。 $\psi_R = \psi_L^C$ を満たすことから、その質量項は

$$\mathcal{L}_L^M = \frac{1}{2} m_L (\overline{\psi_L^C} \psi_L + \overline{\psi_L} \psi_L^C) \quad (2.8)$$

となる。Majorana 条件によって右巻き成分と左巻き成分が独立ではなく、Majorana 場の自由度は Dirac 場の半分しかない。質量項に $1/2$ がつけられているのはそのためである。また Majorana 質量項は、場の $U(1)$ 変換に関して不変ではない。このような形で組まれた質量を Majorana 質量という。

中性粒子で左巻き成分しか見つかってないニュートリノは Majorana 粒子である可能性が十分に考えられる。ニュートリノが Majorana 粒子だとすると、その Majorana 質量項は弱超電荷 $Y_W = -1$ をもっており、標準模型のゲージ対称性を破ってしまう。それを防ぐには弱超電荷 $Y_W = +1$ をもった弱アイソスピン二重項と結合させなければならないが、そのような場は標準模型には存在しない。Majorana 質量を生成する一番簡単なものでも

$$\mathcal{L}_5 = \frac{g_M}{\mathcal{M}} (L_L^T \tau_2 \Phi) C^\dagger (\Phi^T \tau_2 L_L) + \text{h.c.} \quad (2.9)$$

というような有次元量 $\mathcal{M}[M]$ をもち、くりこみ不可能な Lagrangian である。 g_M は無次元の結合定数であり、質量 m_L は自発的対称性の破れによって導かれる。

$$m_L = \frac{g_M v^2}{\mathcal{M}}. \quad (2.10)$$

このようにあるスケールの定数 \mathcal{M} によって抑制された質量を得る。フレーバー混合は Majorana 質量の場合でも起こるが、Majorana 質量項が $U(1)$ 変換に関して不変ではないために Majorana 場は混合行列の位相を吸収することができない。したがって混合行列は荷電レプトンが吸収する位相の自由度を抜いた3つの物理的位相をもつようになる。ただし、その新しく加わった2つの位相はニュートリノ振動では測ることはできない。ニュートリノが Majorana 粒子であることを検証する実験としては、無ニュートリノ二重 β 崩壊があげられる。

2.2 Dirac-Majorana 質量

ニュートリノの質量の説明として Dirac 質量と Majorana 質量が考えられるが、これらは両立させることもできる。左巻き Majorana ニュートリノだけでなく、右巻き Majorana ニュートリノも導入することで、それぞれの Majorana 質量 m_L, m_R だけでなく Dirac 質量 m_D も導くことができる。そのような Lagrangian は

$$\mathcal{L}^{D+M} = -m_D \bar{\nu}_L \nu_R + \frac{1}{2} m_L \nu_L^T C^\dagger \nu_L + \frac{1}{2} m_R \nu_R^T C^\dagger \nu_R + \text{h.c.} \quad (2.11)$$

となっている。2つの独立な Majorana 場 ν_L, ν_R によって構成されているので、3つの質量 m_D, m_L, m_R のうち2つまでは実数にとることができる。ただし前節で紹介した通り、左巻き Majorana ニュートリノの質量項は標準模型においては禁止される。 $\mathbf{n}'_L \equiv (\nu_L, \nu_R^C)^T$ で書けば

$$\mathcal{L}^{D+M} = \frac{1}{2} \mathbf{n}'_L{}^T C^\dagger \mathbf{M}' \mathbf{n}'_L + \text{h.c.}, \quad \mathbf{M}' = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

であり、対称な複素行列 \mathbf{M}' は適当なユニタリ対称行列 V_M によって次のように対角化される。これは \mathbf{n}'_L をユニタリ変換することによって変わらない。

$$\mathbf{n}_L = V_M^{-1} \mathbf{n}'_L = \begin{pmatrix} \nu_{aL} \\ \nu_{sL} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{M} = V_M \mathbf{M}' V_M^T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

この新しい基底 \mathbf{n}_L において質量が定義される。

$$m = \frac{m_L + m_R}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}, \quad (2.15)$$

$$M = \frac{m_L + m_R}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}. \quad (2.16)$$

したがって質量項は

$$\mathcal{L}^{D+M} = \frac{1}{2} m \nu_{aL}^T C^\dagger \nu_{aL} + \frac{1}{2} M \nu_{sL}^T C^\dagger \nu_{sL} + \text{h.c.} = \frac{1}{2} m \bar{\nu}_a \nu_a + \frac{1}{2} M \bar{\nu}_s \nu_s \quad (2.17)$$

となっている。 $\nu_{a(s)} (\equiv \nu_{a(s)L} + \nu_{a(s)L}^C)$ も Majorana 場なので、Dirac-Majorana 質量は Majorana 質量と同様の性質をもっている。また Dirac-Majorana 質量は、ニュートリノの小ささを説明することができる。例えば $m_D \ll m_R, m_L = 0$ の場合は右巻き Majorana ニュートリノ $\nu_R (= \nu_R^C)$ を仮定するだけでよく、 $m \sim m_D^2/m_R, M \sim m_R$ となるので、ニュートリノ ν_a の軽さを非常に重たいニュートリノ ν_s の質量によって説明することができる。このようなシナリオを See-Saw 機構 [15] という。

2.3 混合行列のパラメトリゼーション

この章の最後に混合行列のパラメトリゼーションについて触れておく。混合行列はユニタリ行列であるが両隣にある物質場によって位相が吸収されるので、比較的少ない数の物理パラメータで記述される。ニュートリノ振動実験においても、MNS 行列 U をそのままの形で測るよりも特定の表示を用いて見通しよく測定している。

一般に N 次ユニタリ行列はその生成子 $T_0, T_1, \dots, T_{N^2-1}$ によって構成することができる。ただし生成子はここでは行列表示

$$[T^{ab}]_{rs} = \delta_{ar}\delta_{bs}, \quad (2.18)$$

$$T^{ab}T^{cd} = T^{ad}\delta_{bc} \quad (2.19)$$

とする。任意の複素パラメータ $\theta_{ab}e^{i\eta_{ab}}$ をもつユニタリーユニモジュライ行列 $W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab})$ は、生成子の行列表示を用いれば

$$\begin{aligned} W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) &\equiv \exp [\theta_{ab}(T^{ab}e^{i\eta_{ab}} - T^{ba}e^{-i\eta_{ab}})] \\ &= \mathbf{1} + (\cos \theta_{ab} - 1)(T^{aa} + T^{bb}) + \sin \theta_{ab}(e^{i\eta_{ab}}T^{ab} - e^{-i\eta_{ab}}T^{ba}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

であり、(a,b)-plane 上の複素回転を表している。これらの積と任意のユニタリー対角行列

$$D(\boldsymbol{\omega}) \equiv \exp i \sum_a \omega_a T^{aa} \quad \forall \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_N) \quad (2.21)$$

とを用いて任意のユニタリ行列はパラメトライズされている。2つの物質場 e_L, ν_L による位相の吸収は、以下のように2つの適当なユニタリー対角行列 $D(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\varphi}), D(\boldsymbol{\varphi})$ が両端へと抽出されることで表される。

$$\begin{aligned} U &\equiv D(\boldsymbol{\omega}) \left[\prod_{a<b} W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) \right] \\ &= D(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\varphi}) \left[\prod_{a<b} D(\boldsymbol{\varphi}) W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) D^\dagger(\boldsymbol{\varphi}) \right] D(\boldsymbol{\varphi}) \\ &= D(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\varphi}) \left[\prod_{a<b} W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab} + \varphi_a - \varphi_b) \right] D(\boldsymbol{\varphi}). \quad [\forall \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}] \end{aligned} \quad (2.22)$$

また、 $W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab})$ は位相成分 $e^{\pm i\eta_{ab}}$ を除けば (a,b)-plane 上の実回転を表す直交行列 $R^{ab}(\theta_{ab})$ に相当する。

$$W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) = P^{b\dagger}(\eta_{ab}) R^{ab}(\theta_{ab}) P^b(\eta_{ab}), \quad (2.23)$$

$$R^{ab}(\theta) = \mathbf{1} + (\cos \theta - 1)(T^{aa} + T^{bb}) + \sin \theta(T^{ab} - T^{ba}), \quad (2.24)$$

$$P^a(\eta) = \mathbf{1} + (e^{i\eta} - 1)T^{aa}. \quad (2.25)$$

したがって3世代混合では

$$U = D(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\varphi}') [R^{23}(\theta_{23}) P^{3\dagger}(\eta_{13}) R^{13}(\theta_{13}) P^3(\eta_{13}) R^{12}(\theta_{12})] D(\boldsymbol{\varphi}') \quad (2.26)$$

$[\boldsymbol{\varphi}' = (\varphi_2 + \eta_{12}, \varphi_2, \varphi_2 - \eta_{23})]$ となり、物質場が吸収する位相を調整して混合行列のパラメトリゼーションをしている。

$$\begin{aligned} U &= R^{23}(\theta_{23}) P^3(\delta_{CP}) R^{13}(\theta_{13}) P^{3\dagger}(\delta_{CP}) R^{12}(\theta_{12}) \quad [\delta_{CP} = -\eta_{13}] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{CP}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

また Gell-Mann 行列 $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ を用いて

$$U = e^{i\theta_{23}\lambda_7} e^{i\delta_{CP}\lambda_9/2} e^{i\theta_{13}\lambda_5} e^{-i\delta_{CP}\lambda_9/2} e^{i\theta_{12}\lambda_2} \quad [\lambda_9 = i\lambda_4\lambda_5 = \text{diag}[-1, 0, 1]] \quad (2.28)$$

と書いても同様に標準表示のパラメトリゼーションを得る.

混合行列が位相成分をもつことは荷電カレント反応 ($j_W^\mu W_\mu^+ + \text{h.c.}$) において CP 対称性が破れていることを表している. CP 変換とは荷電共役変換 ($C: e \rightarrow -e$) と空間反転 ($P: \vec{x} \rightarrow \vec{x}$) の組み合わせだった変換で, CP の破れは物質-反物質の非対称性を示している. たとえばレプトンの荷電カレント, W_μ^+ をそれぞれ CP 変換させると

$$2\bar{\nu}_L U^\dagger \gamma^\mu e_L \xrightarrow{CP} -2\bar{e}_L D(\xi_e) U^* D^\dagger(\xi_\nu) \gamma_\mu \nu_L, \quad (2.29)$$

$$W_\mu^+ \xrightarrow{CP} e^{i\xi_W} W^{-\mu} \quad (2.30)$$

となる. ξ_ν, ξ_e, ξ_W は各素粒子場 (ν, e, W_μ^+) の CP 位相である. Lagrangean が CP 不変であるためには, CP 変換のもとで

$$j_W^\mu W_\mu^+ \xrightarrow{CP} j_{W\mu}^\dagger W^{-\mu} \quad (2.31)$$

が任意の CP 位相 (ξ_ν, ξ_e, ξ_W) で成り立っていればよい. 今, 混合行列 U に着目しているので W_μ^+ の CP 位相を $\xi_W = \pi$ に固定しておく. すなわち

$$U^* = D^\dagger(\xi_\nu) U D(\xi_e) \quad \left(U_{ab}^* = U_{ab} e^{-i(\xi_{\nu a} - \xi_{eb})} \right) \quad (2.32)$$

を任意の ξ_e, ξ_ν で満足させればよくて, 結局 $U^* = U$ の条件を課することになる. しかしながら物質場による位相の吸収には限度があり, N 世代の混合行列には $(N-1)(N-2)/2$ 個の位相成分が残る. 世代数が 3 以上の場合において CP の破れが起こる [12].

Majorana ニュートリノの場合, 各ニュートリノ ν_e, ν_μ, ν_τ の位相を自由に設定することができないので, 荷電レプトン e, μ, τ でしか位相の吸収ができない. その混合行列は $U_M = U D(\varphi)$ となるが, $D(\varphi)$ 内で共通する位相は取り除けるので

$$\begin{pmatrix} c_{12}c_{23} & s_{12}c_{23} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}s_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda_3} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

が Majorana ニュートリノの場合の MNS 行列のパラメトリゼーションとなる. 新たに加わった 2 つの位相 λ_2, λ_3 ($\lambda_j = \varphi_j - \varphi_1$) は Majorana 位相という. ニュートリノ振動では MNS 行列要素の 2 次とか 4 次の形で寄与するので, ニュートリノ振動実験では Majorana 位相を測ることができない.

Dirac 質量や Majorana 質量のどちらにおいても, レプトンのフレーバー混合が起こる. また, より一般的な Dirac-Majorana 質量は Majorana 質量と同様の性質を持っており, いずれにせよ, レプトンのフレーバー混合はニュートリノ質量の存在と密接な関係がある. フレーバー混合の一現象であるニュートリノ振動の発見はニュートリノにも質量があることを示している [3].

第 3 章

ニュートリノ振動

ニュートリノ振動は太陽ニュートリノ問題 [19,20], 大気ニュートリノ問題 [3] の謎を解いた現象であるが, これを原理的に説明することのできる物理は未だ明らかではなく, 少なくとも $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ理論により導かれる現象ではない. したがってニュートリノ振動の研究は BSM へ至る指標の 1 つとなる. ここではニュートリノ振動確率を導出した後, 物質中におけるニュートリノ振動の変化を記述する方法と主なニュートリノ振動実験のいくつかを紹介する.

3.1 真空中のニュートリノ振動

ニュートリノは標準模型における分類では 1 つの物質粒子として表されるが, 実際にはフレーバーによって 3 種類存在することが知られている. この数は世代数 N_ν と呼ばれ, LEP 実験 (電子陽電子衝突実験) における Z^0 を介したニュートリノ生成反応から

$$N_\nu = 2.984 \pm 0.008 [1] \quad (3.1)$$

と測定されていて, 標準的なニュートリノ世代数は 3 である. この現象に参加しないニュートリノがある可能性も否定できないが, 本論文では以降ニュートリノは 3 世代の場合を扱っている. 荷電レプトン e は電子 e , ミューオン μ , タウ τ とフレーバーで区別されており, その弱アイソスピンパートナーであるニュートリノはそれぞれ電子ニュートリノ ν_e , ミューニュートリノ ν_μ , タウニュートリノ ν_τ である. このように区別されているニュートリノ $\nu' = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ はフレーバーニュートリノと呼ばれていて, これはニュートリノを弱い相互作用の固有状態として区別している. 一方で Fermion であるニュートリノは Dirac 方程式にしたがって運動しており, 伝播中は質量固有状態 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ として存在するはずである. 一般に両固有状態は, 特徴的なユニタリー行列によって混合している. その行列は MNS 行列で表される.

$$\nu' = U\nu \quad (3.2)$$

このことは状態ベクトル空間では

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j}^* |\nu_j\rangle \quad [\forall \alpha = e, \mu, \tau] \quad (3.3)$$

となる*1. α, j はそれぞれフレーバー, 質量固有状態のインデックスである. また, $|\nu_\alpha\rangle, |\nu_j\rangle$ は状態ベクトル空間の基底としてそれぞれ規格直交化されている. ニュートリノの時間発展は, その運動量 \vec{p} を任意に固定すれば, $p = \|\vec{p}\|$ として

$$i \frac{d}{dt} |\nu_j\rangle = \sqrt{p^2 + m_j^2} |\nu_j\rangle = E_j(p) |\nu_j\rangle \quad [\forall j = 1, 2, 3] \quad (3.4)$$

と記述され, ニュートリノは質量固有状態の平面波解 $|\nu_j(t)\rangle = e^{-iE_j t} |\nu_j\rangle$ として伝播する. 一方, ニュートリノの検出は荷電カレント反応を通して生成された荷電レプトンを検知することでなされているので, 始状態と終状態はフレーバーニュートリノでなければならない. ニュートリノを質量固有状態として観測することができないからである. したがって t 秒後のニュートリノフレーバーの遷移振幅は, $X_j^{\alpha\beta} = U_{\alpha j} U_{\beta j}^*$ として

$$\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}(p, t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_j X_j^{\alpha\beta*} e^{-iE_j(p)t} \quad (3.5)$$

である. またニュートリノは, 質量が非常に軽く $m_j \ll p$ としてよい超相対論的粒子 (ultrarelativistic particle) である. $E_j(p) \approx p + m_j^2/2p$ と近似すると, 遷移振幅の2乗は

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}(E, L) &\equiv |\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}(p, t)|^2 \\ &= \sum_j X_j^{\alpha\alpha} X_j^{\beta\beta*} + 2\Re \left[\sum_{j < k} X_k^{\alpha\beta} X_j^{\alpha\beta*} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる. これをニュートリノ振動確率という. ただし $p \sim E$, $t \sim L$ とした. なぜならニュートリノは非常に軽いため運動量の大きさ p がそのエネルギー E の大部分を占め, 光速にとっても近い速さ ($v_\nu = p/E \sim 1 = c$) で運動するからである. 2行目第2項から, 異なる質量固有状態が互いに干渉し合って伝播していることがわかる. またMNS行列のユニタリティなどから $J_{kj}^{\alpha\beta} = X_k^{\alpha\beta*} X_j^{\alpha\beta} = U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*$ として

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(E, L) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \Re \left[J_{kj}^{\alpha\beta} \right] \sin^2 \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} + 2\Im \left[J_{kj}^{\alpha\beta} \right] \sin \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \quad (3.7)$$

となっており, 変数 L/E についての振動的な関数である. $\Delta m_{kj}^2 (\equiv m_k^2 - m_j^2)$ は質量二乗差といって, ニュートリノ振動はMNS行列における4つの混合パラメータ ($\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta$) のほかに2つの質量二乗差 ($\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$) という運動学的なパラメータをもっている. また $\Delta m_{kj}^2 L/4E = 2\pi L/L_{osc}^{kj}$ として, ニュートリノ振動の振動的特徴を振動長 $L_{osc}^{kj} = 4\pi E/\Delta m_{kj}^2$ で表すこともできる. 振動確率のうちフレーバーを変える ($\alpha \neq \beta$) ものを遷移確率, 変えない ($\alpha = \beta$) ものを生存確率と呼ぶ.

$$\text{遷移確率: } P_{\alpha\beta}^T(E, L) = -4 \sum_{j < k} \Re \left[J_{kj}^{\alpha\beta} \right] \sin^2 \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} + 2\Im \left[J_{kj}^{\alpha\beta} \right] \sin \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \quad (3.8)$$

$$\text{生存確率: } P_\alpha^S(E, L) = 1 - 4 \sum_{j < k} X_k^{\alpha\alpha*} X_j^{\alpha\alpha} \sin^2 \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \quad (3.9)$$

以上の議論は一般の世代数 $N_\nu (\geq 2)$ においても成り立つ. このときニュートリノ振動のパラメータは

$$\text{混合角: } N \text{ 個, Dirac 位相: } \frac{(N-1)(N-2)}{2} \text{ 個, 質量二乗差: } N-1 \text{ 個} \quad (3.10)$$

*1 状態ベクトル空間において波動関数 $\psi(x)$ は状態ベクトル $|\psi\rangle$ と位置表示状態ベクトル $|x\rangle$ との内積 $\psi(x) = \langle \psi | x \rangle$ と定義される. ただし規格直交条件 $\langle \psi | \chi \rangle = \delta_{\psi\chi}$, $\langle x | y \rangle = \delta(x-y)$ が成り立っているものとする.

ずつある．とくに2世代のときはMNS行列が実回転行列となり，1つの混合角 θ と1つの質量二乗差 Δm^2 のみをパラメータとした振動確率が得られる．

$$\text{遷移確率： } P_{\alpha\beta}^{T(2)}(E, L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E}, \quad (3.11)$$

$$\text{生存確率： } P_{\alpha}^{S(2)}(E, L) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E}. \quad (3.12)$$

反ニュートリノ間にもニュートリノ振動が起こっていて，そのときはMNS行列の複素位相を反転させた($U \rightarrow U^*$)混合として記述される．

ニュートリノ振動を記述するHamiltonianは

$$H_{NO} = U\mathcal{E}U^\dagger = \frac{1}{2E}U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} U^\dagger \quad (3.13)$$

となっている．ニュートリノの時間発展が単位行列に比例した項を除いて H_{NO} のみで与えられるなら，確かに上のニュートリノ振動確率 $P_{\alpha\rightarrow\beta}(E, L)$ を得る．ニュートリノが真空中を伝播するのであれば変わらないが，物質中のニュートリノは物質ポテンシャルによる補正が加わる．

3.2 物質中のニュートリノ振動

ニュートリノは他の物質とほとんど相互作用しないが，惑星程度以上($L > O(10^3)[\text{km}]$)の基線長を伝播するようなときはその効果を考慮する必要がある[5]．とくにニュートリノと物質のコヒーレントな前方散乱から得られる物質ポテンシャルはニュートリノ振動確率に影響を及ぼす．これを物質効果という．物質中でのニュートリノ振動のHamiltonianは

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{NO} &= U\mathcal{E}U^\dagger + A \\ &= \frac{1}{2}U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる．中性カレント反応による物質ポテンシャルはどのフレーバー e, μ, τ にも等しく寄与し，今回のニュートリノ振動確率には効いてこない． \tilde{H}_{NO} を対角化することで物質中のニュートリノ振動確率を得る．形式的にユニタリー行列 \tilde{U} によって

$$\tilde{U}\tilde{H}_{NO}\tilde{U}^\dagger = \tilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E}_3 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

と対角化されたとすると，振動確率は $[\Delta\tilde{E}_{kj} = \tilde{E}_k - \tilde{E}_j, \tilde{X}_j^{\alpha\beta} = \tilde{U}_{\alpha j}\tilde{U}_{\beta j}^*]$

$$\tilde{P}_{\alpha\rightarrow\beta}(E, L) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j<k} \Re \left[\tilde{X}_k^{\alpha\beta*} \tilde{X}_j^{\alpha\beta} \right] \sin^2 \frac{\Delta\tilde{E}_{kj}L}{2} + 2 \sum_{j<k} \Im \left[\tilde{X}_k^{\alpha\beta*} \tilde{X}_j^{\alpha\beta} \right] \sin \Delta\tilde{E}_{kj}L \quad (3.16)$$

である．これは混合行列を \tilde{U} ，質量二乗差を $2E\Delta\tilde{E}_{kj}$ としたニュートリノ振動確率に相等する．

3.2.1 木村-高村-横枕の方法

$\tilde{P}_{\alpha \rightarrow \beta}(E, L)$ は, $\tilde{X}_j^{\alpha\beta}$ を \tilde{H}_{NO} の固有値 \tilde{E}_j の関数として, 解析的に計算することができる [21]. この方法は以下のようにコンパクトに導くことができる [22,23]. まず有効混合行列 \tilde{U} のユニタリー性から

$$\sum_j \tilde{X}_j^{\alpha\beta} = \sum_j \tilde{U}_{\alpha j} \tilde{U}_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.17)$$

の関係式が得られる. また \tilde{U} は \tilde{H}_{NO} を対角化するから

$$(\tilde{H}_{NO})_{\alpha\beta} = (\tilde{U}^\dagger \tilde{\mathcal{E}} \tilde{U})_{\alpha\beta} = \sum_j \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{E}_j \tilde{U}_{\beta j} = \sum_j \tilde{E}_j \tilde{X}_j^{\alpha\beta}, \quad (3.18)$$

$$(\tilde{H}_{NO}^2)_{\alpha\beta} = (\tilde{U}^\dagger \tilde{\mathcal{E}}^2 \tilde{U})_{\alpha\beta} = \sum_j \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{E}_j^2 \tilde{U}_{\beta j} = \sum_j \tilde{E}_j^2 \tilde{X}_j^{\alpha\beta} \quad (3.19)$$

の関係式を得る. これらは

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_3 \\ \tilde{E}_1^2 & \tilde{E}_2^2 & \tilde{E}_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_2^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_3^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \\ [U\mathcal{E}U^\dagger + A]_{\alpha\beta} \\ [(U\mathcal{E}U^\dagger + A)^2]_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

とまとめられる. 左辺の行列は3次の Vandermonde 行列なので逆行列が存在する. $\tilde{X}_j^{\alpha\beta}$ は

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_1^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_2^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_3^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{21}\Delta\tilde{E}_{31}} (\tilde{E}_3\tilde{E}_2 - \tilde{E}_3 - \tilde{E}_2 & 1) \\ \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{21}\Delta\tilde{E}_{32}} (\tilde{E}_3\tilde{E}_1 - \tilde{E}_3 - \tilde{E}_1 & 1) \\ \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}} (\tilde{E}_2\tilde{E}_1 - \tilde{E}_2 - \tilde{E}_1 & 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \\ [U^\dagger\mathcal{E}U + A]_{\alpha\beta} \\ [(U^\dagger\mathcal{E}U + A)^2]_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

となり, \tilde{H}_{NO} のエネルギー固有値 \tilde{E}_j が求められれば対角化できることになる. \tilde{E}_j は Cayley-Hamilton の定理を用いて, 特性方程式

$$|\lambda - \tilde{H}_{NO}| = \lambda^3 - p\lambda^2 + q\lambda - r = 0, \quad (3.22)$$

$$p = \text{tr}[U^\dagger\mathcal{E}U + A] = V_{CC} + \Delta\tilde{E}_{31} + \Delta\tilde{E}_{21}, \quad (3.23)$$

$$q = \text{tr}[\mathcal{C}(U^\dagger\mathcal{E}U + A)] = V_{CC}\Delta\tilde{E}_{31}(1 - X_3^{ee}) + V_{CC}\Delta\tilde{E}_{21}(1 - X_2^{ee}) + \Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{21}, \quad (3.24)$$

$$r = \det[U^\dagger\mathcal{E}U + A] = V_{CC}\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{21}X_1^{ee}. \quad (3.25)$$

を解くことで求められる. $\mathcal{C}(A)$ は行列 A の余因子行列である. 物質中ニュートリノ振動の Hamiltonian をこのように対角化する方法を木村-高村-横枕の方法 (Kimura-Takamura-Yokomakura 公式, KTY 公式) という [21,22,23].

3.2.2 物質効果について

物質中電子数密度 N_e が非一様な場合 ($dN_e/dx \neq 0$), ニュートリノ振動の運動方程式を一般に解くことは難しい. たとえば物質効果によってはニュートリノ振動は最大限強められることがある [6]. この現象は MSW 共鳴または MSW 効果と呼ばれている. 太陽中心から太陽面へと電子密度が指数的に減少しており, 太陽ニュートリノ実験では MSW 効果について十分考慮する必要がある [24]. また地球は地殻-マントル-コア (外核-内核) のような多層構造 [25] をしており, 各層の間における急激な密度変化のある

物質効果についても検証する必要がある。ここではまず、ニュートリノを2世代のみに限定して議論する。すなわち

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{NO}^{(2)} &= \frac{1}{2E} e^{i\theta\sigma_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix} e^{-i\theta\sigma_2} + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2E} e^{i\theta_M\sigma_2} \begin{pmatrix} m_{M1}^2 & 0 \\ 0 & m_{M2}^2 \end{pmatrix} e^{-i\theta_M\sigma_2}\end{aligned}\quad (3.26)$$

の Hamiltonian $\tilde{H}_{NO}^{(2)}$ でのニュートリノ振動確率を考える。これは2次の対称行列なので回転行列 $e^{i\theta_M\sigma_2}$ で対角化される。その角度 θ_M は

$$\tan 2\theta_M = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m^2 \cos 2\theta - a} \quad [a = 2EV_{CC}] \quad (3.27)$$

で与えられており、図 3.1(左) のとおり $\sin^2 2\theta_M$ は $a = \Delta m^2 \cos 2\theta$ の位置に鋭いピークをもち、どんなに小さな混合角 θ だったとしてもニュートリノ振動の振幅は最大となる ($\sin^2 2\theta_M = 1$)。これを MSW 共鳴という。また、フレーバーニュートリノを θ_M だけ回転させた、新しい基底 $(\nu_{M1} \nu_{M2}) = (\nu_e \nu_\mu) e^{-i\theta_M\sigma_2}$ での時間発展は

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \nu_{M1} \\ \nu_{M2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} \Delta m_M^2 & -4iEd\theta_M/dx \\ 4iEd\theta_M/dx & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{M1} \\ \nu_{M2} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\Delta m_M^2 = ((\Delta m^2 \cos 2\theta - a)^2 + (\Delta m^2 \sin^2 2\theta)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

$$\frac{d\theta_M}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\sin^2 2\theta + (\cos^2 2\theta - a)^2} \frac{da}{dx} \quad (3.30)$$

となっており、フレーバー混合とは別の混合を含む。この即時的な基底 $(\nu_{M1} \nu_{M2})$ は、非対角成分が対角成分に比べて十分に小さいという近似の下では質量固有状態 ν と同様の役割を演じている。そのような近似は断熱近似と呼ばれていて、断熱パラメータ

$$\gamma \equiv \frac{\Delta m_M^2}{4E|d\theta_M/dx|} \gg 1 \quad (3.31)$$

という量を用いて評価される。 γ は媒質の電子密度 N_e とその対数微分 $d \ln N_e / dx$ によって与えられている。また Δm_M^2 は物質中ニュートリノ振動の有効質量二乗差 $\Delta m_M^2 \equiv m_{M2}^2 - m_{M1}^2$ を表し、2つの有効質量の二乗 $\tilde{m}_{M1(2)}^2$ は

$$m_{M1(2)}^2 = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + a - (+)\Delta\tilde{m}^2) \quad (3.32)$$

となる。MSW 共鳴のとき Δm_M^2 は最小になり、 m_{M1}^2, m_{M2}^2 は互いに近接する。 $\sin^2 2\theta_M$ 図 3.1(右) はその様子を表している。

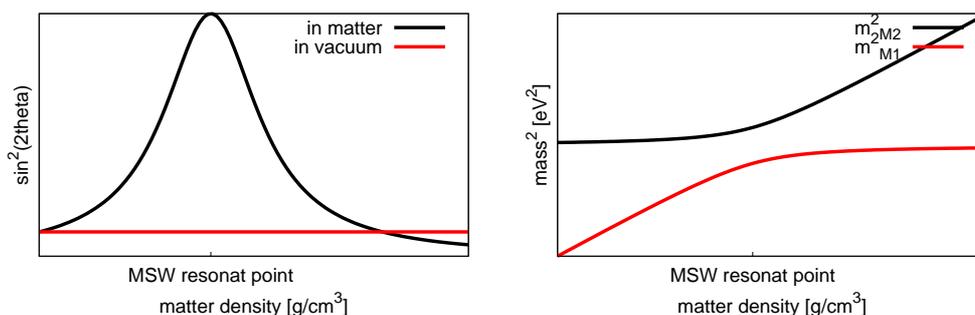


図 3.1: $\sin 2\theta_M, m_{M1(2)}^2$ の媒質密度依存性

断熱近似 ($\gamma \gg 1$) において $\tilde{\nu}_{1(2)}$ は互いに移りあわないが, 断熱近似が破れている ($\gamma \approx 1$) 場合には MSW 共鳴を通過する際に 2 準位 m_{M1}^2, m_{M2}^2 間で Level-Crossing が生じる [7] と考えられている.

ここでは物質効果 (MSW 効果) を 2 世代に限定して紹介したが, 実際のニュートリノ世代数は 3 なので説明としては不十分に思われる. けれども 2 つの質量二乗差に階層性 ($|\Delta m_{32}^2| \gg \Delta m_{21}^2$) があり, 3 世代ニュートリノ振動を 2 つの 2 世代ニュートリノ振動に分離して扱うことができる. その 2 つの MSW 共鳴点もそれぞれのスケールに離れている. したがって, 太陽ニュートリノ実験から $(\theta_{12}, \Delta m_{21}^2)$ が, 大気ニュートリノ実験から $(\theta_{23}, |\Delta m_{32}^2|)$ がそれぞれ測定され, 原子炉ニュートリノ実験から θ_{13} も精度よく測定された. 次の節ではニュートリノ振動のパラメータ $(\theta_{12}, \Delta m_{21}^2, \theta_{23}, |\Delta m_{32}^2|, \theta_{13}, \dots)$ を測定した代表的な実験について紹介する.

3.3 ニュートリノ振動実験

ニュートリノ振動実験は主にそのニュートリノ源によって分類されているが

1. 出現実験 ($\alpha \neq \beta$)
2. 消滅実験 ($\alpha = \beta$)
3. ニュートリノエネルギー E のスケール (ニュートリノ源)
4. 基線長 L

によってさらに細かく分類されている.

出現実験はニュートリノフレーバーの遷移を観測する実験であるが, 終状態として検知するフレーバーニュートリノが始状態に含まれていないほど測定に伴うバックグラウンドが少なく済む. 一方, 消滅実験は測定イベント数と予測値を比較する実験で, イベント数が統計誤差を伴っている. またニュートリノ振動が観測できる範囲は, 感度領域として

$$\frac{\Delta m^2 L}{4E} \sim O(1) \quad (3.33)$$

と表示することもできる. ニュートリノ振動確率は L/E の振動関数で与えられており, 十分な幅をもつピークが上式の領域にあるからである. 同じニュートリノ源からの測定では短基線実験, 長基線実験に分けられる.

3.3.1 太陽ニュートリノ実験

太陽内部の核融合反応によりニュートリノが生成される. 標準太陽模型 (Standard Sun Model, SSM) を用いて, 太陽の明るさなどから飛来してくる太陽ニュートリノの予測量を見積もることができる. 太陽ニュートリノを生成する主な反応として

$$\begin{aligned} pp\nu \text{ (99.76\%)} \quad p + p &\rightarrow D + e^- + \nu_e & [E \leq 0.4\text{MeV}] \\ Be\nu \text{ (18.95\%)} \quad {}^7\text{Be} + e^- &\rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e & [E = 0.86\text{MeV}(90\%), 0.38\text{MeV}(10\%)] \\ B\nu \text{ (a few \%)} \quad B &\rightarrow 2\alpha + e^+ + \nu_e & [E \leq 15\text{MeV}] \end{aligned} \quad (3.34)$$

があり [20], (0.2 – 15)MeV にあるニュートリノが 1A.U. ($\simeq 1.5 \times 10^{11}\text{m}$) の非常に長い基線長を走って地球まで到達する. 太陽ニュートリノの検出は放射化学反応を用いた方法と Cherenkov 放射

を用いた水チェレンコフ検出器がある。太陽ニュートリノ問題を提起した Homestake 実験では塩素 $\text{Cl}({}^{37}\text{Cl} + \nu_e \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-)$ が用いられていた。ほかにもガリウム Ga を用いた実験 (Gallex/GNO, SAGE), 液体シンチレータの Super-Kamiokande(水), SNO(重水), Borexino(液体ガリウム) などがある。これらの結果から

$$\sin^2 2\theta_{12} = 0.846 \pm 0.021 \quad (3.35)$$

$$\Delta m_{21}^2 = (7.53 \pm 0.18) \times 10^{-5} \text{eV}^2 \quad (3.36)$$

が得られている [1].

3.3.2 大気ニュートリノ実験

地球に降り注いでいる宇宙線は大気中で次々と崩壊して、空気シャワーとなって地上に到達する。このときニュートリノも生成されており、その成分比はおよそ $R \equiv \#(\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu) / \#(\nu_e, \bar{\nu}_e) \simeq 2$ であると理論的に計算することができる。

$$\pi^{+(-)} \rightarrow \mu^{+(-)} + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \quad (3.37)$$

$$\mu^{+(-)} \rightarrow e^{+(-)} + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu) \quad (3.38)$$

しかしながら測定結果は $R \equiv 1.3$ であり、矛盾するものであった。これは大気ニュートリノ欠損問題と呼ばれていたが、ニュートリノ振動を考慮して計算しなおすと測定結果とよく一致する結果が得られた。地上から大気圏までの距離は (15-20)km 程度、地球の直径は約 1.3×10^4 km である。またエネルギーは (0.5 – 100)GeV の範囲にあり、振動は $\Delta m^2 \geq O(10^{-4})\text{eV}^2$ の範囲で観測できるとわかる。実際

$$\sin^2 2\theta_{23} = 0.999_{-0.018}^{+0.001} \quad (\text{NORMAL MASS HIERARCHY}) \quad (3.39)$$

$$= 1.000_{-0.017}^{+0.000} \quad (\text{INVERTED MASS HIERARCHY}) \quad (3.40)$$

$$\Delta m_{32}^2 = (2.44 \pm 0.06) \times 10^{-3} \text{eV}^2 \quad (\text{NORMAL MASS HIERARCHY}) \quad (3.41)$$

$$= -(2.52 \pm 0.07) \times 10^{-3} \text{eV}^2 \quad (\text{INVERTED MASS HIERARCHY}) \quad (3.42)$$

のニュートリノ振動が発見されている [1]. 大気ニュートリノの検出実験は、太陽ニュートリノにもあった水 Cherenkov 光検出器を用いた Super-Kamiokande, IMB, MINOS, IceCube(氷) などである。

$O(10-10^4)$ km という長い距離を伝播してくる大気ニュートリノが最大混合で振動しているため、質量二乗差 Δm_{32}^2 の符号を調べるには大気ニュートリノ検出を精度よく行わなければならない。現状この質量縮退は解かれておらず、ニュートリノ質量スペクトルが順階層性 (NORMAL MASS HIERARCHY) ($m_1^2 < m_2^2 < m_3^2$) なのか逆階層性 (INVERTED MASS HIERARCHY) ($m_3^2 < m_1^2 < m_2^2$) なのかという疑問が残っている。これは質量階層性問題と呼ばれている。

3.3.3 原子炉ニュートリノ実験

原子炉ニュートリノは、炉内の重たい放射性原子が β 崩壊することで生成される反電子ニュートリノである。

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.43)$$

このとき他のフレーバーニュートリノ (ν_μ, ν_τ) は生成されず、電子ニュートリノの欠損はニュートリノ振動によるものに他ならない。太陽ニュートリノや大気ニュートリノと違い、人工的に生成されたニュート

リノを比較的自由的な基線長を走らせて測定することができる。これによって小さな値とされていた混合角 θ_{13} を非常に精度よく測定することができた。

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.093 \pm 0.008[1] \quad (3.44)$$

ニュートリノ振動は、その起源が未明であるものの、これまでの研究の成果によって3つの混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ と2つの質量二乗差 $\Delta m_{21}^2, |\Delta m_{32}^2|$ の測定を可能にした。3世代混合の枠組みにおいてはCP位相 δ_{CP} の測定と質量階層性問題の解決が未解決の課題として残っており、ニュートリノ検出器の精度向上によってこれらが克服されるだろうと期待されている。現行の Super-Kamiokande よりも20倍もの大きな体積をもつ検出器 Hyper-Kamiokande の建造が計画されている [26]。一般に検出器の体積が大きくなればその検出するイベント数が増大し統計誤差の低減につながる。単純計算で Hyper-Kamiokande は Super-Kamiokande よりも $1/2\sqrt{5}$ 倍小さい統計誤差でニュートリノを検出することができ、このような精密測定がBSMを探求する可能性を拡げてくれる。

第 4 章

非標準的相互作用

ニュートリノ振動はいち早く BSM を示唆する現象として、今後も素粒子研究の重要な位置を占めるだろうことが予想される。ニュートリノ振動実験も、ニュートリノ振動パラメータの測定完了を目指しつつ、ニュートリノの精密測定による標準模型からのズレを測定することの実現を模索しつつある。ここでは、BSM の一つとされる「非標準的相互作用」によるニュートリノ振動の物質効果を説明する。

物質効果はニュートリノとその媒質との相互作用の効果によって導かれている。通常であれば電子電子ニュートリノの前方散乱から (1,1) 成分のみを持つ物質ポテンシャルとして表すことができた。一方で、物質効果は本当に電子電子ニュートリノの前方散乱だけで十分説明できると断言することはできない。現行のニュートリノ実験の解析から、フレーバーに依存した非標準的相互作用に関してあまり強くない制限が与えられており、今後とも BSM の兆候として考慮していかなければならない。

ニュートリノの相互作用として標準的に CC 相互作用と NC 相互作用が存在するが、これらは 100GeV よりさらに低いエネルギー極限においては 4-Fermi 相互作用という有効理論で扱われる。物質効果はニュートリノ以外の物質をバックグラウンドとしてこの 4-Fermi 相互作用を積分することで導かれている。ここで我々は 4-Fermi 相互作用を現象論的に拡張させた、新しい NC 相互作用

$$\mathcal{L}_{NSI} = - \sum_{f,\alpha,\beta} G_F \epsilon_{\alpha\beta}^f \bar{\nu}_\alpha \gamma^\sigma \nu_\beta \bar{f} \gamma_\sigma f \quad [f = u, d, e, \alpha, \beta = e, \mu, \tau] \quad (4.1)$$

を考えてみる [5,27]。これは物質粒子 (u,d,e) との相互作用によってニュートリノフレーバー遷移 ($\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$) が起こる可能性について議論している。その比を $\epsilon_{\alpha\beta}^f$ というパラメータで表している。標準模型では GIM 機構があるのでフレーバーを変える NC 相互作用はないものとしており、上のような相互作用は非標準的相互作用と呼ばれている。非標準的相互作用による物質ポテンシャルは

$$A_{NSI} := a \begin{pmatrix} \epsilon_{ee} & \epsilon_{e\mu} & \epsilon_{e\tau} \\ \epsilon_{e\mu}^* & \epsilon_{\mu\mu} & \epsilon_{\mu\tau} \\ \epsilon_{e\tau}^* & \epsilon_{e\mu}^* & \epsilon_{\tau\tau} \end{pmatrix} \quad [\epsilon_{\alpha\beta} = \sum_f \epsilon_{\alpha\beta}^f N_f / N_e] \quad (4.2)$$

となる。行列中の対角成分は実数、非対角成分は一般に複素数のパラメータで、これらを NSI パラメータと呼ぶ。すでに、NSI パラメータに対する制限が種々のニュートリノ振動実験から与えられている。大気ニュートリノ実験以外の実験から与えられる NSI パラメータの global constraint は

$$\begin{pmatrix} |\epsilon_{ee}| < 4 \times 10^0 & |\epsilon_{e\mu}| < 3 \times 10^{-1} & |\epsilon_{e\tau}| < 3 \times 10^0 \\ * & |\epsilon_{\mu\mu}| < 7 \times 10^{-2} & |\epsilon_{\mu\tau}| < 3 \times 10^{-1} \\ * & * & |\epsilon_{\tau\tau}| < 2 \times 10^1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

である [8]。ミューニュートリノに関する NSI パラメータに対する制限 (上式 2 行目 2 列目) が強い一方で、電子ニュートリノ、タウニュートリノに関する NSI パラメータにはあまり強い制限がかけられてい

ない。ここでは $\varepsilon_{e\mu}, \varepsilon_{\mu\mu}, \varepsilon_{\mu\tau} \rightarrow 0$ とし, $\varepsilon_{ee}, \varepsilon_{e\tau}, \varepsilon_{\tau\tau}$ に対する制限を大気ニュートリノ実験において考える。NSI の効果を導入した大気ニュートリノ振動の Hamiltonian は

$$H_{NSI} = \frac{1}{2E} \left\{ U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} U^\dagger + a \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{ee} & 0 & \varepsilon_{e\tau} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{e\tau}^* & 0 & \varepsilon_{\tau\tau} \end{pmatrix} \right\} \quad (4.4)$$

となっており, とくに第2項は $a \propto E$ によって高エネルギーであればあるほど影響を及ぼしてしまう。ニュートリノ振動実験と矛盾しないようにするためには, ニュートリノが第2項を対角化するような基底で時間発展していることを考える。これは $(e - \tau)$ の複素回転によってなされる。

$$\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{ee} & 0 & \varepsilon_{e\tau} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{e\tau}^* & 0 & \varepsilon_{\tau\tau} \end{pmatrix} = B(\beta, \gamma) \begin{pmatrix} \Lambda'_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda'_\tau \end{pmatrix} (B(\beta, \gamma))^\dagger, \quad (4.5)$$

$$B(\beta, \gamma) = e^{i\gamma\lambda_3} e^{-i\beta\lambda_5}, \quad (4.6)$$

$$\tan 2\beta \equiv \frac{2|\varepsilon_{e\tau}|}{1 + \varepsilon_{ee} - \varepsilon_{\tau\tau}}, \quad (4.7)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{2} \arg \varepsilon_{e\tau}. \quad (4.8)$$

このときニュートリノは

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \left\{ U^b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} U^{b\dagger} + a \begin{pmatrix} \Lambda'_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda'_\tau \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$U^b = B^\dagger U \quad (4.11)$$

と新しい基底 $\nu^b \equiv (\nu'_e \ \nu'_\mu \ \nu'_\tau)^T$ で時間発展し, 新しい混合行列 U^b で表されるフレーバー混合の下にニュートリノ振動する。この新しい基底のことを NSI 基底と呼ぶ。NSI 基底では ν_e と ν_τ がすでにお互い混合しているが, 大気ニュートリノの場合は主に ν_μ の消失実験としてニュートリノ振動を観測しているので, NSI 基底はフレーバー固有状態と見分けがつかない。また, 固有値 $\Lambda'_e, \Lambda'_\tau$ は

$$\Lambda'_e = 1 + \varepsilon_{ee} + \varepsilon_{\tau\tau} + (1 + \varepsilon_{ee} - \varepsilon_{\tau\tau}) \sqrt{1 + \frac{4|\varepsilon_{e\tau}|^2}{(1 + \varepsilon_{ee} - \varepsilon_{\tau\tau})^2}}, \quad (4.12)$$

$$\Lambda'_\tau = 1 + \varepsilon_{ee} + \varepsilon_{\tau\tau} - (1 + \varepsilon_{ee} - \varepsilon_{\tau\tau}) \sqrt{1 + \frac{4|\varepsilon_{e\tau}|^2}{(1 + \varepsilon_{ee} - \varepsilon_{\tau\tau})^2}} \quad (4.13)$$

であり, $\Lambda'_\tau = 0$ であれば NSI を考慮した大気ニュートリノ振動は通常物質中ニュートリノ振動として扱うことができる。また, A.Friedland, C.Lunardini の議論 [28] によると大気ニュートリノ実験の数値解析から $(\varepsilon_{e\tau} - \varepsilon_{\tau\tau})$ のパラメータ空間 ($\varepsilon_{ee} : \text{fix.}$) において放物線を描くような許容領域 (図 4.1) が得られている。解析的な側面から $\Lambda'_\tau = 0$ とするために関係式

$$\varepsilon_{\tau\tau} = \frac{|\varepsilon_{e\tau}|^2}{1 + \varepsilon_{ee}} \quad (4.14)$$

を仮定することになるがこれは, 数値計算的にも妥当であるとされている。

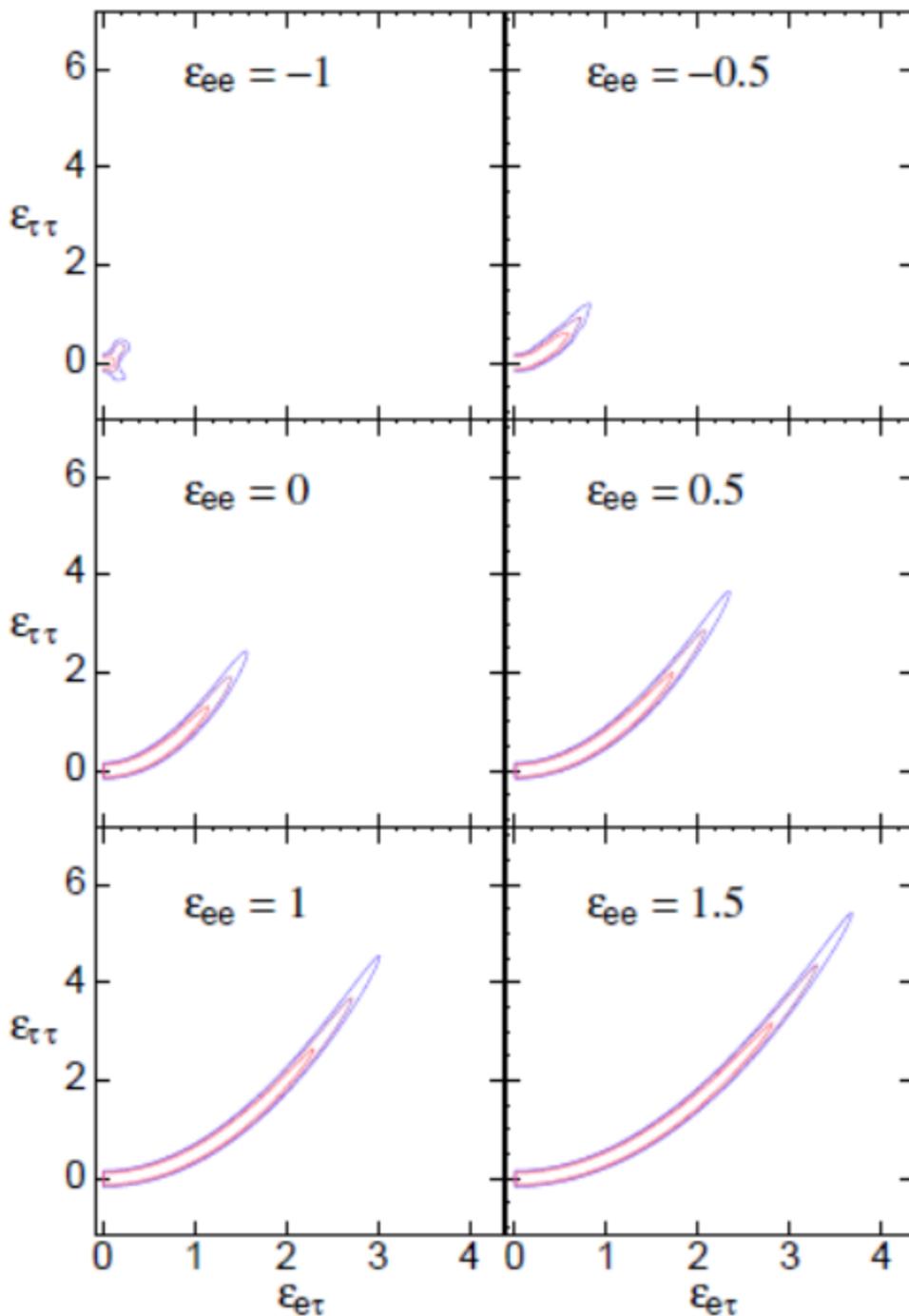


図 4.1: 各 ϵ_{ee} における $(\epsilon_{e\tau}, \epsilon_{\tau\tau})$ の許容領域. 内側から信頼度 95%, 99%, 3σ の外郭線を引いており, $\epsilon_{e\tau}$ の位相に独立した結果 ($\epsilon_{e\tau}$ と $-\epsilon_{e\tau}$ とは対称) である. [28] から引用.

この仮定の下, NSI に対する制限は $(\epsilon_{ee} - \epsilon_{e\tau})$ のパラメータ空間における許容領域で表示することができる. このような方法によると, 図 4.2 で与えられているような許容領域を示すことになる. その台形の傾きの絶対値に対する制限

$$|\tan \beta \equiv \frac{|\epsilon_{e\tau}|}{1 + \epsilon_{ee}}| < 0.8 [29] \tag{4.15}$$

が, 大気ニュートリノ実験からの NSI に対する制限を与えている.

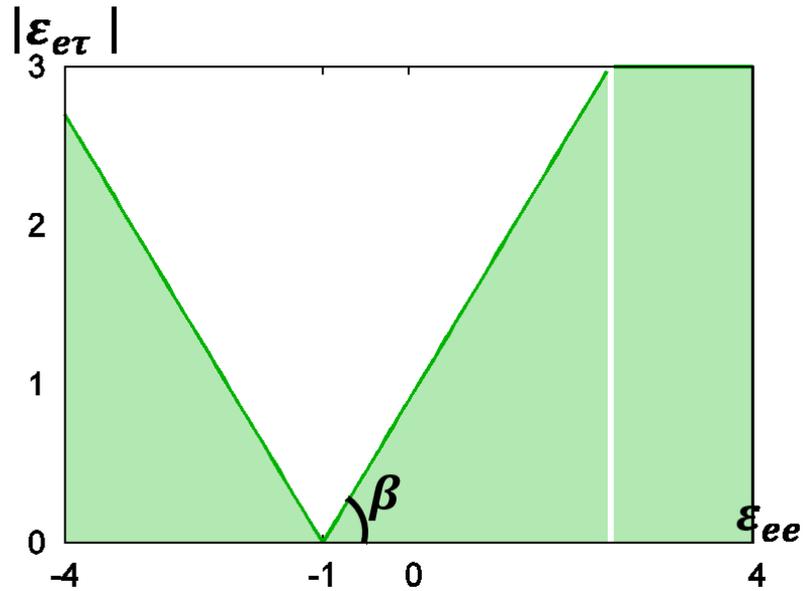


図 4.2: 大気ニュートリノ実験における NSI への制限の模式図

非標準的相互作用はあくまでも現象論的に導入されているもので、それが一体どのようにニュートリノ振動に影響しているのかを知ることはできない。この、決して小さくない NSI の制限内にどのような物理が隠されているのかを探るために、本研究では地球の密度分布が大きく反映されるようなニュートリノ振動確率の解析的表式を求め、その振る舞いについて調べた。次の章では、地球をコアとマンツルの 2 層に分割した新しいニュートリノ振動確率の解析的表式について述べる。

第 5 章

物質中ニュートリノ振動確率の解析的 表式

物質効果が大きく寄与するには、通常媒質中を数千 km 以上もの基線長を走るニュートリノ振動を観測しなければならない。太陽ニュートリノは天文単位という非常に長い基線長を走り、そのニュートリノ振動は振動が平均化された状態で観測されてしまう。一方、大気ニュートリノ実験では地球を通過してくるニュートリノも測定するので、物質効果が顕著なニュートリノ振動を観測するのに適している。地球を通過することによる物質効果は 10 GeV 程度で顕著になることが知られており、我々は数 GeV スケールのエネルギースペクトルに注目している。数 GeV スケールの場合、 $\Delta m_{31}^2 \sim 2.5 \times 10^{-3} \text{eV}^2$ のニュートリノ振動が主流となり、 $\Delta m_{21}^2 \sim 7.5 \times 10^{-5} \text{eV}^2$ による振動の寄与は無視できるほどに小さい。したがって本研究では NSI を考慮した大気ニュートリノ振動の Hamiltonian を

$$H = \frac{1}{2E} \left\{ e^{i\theta_{23}\lambda_7} e^{i\theta_{13}\lambda_5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} e^{-i\theta_{13}\lambda_5} e^{-i\theta_{23}\lambda_7} + a \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{ee} & 0 & \varepsilon_{e\tau} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{e\tau}^* & 0 & \frac{|\varepsilon_{e\tau}|^2}{1 + \varepsilon_{ee}} \end{pmatrix} \right\} \quad (5.1)$$

として扱う。標準的混合の場合には、ニュートリノ振動自体は 2 世代振動に帰着し CP 位相 δ_{CP} はあられもないはずである。しかしながら NSI が存在する場合には、フレーバー固有状態を NSI 基底にとり換える行列 $B(\beta, \gamma)$ によって、振動確率は CP 位相 δ_{CP} だけでなく $\gamma = \arg \varepsilon_{e\tau}/2$ という新たな位相にも依存することになる。

以下では簡単のため、基線長が地球の直径の場合のみ議論する。基線長が最大限に長いので物質効果による寄与が一番影響しやすい。

5.1 地球内部における密度分布の不定性

大気ニュートリノ振動を研究する上で、地球内部がどのような密度分布をしているのかを調べておく必要がある。地球の内部構造は、地球の質量、慣性モーメント、地震波のデータなどから球対称なモデルとして推定されている。Preliminary Reference Earth Model (PREM)[30,31] はその最も標準的なモデルである。また地震波の解析から地球内部が層状構造をなしていることがわかる。地殻-マントル-外核-内核の 4 層に分けることができ、それぞれの境界は順に Mohorovičić 不連続面、Gutenberg 不連続面 (Core-Mantle Boundary, CMB ともいう)、Lehmann 不連続面と呼ばれている。とくに Gutenberg 不連

続面における密度差は大きく，地球全体からみてその内部の密度分布は凸型になっていることがわかる．PREM による地球内部の密度分布のプロット例を図 5.1 に示す．

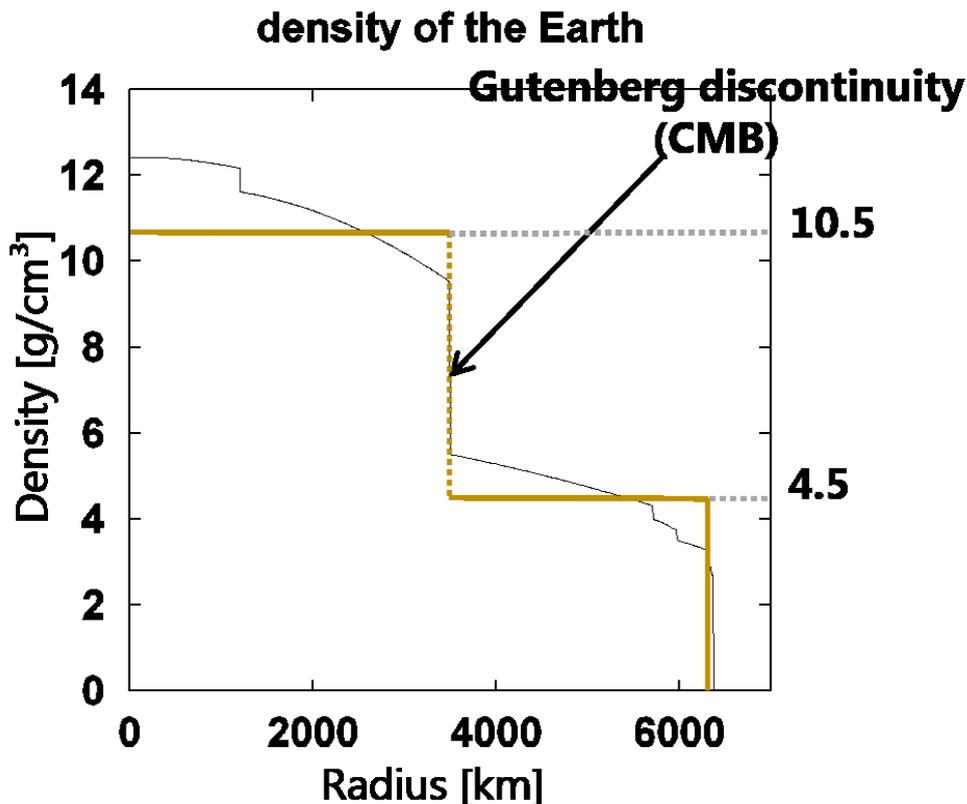


図 5.1: 実線 : PREM による地球内部の密度分布. [31] より引用. 黄土線 : コアとマンツルの平均密度.

5.2 標準的混合の場合の振動確率

大気ニュートリノ振動において，振動確率の解析的表式は地球を一定密度 (5.5g/cm^3) の球体媒質として扱うことが一番簡単な従来の近似である．地面の真下 ($\Theta_{\oplus} = 0$) からやってくる大気ニュートリノの振動確率は

$$P_{\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e}(E, L = 2R_{\oplus}) = \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\tilde{\theta}_{13} \sin^2 \frac{\Delta\tilde{m}_{31}^2 R_{\oplus}}{2E}, \quad (5.2)$$

$$\tan 2\tilde{\theta}_{13} = \frac{\sin 2\theta_{13}}{\cos 2\theta_{13} - a_{\oplus}}, \quad (5.3)$$

$$\Delta\tilde{m}_{31}^2 = \Delta m_{31}^2 \sqrt{1 + a_{\oplus}^2 - 2a_{\oplus} \cos 2\theta_{13}} \quad (5.4)$$

とされている．一方で地球内部がコア部 (外核, 内核) とマンツル部 (マンツル, 地殻) とで大きな密度差をもっていることから，地球内部を凸型の密度分布をもつ 2 層モデルとして取り扱うことが地球の内部構

造を反映させるのに良い近似であることが知られている。その場合の解析的表式は

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus) = \sin^2 \theta_{23} (\sin 2\theta_{13,c} \sin \Phi_c - 2C_{cm} \sin 2\theta_{13,m} \sin \Phi_m)^2, \quad (5.5)$$

$$C_{cm} = \cos \Phi_c \cos \Phi_m - \cos 2\theta_{13,c} - 2\theta_{13,m} \sin \Phi_c \sin \Phi_m, \quad (5.6)$$

$$\tan 2\tilde{\theta}_{13,c(m)} = \frac{\sin 2\theta_{13}}{\cos 2\theta_{13} - a_{c(m)}}, \quad (5.7)$$

$$\Phi_{c(m)} = \frac{\Delta m_{31}^2 R_\oplus}{2E} \sqrt{1 + a_{c(m)}^2 - 2a_{c(m)} \cos 2\theta_{13}} \quad (5.8)$$

となる。式の導出を付録 A に書いておく。 $a_{c(m)}$ はコア部 (マントル部) における物質ポテンシャルである。この振動確率ではコア部のニュートリノ振動とマントル部のニュートリノ振動がうまく干渉し合うことで、振動確率の増幅を引き起こすことが知られている。振動確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus)$ は

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus) = \sin^2 \theta_{23} \times \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\theta_{13,c} \sin \Phi_c \cos^2 (\Phi_m/2) \\ - \sin 2(2\theta_{13,m} - \theta_{13,c}) \sin \Phi_c \sin^2 (\Phi_m/2) \\ + \sin 2\theta_{13,m} \cos \Phi_c \sin \Phi_m \end{array} \right\}^2 \quad (5.9)$$

となっており、大括弧内の各項の波が合成して振る舞うからである。その様子を図 5.2 に表す。赤線、青線の波にそれぞれコア部、マントル部の MSW ピークが立ち、緑線の波はコアとマントルの密度の違いによるピークをもっている。右から 2 番目のピークなどのように、一つのピークが別の波に上乘せされ、そのエネルギーにおける振動確率が増幅される。合計の振動確率が緑の波のピークより低くなっている部分は、3 つの波の位相差が振動確率の増幅を抑制するはたらきをしているからである。

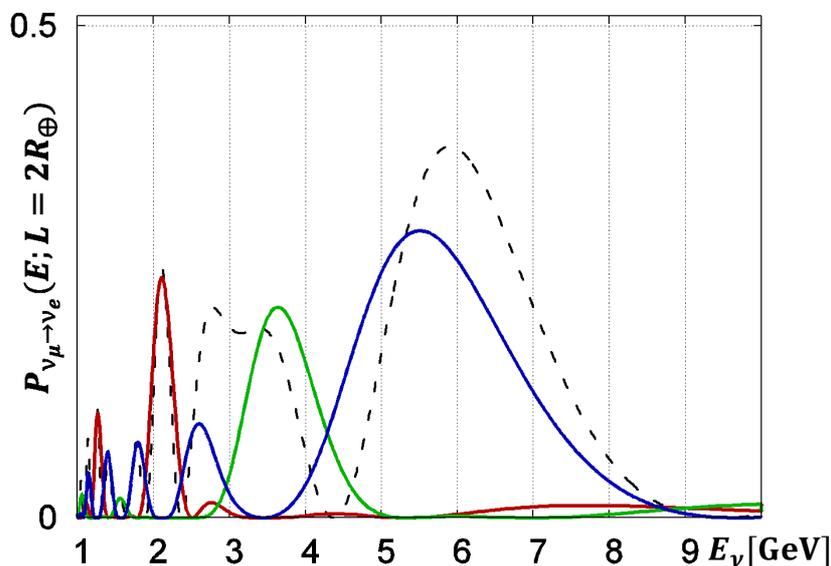


図 5.2: 振動確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus)$ (破線) では 3 つの波 (青, 赤, 緑) が干渉している。

振動確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus)$ が増幅されるのは、異なる密度をもつ媒質の物質効果によって振動パターンの数が増えたからである。地球を一様密度であるとした場合には振動パターンはただ 1 つのみに限られており、従来の大気ニュートリノ振動確率の解析では説明できない。本研究では、この増幅現象を見るため地球内部の層状構造を考慮した振動確率の解析的表式の振る舞いを調べた。とくに、密度の不定性がある場合の標準的な振動確率の振る舞いや NSI を考慮した場合の振動確率の振る舞いに着目している。

地球内部を層状に分割すると、密度の不定性について解析的な議論をすることができる。密度の値を動かすとその全体の質量も変動するので、一定密度の場合に不定性を与えると地球質量を変動させてしまい不自然な議論になってしまう。コアとマントルなど、異なる複数の密度の層に分割することで、地球質量を一定に保ったままで密度の不定性を考慮することができる。また図 5.1 にあるようにコア部とマントル部でそれぞれ一定の密度を有しているのではなくそれぞれの平均密度に幅をもっているため、我々は密度の不定性について考慮しておかなければならない。コア部が平均密度 ρ_c から $\Delta\rho_c$ だけずれた場合、マントルは平均密度 ρ_m から

$$\Delta\rho_m = -\Delta\rho_c \frac{R_{Gut}^3}{R_{\oplus}^3 - R_{Gut}^3} \tag{5.10}$$

だけずれることになる。 R_{Gut} は地表から Gutenberg 不連続面までの深さで約 3.5×10^3 km, 地球半径 R_{\oplus} は約 6.4×10^3 km, コアとマントルそれぞれの平均密度は $10.5\text{g/cm}^3, 4.5\text{g/cm}^3$ であり、密度は一定の比

$$\frac{-\Delta\rho_m/\rho_m}{\Delta\rho_c/\rho_c} \sim 0.46 \tag{5.11}$$

にしたがってずれる。このようにして密度に不定性を与えた場合の振動確率の振る舞いを図 5.3 にプロットした。

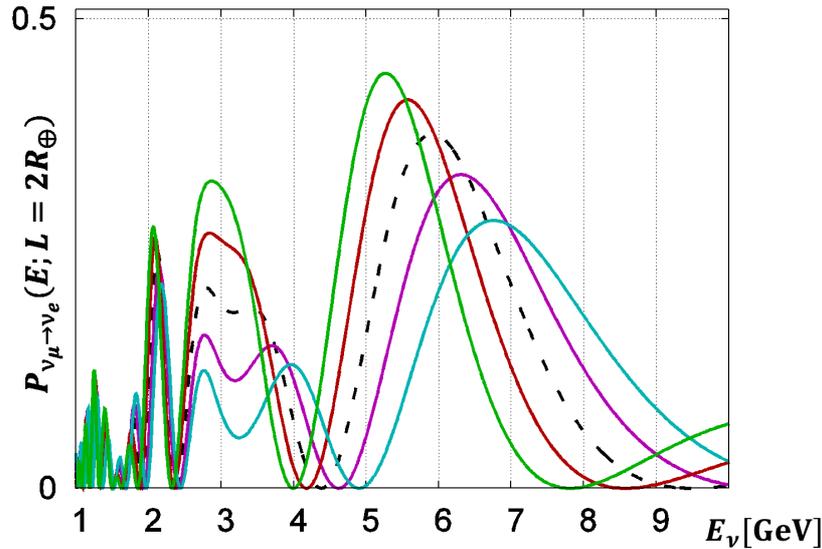


図 5.3: コア部とマントル部のそれぞれ平均密度における振動確率 $P_{\nu_{\mu} \to \nu_e}^{mcm}(E, L = 2R_{\oplus})$ (破線) と、地球質量を一定に保ちながらコア部の密度を平均から +10%(緑), +5%(赤), -5%(紫), -10%(青) だけずらした振動確率の振る舞い

振動確率の増幅現象は密度のずれの向きに対して異なる様相を示していることがわかる。コアの物質効果はエネルギーの低い側に鋭いピークを立てるので密度の不定性の効果はあまり寄与しない。一方、マントルの物質効果はエネルギーの高い側に緩やかなピークをつくるので、密度の不定性の効果が大きくあらわれる。また、コアの密度が正(負)の方向にずれるとマントルの密度は負(正)の方向にずれるので両者の密度は大きく(小さく)異なるようになるので、コアの密度が平均から正(負)の方向にずれた場合コアとマントルの密度の違いによるピークは低(高)エネルギー側へシフトして振動確率を増幅(減少)させ

る. 図 5.3 でも, それぞれのプロットにおける右から 2 番目の山に, このような異なる増幅現象の振る舞いが生じている.

標準的な大気ニュートリノ振動では, 地球密度に不定性を与えることで振動確率の振る舞いが変わることがわかった. 実はニュートリノ振動に非標準的相互作用を導入した振動確率の振る舞いにも, 密度の不定性を与えた場合の標準的振動確率の振る舞いに類似したものがある. 次節ではそのことについて述べる.

5.3 NSI の考慮した場合の, コアマントルニュートリノ振動確率の解析的表式

コアマントルニュートリノ振動に NSI も考慮すると, 各密度における振動の成分以外にも, フレーバー固有状態と NSI 基底との混合によってさらに多くの振動成分をもつことになる. この NSI における混合の度合いは $\beta (\equiv \tan^{-1} |\varepsilon_{e\tau}| / (1 + \varepsilon_{ee}))$ と $\gamma (\equiv \arg \varepsilon_{e\tau} / 2)$ で与えられていて, 振動確率は

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus) = A \cos^2 \beta + B \cos \beta \sin \beta + C \sin^2 \beta \quad (5.12)$$

の形で表される. A, B, C はそれぞれ

$$A = \sin^2 \theta_{23}^b (\sin 2\theta_{13,c}^b \sin \Phi_c^b - 2C_{cm}^b \sin 2\theta_{13,m}^b \sin \Phi_m^b)^2, \quad (5.13)$$

$$B = 2 \sin^2 \theta_{23}^b \cos \theta_{23}^b (\sin 2\theta_{13,c}^b \sin \Phi_c^b - 2C_{cm}^b \sin 2\theta_{13,m}^b \sin \Phi_m^b) \times \left\{ \begin{array}{l} (\sin 2\theta_{13,c}^b \sin \Phi_c^b - 2C_{cm}^b \sin 2\theta_{13,m}^b \sin \Phi_m^b) \cos (\delta_{CP}^b + \zeta^b) \\ - (1 - \cos \Phi_c^b + 2C_{cm}^b \cos \Phi_c^b) \sin (\delta_{CP}^b + \zeta^b) \end{array} \right\} \quad (5.14)$$

$$C = \sin^2 \theta_{23}^b \cos^2 \theta_{23}^b \times \left\{ \begin{array}{l} (\sin 2\theta_{13,c}^b \sin \Phi_c^b - 2C_{cm}^b \sin 2\theta_{13,m}^b \sin \Phi_m^b)^2 \\ + (1 - \cos \Phi_c^b + 2C_{cm}^b \cos \Phi_c^b)^2 \end{array} \right\} \quad (5.15)$$

である. 右上の添え字 b がつけられているパラメータは NSI の効果にとる補正が加えられている. それぞれの定義は以下のとおりである [$c_\beta = \cos \beta$, $s_\beta = \sin \beta$].

$$\tan \theta_{23}^b = \frac{s_{23}c_{13}}{|c_\beta c_{23}c_{13}e^{-i\gamma} - s_\beta s_{13}e^{-i\delta_{CP}+i\gamma}|}, \quad (5.16)$$

$$\sin \theta_{13}^b = |c_\beta s_{13}e^{-i\delta_{CP}-i\gamma} + s_\beta c_{23}c_{13}e^{+i\gamma}|, \quad (5.17)$$

$$\delta_{CP}^b = -\arg (c_\beta s_{13}e^{-i\delta_{CP}-i\gamma} + s_\beta c_{23}c_{13}e^{+i\gamma}), \quad (5.18)$$

$$\zeta^b = \arg (c_\beta c_{23}c_{13}e^{-i\gamma} - s_\beta s_{13}e^{-i\delta_{CP}+i\gamma}), \quad (5.19)$$

$$a_{c(m)}^b = a_{c(m)} \frac{1 + \varepsilon_{ee}}{c_\beta^2} \quad (5.20)$$

$$\tan 2\theta_{13,c(m)}^b = \frac{\sin 2\theta_{13}^b}{\cos 2\theta_{13}^b - a_{c(m)}^b} \quad (5.21)$$

$$\Phi_{c(m)}^b = \frac{\Delta m_{31}^2}{4E} R_{C(M)} \sqrt{1 + a_{c(m)}^{b2} - 2a_{c(m)}^b \cos 2\theta_{13}^b} \quad (5.22)$$

$$C_{cm}^b = \cos \Phi_c^b \cos \Phi_m^b - \cos 2\theta_{13,c}^b - 2\theta_{13,m}^b \sin \Phi_c^b \sin \Phi_m^b \quad (5.23)$$

式の導出を付録 B に書いておく. とくに A は標準振動の解析的表式と同じ形をしていて, NSI パラメータが小さい場合の振動確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus)$ の振る舞いは標準振動のものに類似している. 実際図 5.4-7 にあるように, NSI パラメータが小さい場合に A の振動が支配的となっている.

なお、振動確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus)$ 全体のプロットを破線で、赤線、緑線、青線がそれぞれ $A \cos^2 \beta$, $B \cos \beta \sin \beta$, $C \sin^2 \beta$ の振動のプロットを表している。これらは簡単のために $\varepsilon_{ee} = 0, \gamma = 0, \delta_{CP} = 3\pi/2$ としている。真空の CP 位相の値はまだ決定されていないが、Daya Bay や T2K などのニュートリノ振動実験から $\delta_{CP} \sim 3\pi/2$ という兆候が出ており、今回はその値を代入した。

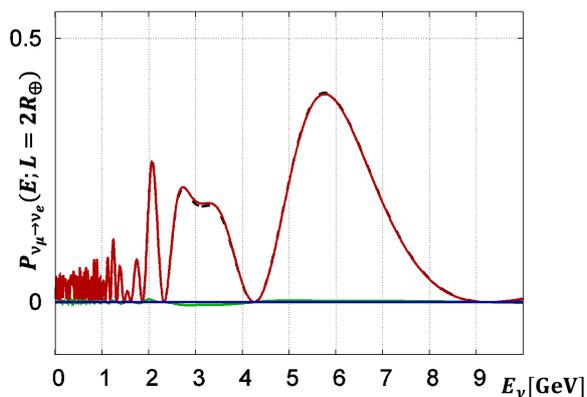


図 5.4: $\tan \beta = |\varepsilon_{e\tau}| = 0.01$ の場合の振動確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus)$ の内訳。NSI パラメータが十分小さいときは A の振動が支配的になり、標準振動の場合のように振動確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus)$ はそれぞれにピークをもつ 3 つの波の合成波として振る舞う。

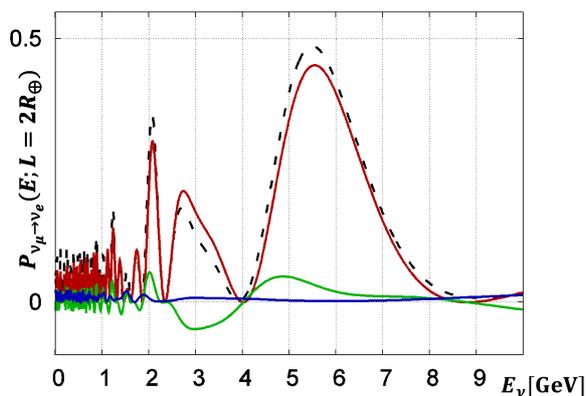


図 5.5: $\tan \beta = |\varepsilon_{e\tau}| = 0.1$ の場合の振動確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus)$ の内訳。徐々に A 以外の成分 B, C の振動が大きくなる。

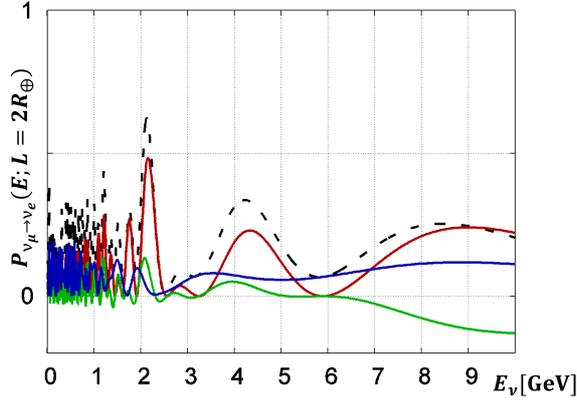


図 5.6: $\tan \beta = |\varepsilon_{e\tau}| = 0.3$ の場合の振動確率 $P_{\nu_{\mu} \to \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_{\oplus})$ の内訳. NSI パラメータがある程度大きくなると, A 以外の振動の成分 B, C も寄与するようになる. このとき標準振動の場合とは異なる振る舞いをみせる.

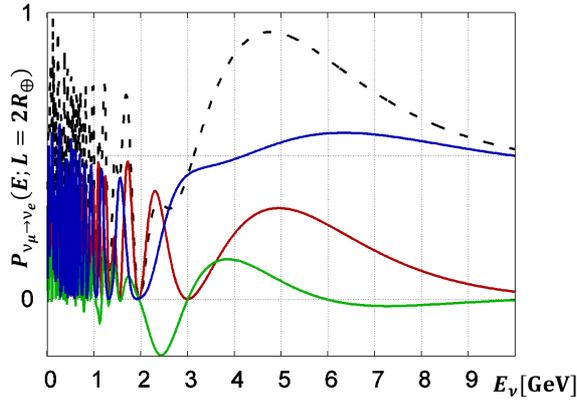


図 5.7: $\tan \beta = |\varepsilon_{e\tau}| = 0.7$ の場合の振動確率 $P_{\nu_{\mu} \to \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_{\oplus})$ の内訳. NSI パラメータが制限一杯に与えられているとき, A の振動は比較的弱まり, 標準振動の場合のものと大きく異なる振る舞いを示す.

5.4 NSI パラメータの変化におけるコアマントルニュートリノ振動確率の振る舞い

次に NSI パラメータを変化させたときに振動確率 $P_{\nu_{\mu} \to \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_{\oplus})$ の振る舞いについて考える. 前の節で得られた知見を活かして, 各 $|\varepsilon_{e\tau}|$ における振動確率において, ε_{ee} を変化させたときの振る舞いの例を図 5.8-11 示す. 破線は標準振動の場合の振動確率のプロットで, 青線が $\varepsilon_{ee} = 0$ の場合のものである. それ以外は $\varepsilon_{ee} = +1.0$ (緑線), $+0.5$ (赤線), -0.5 (紫線), -1.0 (水線) の場合の振動確率のプロットである.

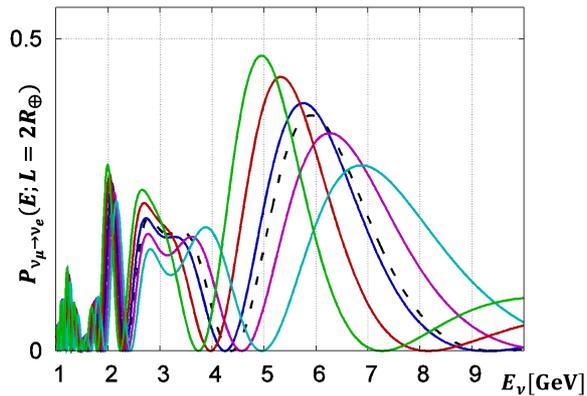


図 5.8: $\tan \beta = |\varepsilon_{e\tau}| = 0.01$ の場合の振動確率 $P_{\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_{\oplus})$ の振る舞い.

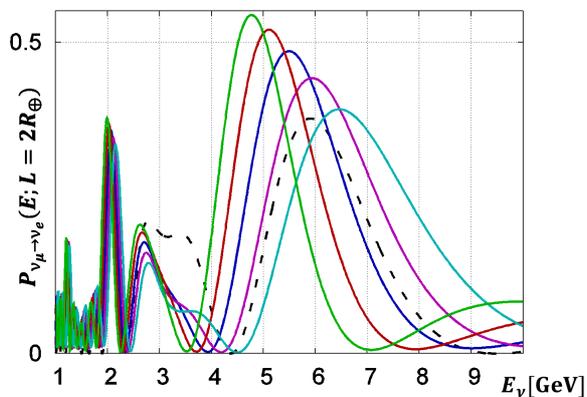


図 5.9: $\tan \beta = |\varepsilon_{e\tau}| = 0.1$ の場合の振動確率 $P_{\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_{\oplus})$ の振る舞い. 徐々に A 以外の成分 B, C の振動が大きくなる.

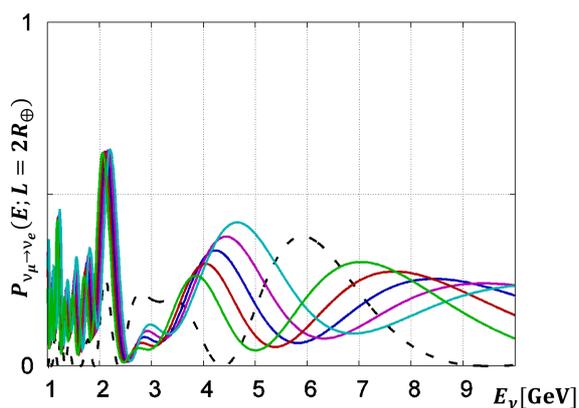


図 5.10: $\tan \beta = |\varepsilon_{e\tau}| = 0.3$ の場合の振動確率 $P_{\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_{\oplus})$ の振る舞い. NSI パラメータがある程度大きくなると, A 以外の振動の成分 B, C も寄与ようになる. このとき標準振動の場合とは異なる振る舞いをみせる.

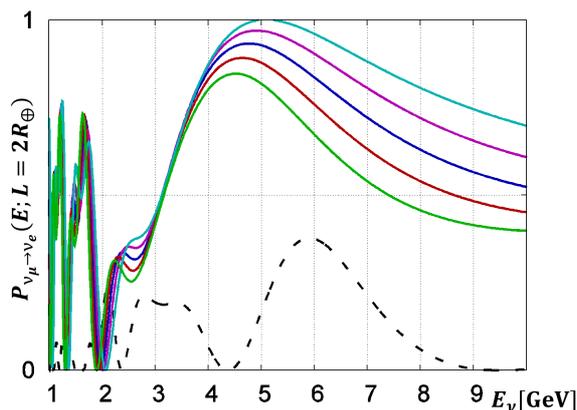


図 5.11: $\tan \beta = |\varepsilon_{e\tau}| = 0.7$ の場合の振動確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e, NSI}^{mcm}(E, L = 2R_\oplus)$ の振る舞い. NSI パラメータが制限一杯に与えられているとき, A の振動は比較的弱まり, 標準振動の場合のものと大きく異なる振る舞いを示す.

非標準的相互作用による物質効果もコアとマントルの2つの層でそれぞれにはたらいいて、振動確率の増幅現象も同様に生じている。標準振動においては密度の不定性を与えた場合の振る舞いについて、非標準的振動の場合には NSI パラメータの変化による振る舞いを調べた。NSI パラメータが小さい場合には A の成分の振動が支配的であり標準振動のものと類似したエネルギースペクトルを得る。またその場合の非標準的振動確率の振る舞いは、標準振動に密度の不定性を与えた場合の振る舞いにも類似していることが図 5.3 と図 5.8,9 などからわかる。密度の不定性と NSI パラメータの変化というまったく異なる自由度を与えたにもかかわらず、振動確率の振る舞いが似通っているということから、両者に相関があるだろうことが予想できる。現在 NSI に対してはあまり強くない制限がかけられているが、このような密度の不定性などの効果が含まれている可能性がある。

第 6 章

まとめと今後の課題

従来の大気ニュートリノ振動の解析では、密度の不定性について議論されていなかったため、本研究では地球をコアとマンツルの 2 層に分けた場合の標準的/非標準的な振動確率を解析的に調べた。とくに、密度の不定性を標準振動の場合に与えて、その振る舞いを確かめた。また、NSI を導入した振動確率の従来の解析的表式では地球密度一定とされていたが、マンツルとコアの 2 層に分けたときの振る舞いを調べたところ、NSI パラメータが十分小さい領域ではその効果が標準振動における密度の不定性を与えたものと同様の振る舞いをすることが定性的にわかった。

今後はこのような振動確率の振る舞いを定量的に評価して、NSI の効果と密度の不定性の効果の縮退現象について調べていきたい。そのためには、今回は $L = 2R_{\oplus}$ のみの場合を解析したが、ほかの基線長での振る舞いがあるかを調べ、NSI の効果と密度の不定性の縮退現象を議論する。また実際の大気ニュートリノ実験では、e-like なニュートリノのフラックスがもともとあるので、そのフラックスと合計されても本研究で予想されるようなシグナルが見えるかどうかを調べる。数 GeV 領域のニュートリノフラックスは $\nu_e : \nu_{\mu} = 1 : 5$ であることから、そのようなシグナルはある程度見えるのではないかと予想している。

謝辞

本論文の執筆において、指導教官の安田修 教授に尊敬と感謝の念を絶やすことはできません。行動の遅がちな私を忍耐強く待ち、時には叱咤して急がせて下さいました。どんな相談にも的確に助言を与えて下さったことは研究の励みになりました。また場の理論の基礎と群論についてそれぞれ指導して下さった北澤敬章 助教と原子核ハドロン物理研究室の慈道大介 准教授に感謝申し上げます。同じ研究室のメンバーとして、先輩として、自主ゼミやご飯に誘ったり何気ない会話にもつき合ってく下さった小原怜さん、深澤信也さん、酒井裕企さん、同期の芝田健仁君、青木健児君、清水慎一郎君に感謝の意を表します。ニュートリノの勉強会を手伝ってくれた後輩の大場雅男君、増川京佑君、松坂勇志君に感謝しています。最後に陰に陽に私の息災を案じ心の支えとなってくれている、友人と家族によるこびと謝意を示します。

付録 A

標準的な混合の場合のコアマントル ニュートリノ振動確率の導出

ここでは地球内部密度分布をコア-マントルの二層に分割した場合の、標準的混合におけるニュートリノ振動確率の解析的表式を導出する。簡単のために基線長は地球の直径としている ($L = 2R_{\oplus}$) が、この仮定は今回の導出にはなんら影響しない。

図 5.1 にあるように、地球内部はコアとマントルとで大きな密度差をもつ 2 つの不連続的な層に分けることができる。媒質に急激な密度変化のあるニュートリノ振動では、MSW 効果として扱うことはできず物質効果の非断熱的寄与として [32] などにまとめられている。実は、今回のような階段関数型の密度変化の場合、非断熱的寄与を受けとるだけの十分な距離をニュートリノが伝播できずその効果を見捨てることができる。したがって図 A.1 のような地球内部密度分布としたとき、CMB 前後における媒質密度の不連続的变化による効果は、各層におけるニュートリノ振動をつなげることによって生じるものとすることができる。

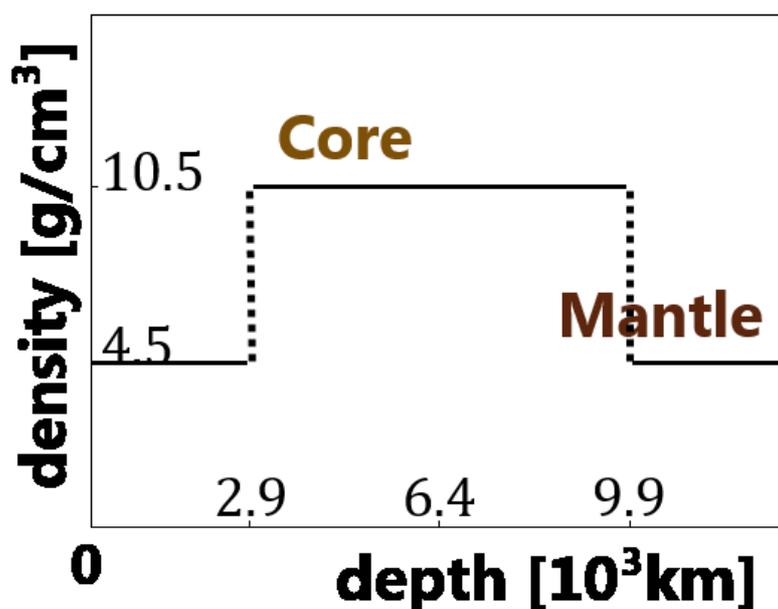


図 A.1: 地球の裏側から内部を通過してくるニュートリノはこの密度分布を伝播する。点線はコアとマントルの境界という意味で CMB という。

このとき各層では一定密度の媒質中ニュートリノ振動として扱うので、全体のニュートリノ振動の遷移行列は各層におけるニュートリノ振動の遷移行列の積である。なお、MNS 行列は標準表示として扱っている。

$$\mathcal{A}(E, L = 2R_{\oplus}) \equiv \mathcal{A}(E, L = D_m)\mathcal{A}(E, L = 2D_c)\mathcal{A}(E, L = D_m) \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{A}(E, L = D_m) = e^{i\theta_{23}\lambda_7} e^{i\tilde{\theta}_{13,m}\lambda_5} \exp \left[-i \frac{\Delta\tilde{m}_{31,m}^2 D_m}{2E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] e^{-i\tilde{\theta}_{13,m}\lambda_5} e^{-i\theta_{23}\lambda_7} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{A}(E, L = D_m) = e^{i\theta_{23}\lambda_7} e^{i\tilde{\theta}_{13,c}\lambda_5} \exp \left[-i \frac{\Delta\tilde{m}_{31,c}^2 D_c}{E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] e^{-i\tilde{\theta}_{13,c}\lambda_5} e^{-i\theta_{23}\lambda_7} \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta\tilde{m}_{31,c(m)}^2 = \Delta m_{31}^2 \sqrt{1 + a_{c(m)}^2 - 2a_{c(m)} \cos 2\theta_{13}} \quad (\text{A.4})$$

この遷移行列 $\mathcal{A}(E, L = R_{\oplus})$ の (1,2) 成分の絶対値の二乗が式 (5.5) を与える。

付録 B

NSI を考慮した場合の，コアマントルニュートリノ振動確率の導出

非標準的相互作用を考慮した場合，コアマントルニュートリノ振動確率の解析的表式を導出する．ここでは，前の付録と同様にして各層におけるニュートリノ振動の遷移行列の積を計算している．まず各層におけるニュートリノ振動で NSI がどのように扱われているかを説明する．

式 (5.1) の Hamiltonian はフレーバー固有状態における表示である．これを NSI 基底で書き表すと

$$H = \frac{1}{2E} \left\{ U^b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} U^{b\dagger} + a \begin{pmatrix} \Lambda'_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{B.1})$$

となっている．ここで U^b は NSI 基底と質量固有状態との基底変換をおこなう新しい混合行列となっている．前の付録の内容を踏襲すると，混合行列 U^b から混合パラメータが標準表示であるような行列を抽出する必要がある．

$$U^b = \text{diag}[1, 1, e^{-i\zeta^b}] U'' \text{diag}[e^{i \arg U_{e1}^b}, e^{i \arg U_{e2}^b}, 1] \quad [\zeta^b \equiv \arg U_{\tau 3}^b] \quad (\text{B.2})$$

こうして，非標準的混合における混合パラメータを導くことができる． $[c_{jk}^b = \cos \theta_{jk}^b, s_{jk}^b = \sin \theta_{jk}^b]$

$$U'' = \begin{pmatrix} c_{12}^b c_{23}^b & s_{12}^b c_{23}^b & s_{13}^b e^{-i\delta_{CP}^b} \\ -s_{12}^b c_{23}^b - c_{12}^b s_{23}^b s_{13}^b e^{i\delta_{CP}^b} & c_{12}^b c_{23}^b - c_{12}^b s_{23}^b s_{13}^b e^{i\delta_{CP}^b} & s_{23}^b c_{13}^b \\ s_{12}^b s_{23}^b - c_{12}^b c_{23}^b s_{13}^b e^{i\delta_{CP}^b} & -c_{12}^b s_{23}^b - s_{12}^b c_{23}^b s_{13}^b e^{i\delta_{CP}^b} & c_{23}^b s_{13}^b \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$= e^{i\theta_{23}^b \lambda_7} e^{i\delta_{CP}^b \lambda_9 / 2} e^{i\theta_{13}^b \lambda_5} e^{i\delta_{CP}^b \lambda_9 / 2} e^{i\theta_{12}^b \lambda_2}$$

$$\tan \theta_{12}^b \equiv \frac{U''_{e2}}{U''_{e1}} = \frac{|c_\beta e^{-i\gamma} U_{e2} + s_\beta e^{i\gamma} U_{\tau 2}|}{|c_\beta e^{-i\gamma} U_{e1} + s_\beta e^{i\gamma} U_{\tau 1}|} \quad (\text{B.4})$$

$$\tan \theta_{23}^b \equiv \frac{U''_{\mu 3}}{U''_{\tau 3}} = \frac{U_{\mu 3}}{|c_\beta e^{-i\gamma} U_{\tau 3} - s_\beta e^{i\gamma} U_{e3}|} \quad (\text{B.5})$$

$$\sin \theta_{13}^b = |U''_{e3}| = |c_\beta e^{-i\gamma} U_{e3} + s_\beta e^{i\gamma} U_{\tau 3}| \quad (\text{B.6})$$

$$\delta_{CP}^b \equiv -\arg U_{e3}^b = -\arg (c_\beta e^{-i\gamma} U_{e3} + s_\beta e^{i\gamma} U_{\tau 3}) \quad (\text{B.7})$$

この場合も各層では一定密度の媒質中ニュートリノ振動として扱えるので，全体のニュートリノ振動の遷移行列を各層におけるニュートリノ振動の背印に行列の積として記述することができる．ただし今回のニュートリノ振動は NSI 基底と質量固有状態との混合によるもので，始状態と終状態をフレーバー固有

状態に取り直すことが必要である。

$$\mathcal{A}^b(E, L = 2R_\oplus) \equiv B(\beta, \gamma) \mathcal{A}^b(E, L = D_m) \mathcal{A}^b(E, L = 2D_c) \mathcal{A}^b(E, L = D_m) B^\dagger(\beta, \gamma) \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{A}^b(E, L = D_m) = e^{i\theta_{23}^b \lambda_7} e^{i\tilde{\theta}_{13,m}^b \lambda_5} \exp \left[-i \frac{\Delta \tilde{m}_{31,m}^{b2} D_m}{2E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] e^{-i\tilde{\theta}_{13,m}^b \lambda_5} e^{-i\theta_{23}^b \lambda_7} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{A}^b(E, L = D_m) = e^{i\theta_{23}^b \lambda_7} e^{i\tilde{\theta}_{13,c}^b \lambda_5} \exp \left[-i \frac{\Delta \tilde{m}_{31,c}^{b2} D_c}{E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] e^{-i\tilde{\theta}_{13,c}^b \lambda_5} e^{-i\theta_{23}^b \lambda_7} \quad (\text{B.10})$$

$$\Delta \tilde{m}_{31,c(m)}^{b2} = \Delta m_{31}^2 \sqrt{1 + a_{c(m)}^2 (\Lambda'_e)^2 - 2a_{c(m)} \Lambda'_e \cos 2\theta_{13}} \quad (\text{B.11})$$

この遷移行列 $\mathcal{A}^b(E, L = R_\oplus)$ の (1,2) 成分の絶対値の二乗が式 (5.12-15) を与える。

参考文献

- [1] PDG Collaboration (K.A.Olive *et al.*) Chin. Phys., **C38**, 090001 (2014)
- [2] ATLAS Collaboration (G.Aad *et al.*) Phys. Lett., **B716**, 1 (2012),
CMS Collaboration (S.Chatrchyan *et al.*) Phys. Lett., **B716**, 30 (2012)
- [3] Super-K Collabollation (Y.Fukuda *et al.*) Phys. Rev. Lett., **81**, 1562 (1998)
- [4] Double Chooz Collaboration (Y.Abe *et al.*) Phys. Rev. Lett., **108**, 131801 (2011)
Daya Bay Collaboration (F.P.An *et al.*) Nucl. Instrum. Meth., **A685**, 78 (2012)
- [5] L.Wolfenstein. Phys. Rev., **D17**, 2369 (1978), Phys. Rev., **D20**, 2634 (1979)
- [6] S.P.Mikheyev, A.Yu.Sumirnov. Sov. J. Nucl. Phys., **42**, 913 (1985), Nuovo Cim, C **9**, 17 (1986),
Sov. Phys. JETP, **64**, 7 (1986)
- [7] S.J.Parke. Phys. Rev.Lett.,**57**, 1275 (1986)
- [8] C.Biggio, A.Blennow, E.Fernandez. JHEP, **0908** 090 (2009)
- [9] S.Weiberg. Phys. Rev. Lett., **19**, 1264 (1967),
S.L.Glashow. Nucl. Phys., **22**, 579 (1961),
A.Salam. Conf. Proc., **C680519**, 367 (1968)
- [10] P.Englet, R.Brout. Phys. Rev. Lett., **13**, 321 (1964),
P.W.Higgs. Phys. Rev. Lett., **13**, 508 (1964)
- [11] Y.Nambu, G.Jona-Lasinio. Phys. Rev., **122**, 345 (1961),
J..Goldstone. Nuovo Cim., **19**, 154 (1961),
J.Goldstone, A.Salam and S.Weinberg. Phys. Rev., **127**, 965 (1962)
- [12] M.Kobayashi, T.Maskawa. Prog. Theor. Phys., **49**, 652 (1973)
- [13] S.L.Glashow, J.Iliopoulos, and L.Maiiani. Phys. Rev., **D2**, 1285 (1970)
- [14] M.Gell-Mann, M.Levy. Nuovo Cim., **16**, 705 (1960),
N.Cabbibo. Phys. Rev. Lett., **10**, 531 (1963)
- [15] P.Minkowski. Phys.Lett., **B67**, 421 (1977),
T.Yanagida. Prog. Theor. Phys., **64**, 1103 (1980),
M.Gell-Mann, P.Ramond and R.Slansky. *in Supergravity* North Holland,Amsterdam (1979)
- [16] B.Pontecorvo. Sov. Phys. JETP, **7**, 172 (1958), Sov. Phys. JETP, **26**, 984(1968)
- [17] Z.Maki, M.Nakagawa, and S.Sakata. Prog. Theor. Phys., **28**, 870 (1962)
- [18] E.Majorana. Nuovo Cim., **14**, 171 (1937)
- [19] R.Davis.Jr. *et al.* Phys. Rev. Lett., **20**, 1205 (1968)
- [20] SNO Collabpration (Q.R.Ahmed *et al.*) Phys. Rev. Lett., **87**, 071301 (2001), Phys. Rev. Lett.,
89, 011301 (2002)

-
- [21] K.Kimura, A.Takamura, and H.Yokomakura. Phys. Lett., **B537**, 86 (2002), Phys. Rev., **D66**, 073005 (2002)
- [22] Z.Z.Xing, H.Zhang. Phys. Lett., **B618**, 131 (2005)
- [23] O.Yasuda. arXiv:0704.1531[hep-ph] (2007)
- [24] H.A.Bethe. Phys. Rev. Lett., **56**, 1305 (1986)
- [25] Kamiokande Collaboration (Y.Fukuda *et al.*) Phys. Lett., **B335**, 237 (1994)
- [26] Hyper-Kamiokande work group (K.Abe *et al.*) arXiv:1109.3262[hep-ex] (2011)
- [27] M.M.Guzzo, A.Masiero, S.T.Petcov. Phys.Lett., **B260**, 154 (1991),
E.Roulet. Phys.Rev., **D44**, 935 (1991)
- [28] A.Friedland, C.Lunardini. Phys. Rev., **D72**, 053009 (2005)
- [29] O.Yasuda, S.Fukasawa. Adv. High Energy Phys., **2015**, 820941 (2015)
- [30] A.M.Dziewonski, D.L.Anderson. Phys. Earth. Plan. Int., **25**, 297 (1981)
- [31] A.M.Dziewonski, A.L.Hales, and E.R.Lapwood. Phys. Earth. Plan. Int., **10**, 12 (1975),
F.D.Stacey. *Physics of the Earth* Willey (1977)
- [32] T.K.Kuo, J.Pantaleone. Rev. Mod. Phys., **61**, 937 (1989), Phys. Rev. ,**D39**, 1930 (1989)