超対称ゲージ理論の真空の構造について

東京都立大学理学研究科物理学専攻
根木利和

概要

Seiberg と Witten は 1994 年に、$\mathcal{N}=2$ 超対称性理論の SU(2) の Yang-Mills 理論について、低エネルギー有効理論を決定する、プレポテンシャルという量を、真空のパラメータの持つ性質を解析することにより決定した。

それは、今日の素粒子物理学の根幹を為す、ゲージ場の量子論の、非摂動的な効果に対する、本質的な理解を助ける理論として、非常に注目された。

本修士論文では、その理論の全体像を解説する。

目 次

第1章　導入

素粒子の間の相互作用は、ゲージ理論により記述される。ゲージ理論とは、素粒子の間の相互作用は、理論の内部対称性を記述する粒子であるゲージ粒子の交換により伝播すると考える理論である。ミクロな領域では量子論的効果が重要になり、粒子は場として記述され、それを記述する理論は、ゲージ場の量子論として体系化されている。このゲージ理論において、対称性は、群論の言葉で記述されている。このうち、対称性の群の生成子が非可換な理論は、非可換ゲージ理論と呼ばれている。実際に、自然界に存在するクォークは、$SU(3)$ の非可換ゲージ理論である QCD (quantum chromodynamics) によってよく記述されている。QCD においてもそうであるように、繰り込み論の解析によれば、非可換ゲージ理論は、低エネルギーで粒子の間の結合が強い、強結合の理論になることが知られている。一般に、強結合の理論において摂動論の手法は有効ではなく、非摂動論的効果を取り扱う必要がある。

対称性による制限などで高エネルギーで単純な構造をした理論が、低エネルギーで強結合になる場合を考える。この理論が正当化されるためには、理論から得られる低エネルギー有効理論が正しく自然を記述していることが必要である。だが、低エネルギー有効理論の決定には、非摂動論的効果の考慮が必要になるのである。現代の素粒子物理学において、このような非摂動論的効果の理解が重要であると考えられている問題は多い。例えば、先程述べた QCD の場合には、低エネルギーでクォークは閉じ込められており、単独で現れず、メソンや、ハドロンのような粒子のみが現われる。これは、クォークが低エネルギーにおいて強結合になり、結合状態としてしか現れることが出来ないためだと考えられているからである。だが、そのような結合状態を記述するには、QCD の低エネルギー有効理論の記述がなされなければならない。つまり、クォークが閉じ込められることを本質的に理解するためには、QCD の非摂動論効果の解析手法の定式化が必要なのであると考えられているのである。その理解は、現代素粒子論の大きな課題の一つである。

また、強結合での非摂動論的効果は、理論の真空の構造の決定の困難にするという問題も生む。場の理論における真空とは、理論において考えている有効ポテンシャルの最も低い領域である。低エネルギー有効理論の構造の決定が困難であるということは、この真空の構造の決定が困難であるという問題に深く結びついている。場の理論は、真

空を基本に考えられているため、これは理論自身の抱える大きな問題になるのである。しかし、超対称性のような強い対称性によって制限されないような理論に対する、非摂動論的効果の解析的手法の定式化は現在においても達成されていない。1994 年、サイバーグとウィッテンは、$N = 2$ の超対称ゲージ理論について、非摂動論的効果まで全ての量子効果を含めた低エネルギー有効理論が決定した。非摂動論的効果が重要になるような理論の中では、$N = 2$ の超対称ゲージ理論は非摂動論的効果まで全ての量子効果を含めた低エネルギー有効理論が決定されている唯一の理論である。本修士論文では、その解析に基づいて $\mathcal{N} = 2$ 超対称性理論の SU(2) の Yang-Mills 理論を議論する。

第2章　ゲージ理論の復習と低エネルギー有効作用

この章では、超対称性のないときのゲージ理論に関する復習と、実際、超対称ゲージ理論の解析で求める、低エネルギー有効作用について述べる。

2.1　超対称性のないゲージ理論の復習

まず、ゲージ理論そのものの重要性について述べる。そのために、場の理論そのものを簡単におさらいする。

第一に、場の理論とは、相対論的かつ、量子論的な粒子を記述する理論である。ここで、場は、特殊相対論的な対称性と、量子論的な正準交換関係を満たしていなければならない。特殊相対論的な対称性とは、時空における一種の回転対称性のローレンツ (Lorentz) 対称性と、時空における並進についての対称性である。このローレンツ対称性と並進につての対称性を合わせて、ポアンカレ (Poincare) 対称性と呼ぶ。場は、これらの表現である。

さらに、理論には、ポアンカレ対称性の他に、内部対称性を導入することができる。これは、ある時空点上の場が持つ、位相変換である。この位相変換のパラメータは、時空に依存するようなものを考える。この位相パラメータが、時空に依存しない定数であると考えることは、全宇宙で、無限の過去や未来まで、同じ位相パラメータでの回転をすることになる。それは不自然であると考え、替わりに、位相パラメータが、時空に依存するような、局所的な内部対称性を考えるのである。このように、場が、ポアンカレ対称性以外に持つべき内部対称性は、『位相パラメータが、時空に依存しない大局的対称性ではなく、時空に依存した局所的対称性であるべきである』と考えるのが、ゲージ原理の立場である。また、この局所的内部対称性を、ゲージ対称性と呼ぶ。

場は、ポアンカレ対称性の表現であり、ゲージ対称性のユニタリ表現であると考える。このように構築される場の理論は、ゲージ（場の）理論と呼ばれる。ゲージ理論において、ベクトル場である、ゲージ場の導入を実際に実行してみる。それには、時空の平行移動を考えればよい。時空について、平行移動を行ったとき、内部対称性の軸も、時空の座標とともに変化する。だが、時空の平行移動を行ったとき、時空そのものの対

称性のほかに、この内部対称性も反映し続けなければならない。場 φ_j が、局所対称性の群により、

$$\varphi'_i(x) = U_i^j(x)\varphi_j(x) = [\exp(ig\theta^a(x)T_a)]_i^j\varphi_j(x) \tag{2.1}$$

と変換されるとき、この場を、時空の上で、平行移動することを考える。ここで、T^a は、局所対称性変換の生成子、θ^a は、その変換パラメータ、g は、charge である。

そのとき、時空の内部対称性の軸は、各時空点で勝手に導入することになる。そこで、この場の時空上での平行移動を、以下のように定義する。

$$\varphi_i(x+dx) = \varphi_i + ig(A_\mu)_i{}^j\ \varphi_j(x)dx^\mu \tag{2.2}$$

この時空の平行移動の際に行列 $A_\mu = (A_\mu)_i^j$ として導入されるベクトル場をゲージ場と呼び、このような局所対称性をゲージ対称性と呼ばれ、群論により記述される。ゲージ場 A_μ は、ゲージ対称性の生成子 T^a 上に、A 持つものとして、その線形結合で与えることができる。また、この生成子が、互いに交換しないものがある理論を非可換ゲージ理論と呼ぶ。ゲージ対称性の群を G としたとき、それは、

$$(A_\mu)_i^j(x) = \sum_{a=1}^{\dim\ G} A_\mu^a(x)(T_a)_i^j \tag{2.3}$$

ここで場 φ に対する、時空の微分 $\partial_\mu\phi$ は、ゲージ変換で共変な量ではない。そこで、場 φ について、ゲージ変換について以下のように微分を定義する。

$$D_\mu\varphi = (\partial - igA_\mu)\varphi \tag{2.4}$$

この $D_\mu\phi$ を共変微分 (covariant derivative) と呼ぶ。ここで、$-igA_\mu\varphi$ の項に着目したとき、この項は、場 A_μ と、場 φ が、結合定数 g によって、結合していると見ることが出来る。このような結合をゲージ結合 (gauge coupling) という。

時空の平行移動を先ほどのように定義したとき、この $D_\mu\varphi$ は、ゲージ変換の下で、

$$D_\mu\varphi \to U(x)D_\mu\varphi(x) \tag{2.5}$$

という、共変的に変換する量になる。

一方、$(D_\mu\varphi)^\dagger$ という量は、ゲージ変換の下で、

$$(D_\mu\varphi)^\dagger \to (D_\mu\varphi)^\dagger U^{-1} \tag{2.6}$$

と変換する。従って、$(D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi$ は、

$$(D^\mu\varphi)^\dagger D_\mu\varphi \to (D^\mu\varphi)^\dagger(U^{-1}U)D_\mu\varphi = (D^\mu\varphi)^\dagger D_\mu\varphi \tag{2.7}$$

となり、これは、ゲージ変換の下で不変 (ゲージ不変) な量である。このゲージ場に対する運動項は、以下のように定義される。

$$-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial A^a_\mu - \partial A^a_\nu + gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu)(\partial A^{a\mu} - \partial A^{a\nu} + gf_{ade}A^{d\mu}A^{e\nu}) \tag{2.8}$$

この項は

$$-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4}N^{-1}tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{2.9}$$

と書き改めることが出来る。但し、N は、生成子 T_a の規格化因子であり、$tr(T_aT_b) = N\delta_{ab}$ である。

ここに書いた $F_{\mu\nu}$ は、ゲージ群の生成子 T^a 上の成分 $F_{\mu\nu}$ の成分を $F^a_{\mu\nu}$ として、線形結合を取って表した量であり、

$$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T^a \tag{2.10}$$

この $F_{\mu\nu}$ は、ゲージ変換の下で、

$$F_{\mu\nu} \to U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x) \tag{2.11}$$

と変換される。よって、

$$tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \to tr[(UF_{\mu\nu}U^{-1})(UF^{\mu\nu}U^-1)] = tr[U^{-1}UF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] = tr[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] \tag{2.12}$$

である。ここで、トレースの循環性の性質を用いた。ゆえに、$-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$ はゲージ不変となり、ゲージ場の運動項は、ゲージ不変である。よって、ゲージ場と場 φ を含むゲージ不変な Lagrangian として、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi - m^2(\varphi^\dagger\varphi) + \mathcal{L}_{int}(\varphi) \tag{2.13}$$

ここで、先に示した量のほかに、ゲージ不変な量として、場 φ の質量項と、なんらかのゲージ不変な相互作用のラグランジアン $\mathcal{L}_{int}(\varphi)$ も考えることが出来るため、それも付け加えた。但し、ゲージ対称性が保たれているとき、ゲージ場には、質量項を入れることが出来ない。種々のゲージ対称性のゲージ場と、それに結合した色々な場が存在するような理論がゲージ理論である。

現代の素粒子物理学は、ゲージ理論に立脚している。特に、ゲージ場の運動項のみが存在している理論を、Yang-Mills 理論と呼ぶ。現在、素粒子として素粒子標準模型で考えられている粒子のうち、Higgs 粒子とゲージ粒子を除く粒子はフェルミオンであると考えられている。このクォークを記述するのが、QCD (Quantum chromodynamics) である。これは、実際のクォークと、ゲージ場が結合した理論を指し、スピノール場と

してのクォークとゲージ場が結合した理論である。このとき、QCD は、$SU(3)$ の非可換ゲージ理論になる。

だが、ゲージ対称性が、非可換群による対称性のとき、一般にこの理論の低エネルギーでの振る舞いを解析的に扱うことは、非常に困難である。

以下で扱う理論は、理論にさらに超対称性と呼ばれる対称性を課し、その下での低エネルギー理論の解析についての議論である。実際、現在の我々が到達しているエネルギーでは、超対称性は、存在しない。だが、高エネルギーでは、存在する可能性が期待されている対称性でもある。

2.2 『低エネルギー有効作用』とその『決定』とは

理論の経路積分を完全に実行して得られた作用を Wilson の有効作用（ Wilsonian effective action ）と呼ぶ。一般の経路積分によって、分配関数は

$$Z = \int [d\Psi] e^{iS(\Psi)} \tag{2.14}$$

で得られる。[　] で示した積分測度は、汎関数積分の測度である。一般にこの経路積分を、運動量全体で実行するのは、著しく困難であり、多くの場合は、解析的には不可能である。よって、一定のカットオフスケール Λ_0 を与えて、この経路積分を実行することを考える。

$$Z' = \int_{p \leq \Lambda_0} [d\Psi] e^{iS(\Psi)} \tag{2.15}$$

このとき、Z' が有限なものとして得られるとする。

これに対して、Wilsonian effective action S_{eff} とは、カットオフ $\Lambda \ll \Lambda_0$ を持ち、Λ_0 までの経路積分が、同じ相関関数を与えるもののことを意味している。すなわち、

$$Z' = \int_{p \leq \Lambda_0} [d\Psi] e^{iS_{eff}(\Psi;\Lambda)} \tag{2.16}$$

特に、この Λ と、Λ_0 のカットオフパラメータを、無限大にしていく極限を取り、経路積分を、完全に実行したものと、同じ物を得たというような状況を考える。以下で Wilsonian effective action とは、そのようなものを意味しているとする。

低エネルギーの理論は、Wilsonian effective action により、記述される。Wilsonian effective action の Lagrangian には、低エネルギーで現れる場のみが現れる。経路積分を実行する対象である、高エネルギーの理論を記述する Lagrangian に現れている場は、Wilsonian effective action の中には必ずしも現れず、元の Lagrangian の場の結合状態の形で現れることが多い。Wilsonian effective action に現れる場の結合の仕方は、そこ

に存在する場の可能な結合の仕方を全て含んでいるものになる。
（Wilsonian effective action においては、繰り込み可能性すら、無視した、あらゆる結合の仕方が尽くされていてよい。）結合の仕方と、結合定数の大きさなど、低エネルギーの理論の情報は、有効作用において尽くされている。さらに、この Wilsonian effective action から、運動項の高次項を落としたものを、低エネルギー有効作用 (Law energy effective action - LEEA と略す。) と呼ぶ。$\mathcal{N}=2$ で、以降、扱う理論は、この低エネルギー有効作用である。(Wilsonian "low energy" effective theory)

つまり、今から我々が決定するものは、元の Lagrangian から、経路積分を行って得た Wilsonian effecive theory のうち、その低エネルギー極限をとったものである。だが、この解析においては、実際には、経路積分は行わない。対称性の要求など、理論に課せられた性質を上手く使ってその形を決定している。実際に、$\mathcal{N}=2$ の Wilsonian effective theory の Lagrangian の形自体は、対称性の要求により、Seiberg [8] によって係数を除いて決定されていた。

Seiberg-Witten [2] のした仕事は、$\mathcal{N}=2$ の非可換ゲージ理論において、この係数を、実際に経路積分を行うことなく、幾何学的な手法を用いることで、完全に決定したことである。第三章において、詳しく言及するが、この『係数の決定』という問題は、非常に多くの物理的意味が含まれている。

2.3 背景と動機

これまで、非可換ゲージ理論が解かれた例は他になかった。

超対称性がないゲージ理論は、今でも解く具体的な手法がみつかっておらず、クォークの閉じ込めにも結びついた、現在の素粒子論における、非常に大きな問題である。この主たる理由の一つには、非可換ゲージ理論において、低エネルギー領域において、以下の理由により、摂動論が有効でなくなってしまうことがある。繰り込み群方程式の結合定数の繰り込みを見れば、エネルギーが高い領域では、結合が弱く、エネルギーが低い領域では、結合が強くなっていることが分かる。このような理論は、系のエネルギーが上がれば上がるほど、漸近的自由 (assymptotic free) な理論と呼ばれる。

このような漸近的自由な理論において、低エネルギーの領域では、結合定数が大きくなってしまう。これは、摂動論では、そもそも結合が弱いことを仮定しており、その仮定自体に問題が現れてしまうことを示している。

このことを言い換えると、低エネルギーの理論を扱う理論である有効作用の決定には、非摂動論的効果を考慮しなければならないということを意味している。だが、非摂動論的効果は、対称性によって強く制限された理論を除いて、現在でも、その解析手法は、確立していない。

これから扱う $\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論は、2 つの超電荷 (supercharge - 超対称性の Noether charge のこと) によって、一般のゲージ理論以上に、対称性により強く制限された理論である。この理論以上に対称性の制限が緩い理論では、非可換ゲージ理論が解かれた例は他にはないのである。また、この解析の目覚ましい点は、非摂動論的効果を計算できたという事実のみに留まらない。

$\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論においては、非摂動論的効果は、 instanton と呼ばれる、ゲージ場の解によって与えられることが知られていた。[8] その効果をフルに考慮に入れる具体的な計算手法は、当時は確立されていなかった。これは、[9] の解析により、具体的な計算手法は、今日では確立されているが、この論文で、以下に扱う手法より、煩瑣である。[1] しかし、[2] では、この計算を具体的に行うことなく、間接的な方法により、$\mathcal{N}=2$ の非可換ゲージ理論を具体的に解く方法を与えた。以下では、それを詳しく扱っていく。

[1] [9] の論文の当時には、その計算を具体的に与える式の予想は与えられたが、証明は、与えられなかった。証明は、[10] 及び、[11] により、それぞれ独立に与えられている。

第3章　$\mathcal{N}=2$ 超対称 Yang-Mills 理論

3.1　ラグランジアン

$\mathcal{N}=2$ の超対称 Yang-Mills (Super Yang-Mills。SYM と略す。) 理論の Lagrangian は、全て adjoint 表現に属した場を用いて、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F^{a}_{\mu\nu} - i\bar{\lambda}^{a}{}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\mathcal{D}_{\mu}\lambda^{a}{}_{\alpha} + \frac{1}{2}D^{a}D^{a} \\
& - \frac{\theta}{32\pi}F^{a\mu\nu}\widetilde{F}^{a}_{\mu\nu} \\
& - (\mathcal{D}_{\mu}\phi^{a})^{\dagger}\mathcal{D}^{\mu}\phi^{a} - i\bar{\psi}^{a}{}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\mathcal{D}_{\mu}\psi^{a}{}_{\alpha} + f^{a\dagger}f^{a} \\
& - \sqrt{2}gf_{abc}\phi^{a}\bar{\lambda}^{b}{}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{c\dot{\alpha}} + \sqrt{2}gf_{abc}\phi^{\dagger a}\psi^{b\alpha}\lambda^{c}{}_{\alpha} \\
& + igf_{abc}D^{a}\phi^{b}\phi^{\dagger c}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

ここで、g は、ゲージ群の結合定数, f_{abc} は ゲージ群の構造定数 (structure constant)、$F^{a}_{\mu\nu}$ はゲージ場の場の強さのテンソル (field strength)、ϕ^{a} は 複素スカラー (complex scalar) 場、$(\psi^{a}\ \lambda^{a})$ は Weyl スピノール (spinor) である。$D,\ f$ は 補助場と呼ばれる場で、運動項が存在しない場である。$a,\ b,\ c$ は ゲージ群の添え字であり、$\mu,\ \nu$ は、時空の Lorentz 添え字、$\alpha,\ \dot{\alpha}$ 等は、スピノールの添え字である。

各場はゲージ群の随伴表現として変換する。ϕ の covariant derivative は、$\mathcal{D}_{\mu}\phi^{a} = \partial_{\mu}\phi^{a} - ig(T_{A}{}^{b})^{a}{}_{c}A^{b}_{\mu}\phi^{c}$ で、スピノール場 $(\psi^{a}\ \lambda^{a})$ についても同様に定義される。ここで、(T_{A}) はゲージ群の生成子の随伴表現の表現行列であり、添え字 A は、随伴表現 (adjoint representation) の頭文字である。これは群の構造定数で書くことが出来て、

$$
(T_{A}{}^{b})_{a}{}^{c} = if_{abc} \tag{3.2}
$$

である。ゲージ場の field strength は、

$$
F^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial A^{a} + gf^{abc}A^{\mu}A^{\nu} \tag{3.3}
$$

である。$\widetilde{F}^{a}_{\mu\nu}$ は、

$$
\widetilde{F}^{a\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^{a}_{\rho\sigma} \tag{3.4}
$$

で定義されるもので、『ゲージ場に自己双対な場』と呼ばれる場である。[1]

ここで、この Lagrangian に入っている field は、(A_μ^a ψ^a λ^a ϕ^a) である。これらは、全て adjoint 表現に属しており、A_μ に $\mathcal{N}=2$ の 超対称変換を施すことで得ることができる。よって、ここには、ゲージ場と、その超対称変換で得られる場しか含まれておらず、その意味で、これは、(Pure) SYM の系を記述している。ここで、Yang-Mills 場とは、先に述べた非可換ゲージ場であり、adjoint 表現に属する場であることを述べた。今、考えている Lagrangian に存在する場は、Yang-Mills 場と、その超対称変換で得られる場である。故に、adjoint 表現に属している。実際の物質に対応する場はゲージ群の基本表現 (fundamental representation) に属するが、そのような場は今考えている理論には、存在しない。この意味で、これを区別して、"Pure" Yang-Mills という言い方をすることもある。

また、時空の計量は、$\eta_{\mu\nu}=diag(-+++)$ を用いていることに注意。

超対称変換で、field がどのように変換されるかを見ようとしたとき、その形は、補助場が存在していた方が見やすい。だが、基本的には、Euler-Lagrange 方程式によって、Lagrangian を補助場を消去した形に整理することができる。補助場 (D , f) に関する Euler-Lagrange 方程式は、

$$f=f^\dagger=0\ ,\ D=-igf_{abc}\phi^b\phi^{\dagger c} \tag{3.6}$$

結局、実際の解析で考える場は、この式を代入して、補助場を消去した後に残る場 (ϕ^a ψ^a λ^a A_μ^a) である。前述のように、これは、$\mathcal{N}=2$ の超対称性で結びついた場である。このように、超対称変換の変換群で結びついているこれらの場を、「multiplet(多重項) に入っている」という言い方をする。ベクトル場 A_μ から、超対称変換で得られるこの多重項を、ベクトル多重項 (vector multiplet) と呼ぶ。$\mathcal{N}=2$ Super Yang-Mills 理論の vector multiplet を図示すると、図 3.1 のようになる。ψ と ϕ、及び、A_μ と λ は、同じ supercharge : Q^1 による超対称変換で互いに移りあう。$\mathcal{N}=2$ 超対称理論に存在するもう一つの supercharge : Q^2 により、A_μ と ψ、及び、λ と ϕ が互いに移りあう。

基本表現に入った、物質場を扱おうとしたときは、基本表現に入った場の多重項 ($\mathcal{N}=2$ hypermultiplet) が必要である。この論文で考える場は、専ら、ベクトル多重項に入っている場である。

Seiberg と Witten は、一般の 非可換ゲージ群 (Non-abelian gauge group) について、Pure Yang-Mills の低エネルギー有効作用を完全に解いた。その解析では、最も簡単な

[1]時空をユークリッド化したとき、

$$\widetilde{F}_{mn}=\frac{1}{2}\epsilon_{mnpq}F_{pq} \tag{3.5}$$

は、ゲージ場の自己双対方程式と呼ばれ、この解がインスタントン (解) と呼ばれる。今、時空はミンコフスキー空間で考えているが、この項は、ユークリッド化したときのインスタントンに関連しているという事実は重要である。(ユークリッド化した時空の足は、通常のローマ字で書いた。)

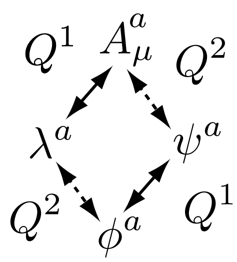

図 3.1: $\mathcal{N}$=2 vector multiplet

Non-Abelian gauge theory である、$SU(2)$ の理論を考えている。ゲージ群の拡張については、後に拡張した論文が幾つかあるが、ここでは、[2] の論文に則って、以下、ゲージ群を $SU(2)$ として考えていく。

3.2 系の対称性 ―ゲージ群が SU(2) の場合―

まず、扱う系の持つ対称性について考える。

古典的な対称性としては、$\mathcal{N}=2$ SUSY があり、それに特有な対称性として、$U(1)_R$ と、$SU(2)_R$ そして、ゲージ対称性がある。$U(1)_R$ と、$SU(2)_R$ の 二つの R-symmetry と呼ばれる対称性について見ていく。これらは、変換パラメータが時空に依存しない大局的対称性 (global symmetry) である。この変換を具体的に書くと、$U(1)_R$ 変換は、

$$\begin{aligned} \phi^a &\to e^{i2\alpha}\phi^a \\ \lambda^a &\to e^{i\alpha}\lambda^a \\ \psi^a &\to e^{i\alpha}\psi^a \end{aligned} \tag{3.7}$$

となる。スカラー場 ϕ は、スピノール場 ψ λ に比べて、2 倍の大きさの $U(1)_R$ charge を持っており、回る位相の大きさも 2 倍になる。

一方、$SU(2)_R$ 変換は、

$$\begin{aligned} &\phi^a \to \phi^a \\ &\begin{pmatrix} \psi^a \\ \lambda^a \end{pmatrix} \to e^{i\frac{\tau_i}{2}\theta^i} \begin{pmatrix} \psi^a \\ \lambda^a \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.8}$$

ここで、$(i=1,2,3)$ で、τ_i は、Pauli の Spin 行列。これは、スピノール ψ^a と λ^a とを混ぜる対称性であるが、同時に超電荷 (supercharge - 超対称変換に対する Noether charge のこと。) Q_1 と Q_2 とを混ぜる、対称性にもなっている。

全体として、系の大域的対称性は、$SU(2)_R \times U(1)_R$ であるが、このうち、$U(1)_R$ は anomalous である。$U(1_R)$ 対称性は、anomaly によって、$Z_{4N_c-2N_f}$ に破れる。N_f は、

基本表現の物質場 (fundamental matter) の数である。この値がフレーバー (flavor) と呼ばれる。N_f の f はその頭文字から来る添え字である。一方、N_c は、color の数。すなわち、ゲージ対称性 $SU(N_c)$ であれば、その N_c のことを示す。今、$SU(2)$ を考えるため、$N_c=2$ である。また、Pure Yang-Mills を考えるために、fundamental matter は存在しない。よって、$N_f=0$ である。結局、対称性は、$SU(2)_R\times Z_8$ に破れる。だが、$SU(2)_R$ 変換と、Z_8 変換には重なっている部分がある。まず、Z_8 対称性は、

$$\begin{cases}\phi\rightarrow e^{i\frac{2\pi}{4}\alpha}\phi\\ \lambda\rightarrow e^{i\frac{2\pi}{8}\alpha}\lambda\\ \psi\rightarrow e^{i\frac{2\pi}{8}\alpha}\psi\end{cases}\tag{3.9}$$

となる。ここで、ϕ の $U(1)_R$ charge は、ψ と λ の charge の 2 倍であったことに注意。このとき、Z_8 による、ψ の変換性を考える。
(λ も元の $U(1)_R$ charge が等しかったので、同じ変換になる。)

α	0	1	2	3	4	5	6	7
ψ	ψ	$e^{i\frac{\pi}{4}}\psi$	$i\psi$	$e^{i\frac{3}{4}\pi}\psi$	$-\psi$	$e^{i\frac{5\pi}{4}}\psi$	$-i\psi$	$e^{i\frac{7\pi}{4}}\psi$

このうち、$\alpha=4$ のとき、

$$\begin{cases}\phi\rightarrow\phi\\ \psi\rightarrow-\psi\\ \lambda\rightarrow-\lambda\end{cases}\tag{3.10}$$

である。だが、これは、$SU(2)_R$ の中の、$\theta^1=\theta^2=0,\quad\theta^3=2\pi$ の部分と同じである。従って、この重なっている Z_2 部分で割って、大域的対称性として系が持つ対称性は、全体として、$SU(2)_R\times Z_8/Z_2$ と $\mathcal{N}=2$ の超対称性になる。

このときのゲージ対称性 $SU(2)$ の自発的破れを考える。この理論では以下、『ゲージ対称性の自発的破れは起こるが、$\mathcal{N}=2$ の超対称性は破れない。』という仮定を置く。式 (3.1) の $\mathcal{N}=2$ SYM のラグランジアンにおいて、系の真空を規定するために効くポテンシャルは、

$$V(\phi)=g^2tr\big([\phi\ ,\ \phi^\dagger]^2\big)\tag{3.11}$$

の部分である。

ここで、構造定数について、$if_{abc}=2\,tr\big(T^a\big[T^b,T^c\big]\big)$ の関係式と、場について、$\phi^aT^a\equiv\phi$ 等の関係式を用いて、構造定数を交換関係に置き換えていることに注意。

これを 0 にするためには、$\phi=0$ である必要はなく、交換関係が 0 でありさえすればよい。の式における、任意のパラメータ a によって記述この交換関係を 0 にするためには、カルタン部分代数を用いればよい。カルタン部分代数とは、群の代数のうち、最大

可換な部分代数のことである。今、ポテンシャルの値をゼロに保ったまま、ϕ^a のカルタン部分代数の方向に真空期待値を持たせることが出来る。このとき、$SU(2)$ のゲージ対称性は、$U(1)$ へと破れる。一般に、$SU(2)$ のカルタン部分代数は、Pauli-Matrix の 第 3 方向、すなわち、$\frac{\tau^3}{2}$ である。$SU(2)$ の代数は、それぞれに可換であるが、それらは、同時対角化可能ではない。よって、量子力学の角運動量の議論と同様、普通、第 3 方向のみを特別視し、$\frac{\tau^3}{2}$ を $SU(2)$ のカルタン部分代数と呼ぶ。ここで、三次元の一般の意味での Pauli-Matrix は、τ で、四次元の時空の足を持つ (4-)Pauli-Matrix は、σ で表している。

従って、ϕ の真空期待値は、

$$\langle\phi\rangle = a\frac{\tau^3}{2} \tag{3.12}$$

とすれば、これは、

$$V(\phi) = 0 \tag{3.13}$$

を与えることになる。ここで、ϕ が、複素の関数であったため、$a \in \boldsymbol{C}$ である。この a が、$a \neq 0$ の値を取るときには、常に $SU(2)$ は、$U(1)$ に破れる。$a = 0$ のときは、ゲージ群に自発的対称性の破れは起こらず、ゲージ群は、$SU(2)$ のままであり続ける。この点では、massless のゲージ粒子が他の点より多く現れることになる。次項で低エネルギー有効作用を考えるが、それは、ゲージ群が $U(1)$ に破れた後に massless であり続けるゲージ粒子とその超対称変換で得られる場のみが存在する作用となる。massless のゲージ粒子がさらに現れるこの点は、古典論の段階に存在する、理論の特異点となる。

ここで、いかなる a の値についても、式 (3.11) のポテンシャルが 0 になることに注意。すなわち、真空が一意に定まらず、複素数 a について、等価に真空が与えられることになってしまう。場の量子論は、真空を決定することで、真空に生成消滅演算子を作用させて議論する理論である。よって、この理論において、真空が一意に定まらないということは問題になる。もっとも、古典論において、真空が一意に定まらずとも、量子論において、量子効果によってポテンシャルの立ち上がりがあり、真空が一意に定まる可能性はある。摂動論的効果、非摂動論的効果両方を加えて考えたとき、真空は一意に定まり、その上で正しい場の理論が構成出来るのではないか？と期待して、以下の解析を進めていくわけである。

また、今、系の真空は、

$$\langle\phi\rangle = a\frac{\tau^3}{2} \tag{3.14}$$

されることは述べた。但し、これは、ゲージ不変ではない。実際、系のゲージ対称性 $SU(2)$ のうち、$i\tau^2$ の変換を考える。（これは、SU(2) の Weyl group と呼ばれる。）

ここで、ϕ が adjoint 表現に属する場であったことに注意すると、ϕ はユニタリ行列と、その逆行列で変換される。この変換の元で、

$$\begin{aligned}\langle\phi\rangle \to (i\tau^2)\langle\phi\rangle(i\tau^2)^{-1} &= (i\tau^2)\langle\phi\rangle(-i\tau^2)\\ &= \frac{a}{2}\tau^2\tau^3\tau^2\\ &= -\frac{a}{2}\tau^3\\ &= -\langle\phi\rangle\end{aligned} \tag{3.15}$$

つまり、その真空期待値の $\langle\phi\rangle$ もゲージ変換の下で不変でいられないということである。よって、ゲージ不変なパラメーターとして、a ではなく、$u = tr\phi^2$ を用いる。

では、古典的な対称性の話に戻る。a が、$a \neq 0$ の値を取るときには、ゲージ群が $SU(2)$ から $U(1)$ に破れることは述べた。このとき、離散対称性 Z_8 も ϕ の真空期待値 a により、自発的に破れる。

Z_8 による ϕ の変換性は

$$\phi \to e^{i\frac{2\pi}{4}\alpha}\phi, \qquad (N = 0, 1, 2\cdots 8) \tag{3.16}$$

である。よって、

α	0	1	2	3	4	5	6	7
ϕ	ϕ	$i\phi$	$-\phi$	$-i\phi$	ϕ	$i\phi$	$-\phi$	$-i\phi$

ϕ が不変に保たれているのは、

$$\alpha = 0,\ 4 \tag{3.17}$$

のみ。従って、Z_8 のうちの Z_2 部分だけである。よって、直観的には、ϕ に真空期待値を持たせることにより、Z_8 は Z_2 に破れるように見える。

しかし、破れるゲージ対称性の $SU(2)$ の中には、やはり Weyl 対称性が存在する。Weyl 対称性の $\phi \to -\phi$ の部分は、$\langle\phi\rangle$ の値を負に変えてしまう部分なので、単独では、やはり、自発的に破れる部分である。だが、この部分と Z_8 の中の

$$\alpha = 2,\ 6 \tag{3.18}$$

の部分の効果が打ち消しあって、

$$\phi \to \phi \tag{3.19}$$

となり、$< \phi >$ は不変に保たれ続ける。つまり、『Z_8 の中の $(\alpha = 0,\ 4)$ の部分』と、『$(\alpha = 2,\ 6) +$ (ゲージ群の Weyl 対称性) の部分』が残る。よって、Z_8 は、Z_2 でなく、Z_4 に破れる。$SU(2)_R$ は、スカラー場を変換させないため、$SU(2)_R$ には、自発的対称

性の破れは起きない。従って、自発的対称性の破れが起こった後に、理論に存在する大域的対称性は、

$$SU(2)_R \times \frac{Z_4}{Z_2} \tag{3.20}$$

及び、$\mathcal{N}=2$ の超対称性だということになる。

このうち、実際に、真空を記述するパラメータ a に作用するものは、対称性 Z_4 である。さらに、ϕ^2 は、a に比べて、元の $U(1)$ 変換の charge は 2 倍であるため、パラメータ u に作用する対称性は、$u \leftrightarrow -u$ の Z_2 になる。

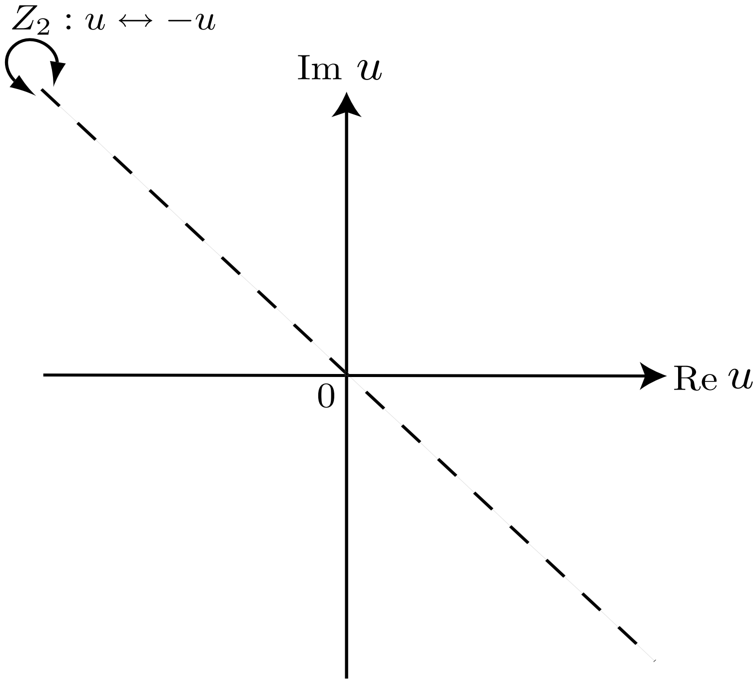

図 3.2: u-平面上の Z_2 対称性。

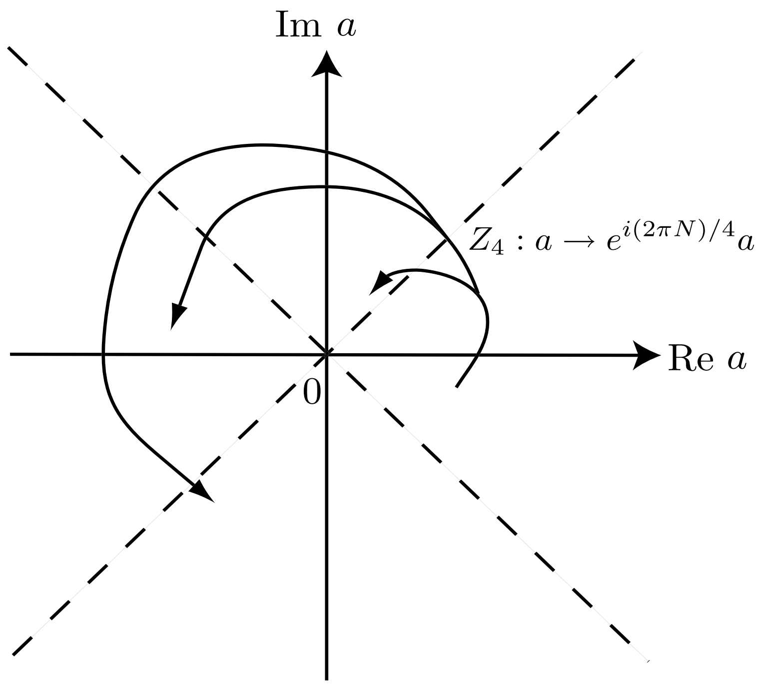

図 3.3: a-平面上の Z_4 対称性。点線で囲まれた複素平面上の $\frac{1}{4}$ の領域が、Z_4 対称性により移りあう。

3.3　低エネルギー有効理論と one-loop の量子効果

Seinberg は [8] において、Wilsonian 低エネルギー有効 Lagrangian を、

$$\frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\left[\int d^4\theta \frac{\partial\mathcal{F}(A)}{\partial A}\bar{A} + \int d^2\theta \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{F}(A)}{\partial A^2}W^\alpha W_\alpha\right] \tag{3.21}$$

の形で与えていた。今、W は

$$W_\alpha(y,\ \theta) = -i\lambda_\alpha(y) + [\delta_\alpha^\beta D - \frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha^\beta F_{\mu\nu}(y)]\theta_\beta + \theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \tag{3.22}$$

であり、$U(1)$ の場の強さのテンソルを含む超場 (field strength superfield) である。ここで、A は、

$$A(y,\theta) = \phi(y) + \theta\psi(y) + \theta\theta f(y) \tag{3.23}$$

であり、$\mathcal{N}=2$ vector multiplet の中の $\mathcal{N}=1$ chiral multiplet 部分である。superfield とは、多重項を、グラスマンな座標の上の成分として、展開した表式のことである。y は通常の時空と、グラスマンな座標 θ 及び、$\bar{\theta}$ と、

$$y^\mu = x^\mu + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \tag{3.24}$$

という形で結びついている。この作用の中には、$SU(2)$ から $U(1)$ に破れた後に massless であり続けるゲージ場と、その超対称変換で得られる場のみが含まれている。これらの場は、$\mathcal{N}=2$ の $U(1)$ の vector multiplet を構成する場である。それは図 3.4 で与えられる。

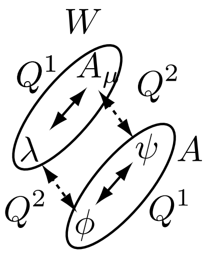

図 3.4: $\mathcal{N}$=2 U(1) vector multiplet

また、$\mathcal{F}(A)$ は、A のみに依存し、$\bar{A}$ には依存しない。プレポテンシャルと呼ばれる量である。このプレポテンシャルの構造を決定すれば、$\mathcal{N}=2$ の Wilsoninan 低エネルギー有効作用は、完全に決定できる。だが、それには、以下のような問題があった。非可換ゲージ理論は、漸近的自由な理論であり、低エネルギー領域では、理論は強結合になる。そして、摂動論は、有効でなくなってしまう。つまり、プレポテンシャルの構

造の決定には、非摂動論的効果まで含めた議論が必要になってくるのである。また、真空は、理論の最もエネルギーが低い領域である。従って、これは、真空の構造の決定が困難になるという問題にも結びついている。

実際にプレポテンシャルについて議論する。プレポテンシャルは、古典的な効果 $\mathcal{F}_0\mathcal{A}$ 摂動論的な効果 $\mathcal{F}_{one\ loop}$ 非摂動論 (non-perturbative) 的な効果 $\mathcal{F}_{non-pert}$ の和で

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{A}) + \mathcal{F}_{one\ loop}(\mathcal{A}) + \mathcal{F}_{non-pert}(\mathcal{A}) \tag{3.25}$$

のように表される。ここで、$\mathcal{N}=2$ vector multiplet 全体を、$\mathcal{A}$ で表している。このうち、[8] によって、非摂動論的な効果 $\mathcal{F}_{non-pert}$ は、全てインスタントン (instanton) と呼ばれる場の古典解の効果によるものであることが知られていた。よって、以下では、$\mathcal{F}_{non-pert}$ ではなく、$\mathcal{F}_{instanton}$ と表すことにする。

まず、古典論的な $\mathcal{F}_0$ は、元のラグランジアンと比較して、

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\tau_{cl}A^2 \tag{3.26}$$

と求めることが出来る。ここで、$\tau_{cl} = \frac{\theta}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2}$ である。

次に摂動論の効果を考える。$\mathcal{N}=2$ 超対称理論の低エネルギー有効作用は、摂動論の効果は 1-loop の効果のみに留まることが知られている。よって、摂動論的効果としては、1-loop までのみを考える。このとき、$\mathcal{F}_{one\ loop}$ は、1-loop の量子効果を考えた有効結合定数 g_{eff} を用いて

$$\mathcal{F}_{one\ loop}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}(i\frac{4\pi}{g_{eff}^2})\mathcal{A}^2 \tag{3.27}$$

で与えられる。有効結合定数 g_{eff} は、

$$\frac{g_{eff}^2}{4\pi} = \alpha \tag{3.28}$$

と置いたとき、繰り込み群方程式

$$\mu\frac{d\alpha}{d\mu} = \frac{1}{2\pi}b\alpha^2 \tag{3.29}$$

から求めることが出来る。ここに b は、繰り込み群方程式の $\beta-$ 関数である。$SU(N_c)$ のゲージ理論について、1-loop の $\beta-$ 関数を実際に計算すると、

$$b = -\frac{11}{3}C_2(\mathrm{adj}) + \sum_r \frac{n_r^F}{2}\frac{4}{3}C_2(r) + \sum_r n_r^B\frac{1}{3}C_2(r) \tag{3.30}$$

を用いればよいことが解る。ここで、

$$\begin{aligned} n_r^F &\quad : (\text{理論に存在する fermion の数}) \\ n_r^B &\quad : (\text{理論に存在する scalar boson の数}) \end{aligned} \tag{3.31}$$

である。C_2 は、2 次のカシミアと呼ばれる量である。adj は adjoint 表現を示している。式 (3.30) の第一項は、ゲージ粒子による量子補正からくる項なのだが、ゲージ粒子は常に adjoint 表現に属する場で書かれるためである。式 (3.30) における r は表現 (representation) を示している。$\sum_r$ は、それぞれの representation に属する粒子について、それぞれその数の和を取ることを示している。また、対応する fermion や scalar boson が、 adjoint 表現に属するときには $C_2(r)$ として $C_2(\mathrm{adj})$ を用い、基本表現に属するときには $C_2(F)$ を用いる。F は fundamental representation の頭文字である。実際、それらは、$SU(N_c)$ については、

$$
\begin{aligned}
C_2(\mathrm{adj}) &= N_c \\
C_2(F) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

となる。また、 は、ゲージ群が $U(1)$ のときには、

$$
\begin{aligned}
C_2(\mathrm{adj}) &= 0 \\
C_2(F) &= 1
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

を用いれば、$U(1)$ の時にも正しい β-関数を与える式である。以下の解析でも、これを用いる。今、実際に、これを用いて $\mathcal{N}=2$ の $SU(2)$ の超対称 Yang-Mills 理論について α を求めると、$\mathcal{N}=2$ vector multiplet では、一種類のゲージ粒子と、adjoint 表現に属する fermion が 2 種類、scalar boson が 1 種類存在し、

$$
b = -\frac{11}{3} \times 2 + \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = -4 \tag{3.34}
$$

これを代入して、

$$
\frac{g_{eff}^2(\mathcal{A})}{4\pi} = \frac{1}{\frac{4}{2\pi}\ln\frac{\mathcal{A}}{\Lambda}} \tag{3.35}
$$

と求めることが出来る。ここで、$\mathcal{A}$ の中の場 ϕ の真空期待値と、理論のスケール μ が直接結び付く量であることを用いている。よって、

$$
\mathcal{F}_{one\ loop}(\mathcal{A}) = i\frac{\mathcal{A}^2}{2\pi}\ln\frac{\mathcal{A}^2}{\Lambda^2} \tag{3.36}
$$

である。

$\alpha(\mu)$ のグラフは、図 3.5 のようになる。これは、理論のエネルギースケールに応じて、有効結合定数が変化していく様子を表したグラフである。$SU(2)$ が $U(1)$ に破れる前には、結合定数は、高エネルギーで小さくなり、低エネルギーで大きくなる。この性質は、非可換ゲージ理論において、物質場が少ないような理論において現れる性質で

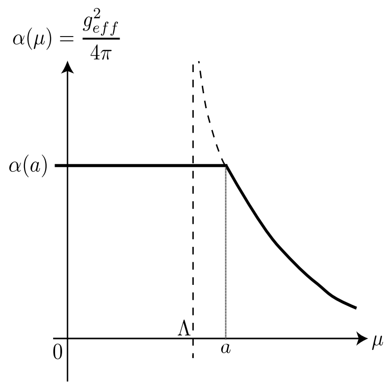

図 3.5: 1-loop の繰り込み群方程式による結合定数の変化

あり、漸近的自由性と呼ばれる性質である。理論が $SU(2)$ から $U(1)$ に破れた後、すなわち、エネルギーが ϕ の真空期待値 a より低い領域では、β-関数が 0 になり、有効結合定数の変化は止まる。だが、$SU(2)$ の 1-loop の摂動について計算をしたとき、結合定数が発散するエネルギースケールとして、Λ というエネルギースケールも存在している。$a \gg \lambda$ であれば、理論の有効結合定数が小さな領域で、$SU(2) \to U(1)$ の自発的対称性の破れが起こるわけであり、理論は全体で弱結合になる。このときは、理論全体を摂動論で記述できるため、問題は起こらない。だが、a が Λ に近づくにしたがって、理論に強結合の領域が現れるようになってしまう。摂動論は、弱結合を仮定していたため、$a \approx \Lambda$ では、摂動論に問題が生じてくる。そして、$a \leq \Lambda$ では、有効結合定数が完全に発散してしまい、理論がナンセンスになる。結局、a がある程度小さくなってしまうと、摂動論はとたんに有効でなくなり、理論全体を記述するためには、摂動論的な効果に加えて、非摂動論的な効果を入れざるを得なくなるわけである。このとき、摂動論に乗っ取って、理論の真空の構造を考えることが出来なくなる。このことについては、次項でも少し詳しく述べる。

プレポテンシャル $\mathcal{F}$ の中の非摂動論的効果は、インスタントンの効果によって与えられることが知られており、対称性から、その形を、

$$\mathcal{F}_{instanton}(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k \left(\frac{\Lambda}{\mathcal{A}}\right)^{4k} \mathcal{A}^2 \tag{3.37}$$

の形まで求められていた。

k はインスタントン数と呼ばれる量で、インスタントン解を特徴付ける整数値であるが、これを、1 から ∞ まで全て足し上げる必要があり、実際にそれを足し上げて計算する手法は、当時は確立していなかった。Seiberg と Witten は [2] において、このインスタントンに関する計算を実際に行うことなく、幾何学的な手法により、プレポテン

シャル $\mathcal{F}$ を求めた。

3.4 モデュライ空間の構造

ここでモデュライ空間という概念を導入するとともに、古典的なレベルでのその構造と、摂動論的なレベルでのその構造をまとめておく。

古典論において、真空を考えたとき、場 ϕ に 任意の真空期待値 a について、系のポテンシャルは、0 になった。つまり、真空が連続的に縮退しているわけである。この真空を記述する a のなす空間をモデュライ空間と呼ぶ。

古典的なレベルでのモデュライ空間の構造について考える。u または、 a のレベルにおいて、どのような点が特異点であるかを見る。古典的には、理論には、スケールは存在しない。唯一、特異点となるのは、$u = a = 0$ の点である。この点では、自発的対称性の破れが起こらずに、ゲージ対称性は、$SU(2)$ であり続ける。すなわち、古典的なレベルのモデュライ空間は、図 3.6 のようになる。

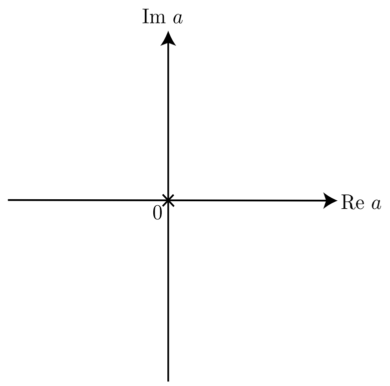

図 3.6: 古典的なレベルのモデュライ空間。$a = 0$ で特異点。

次に、1-loop での摂動論の範囲で、$a \leq \Lambda$ の領域で、理論がナンセンスになった。よって、1-loop までの摂動論を考慮に入れたモデュライ空間は、図 3.7 のようになる。これは、言い方を変えれば、a の値が小さい領域、すなわち、強結合領域に対して、上手く理論を取り扱えないということを意味している。

次に a の作る空間について考えてみたい。今、系の低エネルギー有効作用の中で、スカラー場の真空期待値が直接入っている部分を見てみよう。低エネルギー有効作用は、(式 3.21) で 与えられていた。系の低エネルギー有効作用の中に

$$K = \mathrm{Im}\left(\frac{\partial \mathcal{F}(A)}{\partial A}\bar{A}\right) \tag{3.38}$$

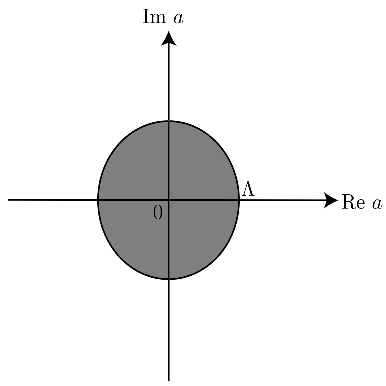

図 3.7: 1-loop までの摂動論を考慮に入れたモデュライ空間。$|a| \leq \Lambda$ でナンセンス。

という項があった。これは、ラグランジアンの Kähler ポテンシャルと呼ばれる項である。今、A は、

$$A(y,\ \theta) = \phi + \theta\psi + \theta\theta f \tag{3.39}$$

である。このスカラー場の真空期待値 a とその複素共役 $\bar{a}$ が張る 2 次元複素多様体に対応する部分を Kähler ポテンシャルから抜き出す。この Kähler ポテンシャルから、その多様体の線素は、

$$(ds)^2 = \mathrm{Im}\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}(a)}{\partial a^2}\ da\ d\bar{a} \tag{3.40}$$

となる。ここで、τ として、

$$\tau(a) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2} \tag{3.41}$$

とすると、$\tau(a)$ は、holomorphic(ホロモルフィック) な関数である。これを用いて、線素は、

$$\mathrm{Im}\ \tau(a)\ da\ d\bar{a} \tag{3.42}$$

となる。複素関数において、正則関数の、実数部分、虚数部分は、それぞれ、調和関数である。調和関数の性質として、「ある閉区間で定義された調和関数は、その区間において、　最大値も最小値も持つことが出来ない」という、最大最小値の原理と呼ばれる性質がある。Im $\tau(a)$ が a の全域で定義されているようなとき、最小値を取ることが出来ず、これは、$a = 0$ で、$-\infty$ に発散してしまう。

計量が負となるということ自体、真空の空間を定義することに問題をきたす。計量は正定値 (positive definite) でなければならないので、a が空間全体で定義されていてはいけないことになる。

また、1-loop レベルでの量子論的な真空の理解においても、QCD scale に近付くに従って、結合定数は発散していた。その内部では、もはや、strong coupling となり、

1-loop の描像自体がよく成り立ってはいなかったのである。

つまり、a は複素平面上全体でよいパラメータとして用いることが出来ないことになる。詳しくは、後述するが、理論全体で、正しく振舞うメトリックを扱うために、a というパラメータを、理論全体でよいパラメータとして扱えないという問題がある。そのために新たなパラメータとして、a_D というパラメータを導入する。物理的には、強結合領域の理論の記述が a ではできないという問題の解決のためにもその領域を良く記述するパラメータとして、a_D というパラメータの導入が必要なのである。

第4章　非摂動論的効果

4.1　Duality

Low energy effective Lagrangian は特別な Kähler 構造を持つことを見た。（すなわち、多様体の計量が、調和関数の二回微分となり、）この metric について深く考察していきたい。classical な真空としては、図 3.6 の構造をしており、1-loop レベルの摂動論では、図 3.7 であった。理論の真空は、Kähler 構造を持つ metric により、モデュライ空間の計量の構造として、

$$(ds)^2 = \mathrm{Im}\ \tau(a)\ da d\bar{a} \tag{4.1}$$

の形で、複素パラメータ a を用いて、記述されている。ここで、$\tau(a)$ は、式 (3.41) で与えられていた関数で、

$$\tau = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2} \tag{4.2}$$

であり、$\bar{a}$ に依存せず、 a のみに依存する、ホロモルフィック (holomorphic) な関数であった。今、新たなパラメータを用いて、真空の構造を記述することを考えたい。式 (3.36) の 1-loop のプレポテンシャルを代入すると、$\tau(a)$ としては、

$$\tau(a) \approx \frac{i}{\pi}(\ln(\frac{a^2}{\Lambda^2}) + 3) \tag{4.3}$$

であった。

a を他の局所パラメーターに書き換えることが出来ないだろうか、ということを考える。まず、$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}$ なる、パラメータ a_D を導入する。線素は、これを用いて、以下の形に書き換えることが出来る。

$$(ds)^2 = \mathrm{Im} da_D d\bar{a} = -\frac{i}{2}(da_D d\bar{a} - da d\bar{a_D}) \tag{4.4}$$

a と a_D は、u の関数としてみることが出来る。現に、古典論的には、

$$u = \frac{1}{2}a^2 \tag{4.5}$$

であった。このとき、線素は、

$$(ds)^2 = \mathrm{Im}\frac{da_D}{du}\frac{d\bar{a}}{d\bar{u}}\ du\ d\bar{u} = -\frac{i}{2}(\frac{da_D}{du} - \frac{da}{du}\frac{d\bar{a}_D}{d\bar{u}})dud\bar{u} \tag{4.6}$$

となる。さらに、

$$a^\alpha = (a_D,\ a), \quad \alpha = 1, 2 \tag{4.7}$$

とすると、結局、線素は、

$$(ds)^2 = -\frac{i}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{da^\alpha}{du}\frac{d\bar{a}^\beta}{d\bar{u}}dud\bar{u} \tag{4.8}$$

である。これに対して、2×2 行列 U によって

$$\left\{ \begin{array}{l} a^\alpha \to U^\alpha{}_\beta a^\beta \\ \bar{a}^\alpha \to U^{\dagger\alpha}{}_\beta \bar{a}^\beta \end{array} \right. \tag{4.9}$$

という変換をする。線素を不変に保つような対称性変換として許される U を考えると、

$$U \in SL(2, R) \tag{4.10}$$

でなければならないことがわかる。つまり、$SL(2, R)$ 変換によって移りあうパラメータのみが、理論の真空の構造を変えずに、パラメータであるということになる。

これを式を用いて陽に書くことを考える。今、ベクトル v を

$$v = \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

という列ベクトルであるとする。行列 M を $SL(2, R)$ に属する 2×2 行列であるとする。今、系の真空を記述する空間の構造を変化させないようなパラメータを結びつける変換として許容される変換は、

$$v \to Mv + c \tag{4.12}$$

だということになる。c は定ベクトルであり、2 行 1 列の列ベクトルである。

後に $\mathcal{N} = 2$ の (Pure) SYM の理論においては、M の属する群は、$SL(2, R)$ ではなく、$SL(2, Z)$ にならなければならないことを見る。さらに定ベクトルの c も 0 ベクトルしか許されない。

では、実際に $SL(2, R)$ の群の構造を見ていこう。代表元として以下の二つの行列を持ってくれば、1 に連結な任意の $SL(2, R)$ の要素は、その積から構成することが出来る。それらは、それぞれ

$$\begin{aligned} T_b &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ S &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.13}$$

である。このうち、b は、$b \in \mathbb{R}$ の定数である。

$$a^{\alpha} = (a_D, a)\ (\alpha = 1, 2) \tag{4.14}$$

を列ベクトルに組んで、これに T_b を作用させたとき、a_D と、a は、

$$\begin{aligned} a_D &\to a_D + ba \\ a &\to a \end{aligned} \tag{4.15}$$

という変換を受ける。$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}$ であったことと、式 (3.21) を思い出すと、これは、ゲージ場の運動項の前の係数、θ に対して、$\theta + 2\pi b$ だけのシフトを与えるような形になっている。理論の不変性により、この b は整数値しか許されない。このため、実際には b は整数でなければならない。従って、$b \in \mathbb{Z}$ のとき、T_b と S により生成される群は、$SL(2, R)$ ではなく、$SL(2, Z)$ になる。

結局、新たに導入できるパラメータ a_D は、先ほどの線素に対して、この $SL(2, Z)$ 変換で結びつく範囲でなければならない。

では、S がゲージ場の言葉で何を意味しているかということを見る。まず、簡単のために、ミンコフスキー空間で、$U(1)$ ゲージ場であるベクトル場と、スカラー場しかないようなときを考える。(スカラー QED の状況を考える。) まず、$F_{\mu\nu}$ に dual な field strength として、以下のような $\widetilde{F}$ を導入する。すなわち、

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{4.16}$$

この $\widetilde{F}$ は、

$$F^2_{\mu\nu} = -(\widetilde{F})^2_{\mu\nu} \tag{4.17}$$

を満たす。今、このゲージ場について、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{32\pi}\mathrm{Im}\int \tau(a)\cdot(F + i\widetilde{F})^2 = \frac{1}{16\pi}\mathcal{I}\Updownarrow\int \tau(a)\cdot(F^2 + i\widetilde{F}F) \\ &(\because \text{式 (4.17) より} \widetilde{F}^2 = -(F)^2) \end{aligned} \tag{4.18}$$

である。今、この式を F_D で書き換えたい。そのために、元の F や、$\widetilde{F}$ に依存している部分を、F と $\widetilde{F}$ に関する汎関数積分で integral out してしまうという方策をとる。だが、無論、この式をただ積分してしまってはいけない。F のゲージ場としての性質を無視して、単なる変数を積分するようなことになってしまうからである。つまり、上記の操作を実行するためには、この F がゲージ場であるということを考慮して、この式にラグランジェの乗数項として、拘束条件を加えた式の汎関数積分でなければならないの

である。今、この F が、$U(1)$ ゲージ場であるならば、ベクトルポテンシャル A を用いて、その構造は、微分形式の言葉で、$F = dA$ であり、$dF = 0$ である。ここで、F は、

$$F \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{4.19}$$

であり、

$$dF = \frac{1}{2} \partial_\rho F_{\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{4.20}$$

である。ここで、$dx^\rho,\ dx^\mu,\ dx^\nu$ は、それぞれ反可換する。従って、$dF = 0$ の式は、$\partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} = 0$ を与える。(これらの添え字が反可換することを示している。) 即ち、完全反対称テンソルを用いれば、$dF = 0$ の式は、

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \tag{4.21}$$

である。これに Lagrange 乗数となるベクトル $V_{D\mu}$ をかけてやれば、望みの Lagrange 乗数項は得られる。よって、加える項は、

$$\frac{1}{8\pi} \int V_{D\mu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \frac{1}{8\pi} \int \widetilde{F}_D F = \frac{1}{16\pi} \mathrm{Re} \int (\widetilde{F}_D - iF_D)(F + i\widetilde{F}) \tag{4.22}$$

である。ただし、ここで、$F_{D\mu\nu}$ は、$F_{D\mu\nu} = \partial_\mu V_{D\nu} - \partial_\nu V_{D\mu}$ であり、ベクトル場 V_D の field strength である。これを、式 (4.18) に加えて汎関数積分する。$(F + i\widetilde{F})$ に依存する部分を平方完成して、汎関数積分してしまえば、F_D および、$\widetilde{F_D}$ で、式 (4.18) を書き換えられたことになる。結局、式 (4.18) は、F_D の言葉で、

$$\frac{1}{32\pi} \mathrm{Im} \frac{-1}{\tau} (F_D + i\widetilde{F}_D)^2 = \frac{1}{16\pi} \mathrm{Im} \frac{-1}{\tau} (F_D^2 + i\widetilde{F}_D F_D) \tag{4.23}$$

となる。

今、超対称性のない状況で、$U(1)$ ゲージ場を、F_D の言葉で書き換えるという操作を行った。次に、これを、$\mathcal{N} = 1$ の超対称性があるときに同じことをすることを考える。つまり、ゲージ群が $U(1)$ のときの $\mathrm{N} = 1$ のゲージ場への拡張である。$\mathcal{N} = 1$ の超対称性が存在するとき、ゲージ場の field strength に対応するものは、vector super field の field strenth と呼ばれる量 W_α である。W は具体的には、ゲージ場の field strength $F_{\mu\nu}(y)$ と、ゲージ場に超対称変換をした場 $\lambda(y)$ と、補助場 $D(y)$ により

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + [\delta_\alpha^\beta D(y) - \frac{i}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma^\nu})_\alpha{}^\beta F_{\mu\nu}(y)]\theta_\beta + \theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}(y) \tag{4.24}$$

と書かれる量である。ただし、ここでは、簡単のために、$y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ と、θ で張られる、chiral coodinate と呼ばれる、superspace の表記法を用いている。これは、Lagrangian の中に、

$$\frac{1}{8\pi} \mathrm{Im} \int d^2\theta \tau(A) W^2 \tag{4.25}$$

という形で入る。A は $\mathcal{N}=1$ の chiral superfield である。このとき、$dF=0$ の式に対応する式は、$\mathcal{N}=1$ のときには、

$$\mathrm{Im}\ DW = 0 \tag{4.26}$$

となる。ここで、D は、supercovariant derivative と呼ばれる演算で、

$$D^{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} + 2i\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu}_{\beta\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}} \tag{4.27}$$

である。これらが、実際に $\mathrm{Im}\ DW=0$ を満たしていることを示すには、各々の成分に着目して、chiral coordinate (y,θ) を 通常の $(x,\ \theta,\ \bar{\theta})$ に直し、再び、$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\nu}F_{\rho\sigma}=0$ を課してやればよい。そのとき各成分についてあらわに計算すれば、$\mathrm{Im}\ DW=0$ の式は、超対称性がないときの式 $dF=0$ の自然な拡張となっていることを実際に示すことが出来る。従って、今度は、この項に Lagrange 未定乗数となる vector superfield V_D をかけた項を、Lagrange の未定乗数として加える。すなわち、それは、

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\int d^4xd^4\theta V_D DW &= -\frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\int d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}(DV_D)W \\ &= \frac{1}{16\pi}\mathrm{Im}\int d^4xd^2\theta\bar{D}\bar{D}DV_D \\ &= -\frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\int d^4xd^2\theta W_D W\end{aligned} \tag{4.28}$$

である。

ここで、$W_{D\alpha}$ について述べる。$\mathcal{N}=1$ の $U(1)$ ゲージ理論においては、vector superfield の field strength は、

$$W_{\alpha} = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_{\alpha}V \tag{4.29}$$

である。ただし、$\bar{D}$ は、先ほどの chiral coordinate を用いて、

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \tag{4.30}$$

である。$W_{D\alpha}$ は、これと同様に定義して、

$$W_{D\alpha} = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_{\alpha}V_D \tag{4.31}$$

である。また、W_DW とは、$W_D^{\alpha}W_{\alpha}$ を意味している。よって、

$$\frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\left[\int d^4xd^2\theta\frac{1}{2}\tau(A)WW - \int d^4xd^2\bar{\theta}W_DW\right] \tag{4.32}$$

の式において、W の汎関数積分を実行することを考えてやればよい。W に関するガウス積分を実行することで、結局、

$$\frac{1}{8\pi}\mathrm{Im}\int d^2\theta \frac{-1}{\tau(A)} W_D W_D \tag{4.33}$$

を得る。ここで着目すべきは、F で書き表されていたゲージ場の運動項に対応する項を F_D で書き直したときに、その係数、$\tau(A)$ が、$-\frac{1}{\tau(A)}$ に入れ替わっているという点である。また、元の電磁気の field strength に立ち返ってみれば分かるが、

$$F^{\mu\nu} \to \widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{4.34}$$

の変換は、電場と、磁場とを入れ替えるような変換であった。すなわち、今得た事実は、field strength を電場と磁場を入れ替えて書き直したときには、その結合定数が、逆符号になって、逆数になるということを示している。また、その事実は、超対称性を考慮にいれても成り立つということである。

さらに $\mathcal{N}=2$ の超対称性が存在するときには、ゲージ場の運動項は、スカラーの運動項と結びついていた。ここで、

$$\frac{\partial \mathcal{F}(A)}{\partial A} = h(A) \tag{4.35}$$

と書くと、低エネルギー有効作用の中のスカラー場の運動項が入っていた部分は、

$$\mathrm{Im}\int d^4\theta h(A)\bar{A} \tag{4.36}$$

と書ける。

$$A_D = h(A) \tag{4.37}$$

としたとき、

$$\mathrm{Im}\int d^4\theta\ h_D(A_D)\bar{A}_D \tag{4.38}$$

と書けば、これを元のものと等号で結んだとき、

$$\begin{aligned} h_D(h(A)) &= -A \\ h'(A) &= \tau(A) \end{aligned} \tag{4.39}$$

となり、D の添え字が付いた場による描像では、

$$-\frac{1}{\tau(A)} = -\frac{1}{h'(A)} = h'_D(A_D) = \tau_D(A_D) \tag{4.40}$$

つまり、

$$\tau_D(A_D) = -\frac{1}{\tau_D(A)} \tag{4.41}$$

とすればよいことが解る。これは、先ほどの行列、S により、a を a_D に入れ替える操作と対応している。

従って、ゲージ場において、電場と磁場を入れ替えた描像では、$\tau \to -\frac{1}{\tau_D}$ に係数を入れ替えることになり、スカラー場の運動項においても、同様の結合定数の変化をさせることは、S によって、a と、a_D の入れ替えを行っていることに対応しているのである。逆に S という行列による入れ替えは、ゲージ場について、上記のような入れ替えをすることになる。

ここで、結合定数をその逆数に対応付けていることが重要である。元の理論で強結合な領域は、この描像の読み替えをしたとき、弱結合な領域になる。つまり、摂動論が有効でなかった領域に摂動論が適用できるようになるのである。この描像の読み替えの変換を、双対性変換 (duality transformation) と言う。dual な描像で、非摂動論的効果が評価出来るようになるというわけである。

以下では、実際にこれらのパラメータ a と a_D を用いて、真空の構造の解析をしていく。

4.2 BPS 飽和状態

さて、a と a_D というパラメータについての導入を行った。この解は BPS 解と呼ばれる非摂動論的な励起に対応する場の理論の解に関係している。従って、この項では、BPS saturated states (BPS 飽和状態) について述べる。古典的な場の理論において、ある特殊な設定の元で、解析された解がある。一般に場の理論の解は、任意の運動量をとることが出来るわけであるが、この解には、下からのエネルギーの制限がつく。この解析は、Bogomolny [4] と、Prasad-Sommerfield [5] により、それぞれ独立に行われた。

Bogomolny の論文においては、実際に、BPS 解が満たすべき方程式の解を具体的に構成することなく、直接、飽和状態が満たすべき運動方程式を構成し、それにつく制限を解析した。また、Prasad-Sommerfield の論文においては、dyon 解を具体的に構成し、そのエネルギーにつく制限を求めている。

このうち、ゲージ対称性の自発的破れと結びついた、dyon 解、及び、monopole 解と呼ばれる、ゲージ場の解が存在する。monopole (磁気単極子) は、通常は存在しない。だが、$U(1)$ を含む $U(1)$ より、大きなゲージ群から、$U(1)$ へのゲージ対称性の自発的破れが起こるときには、t' Hooft-Polyakov monopole と呼ばれる解が現れるのである。また、この解は、dyon 解のうち、時間について、定常的な部分のみを考えた解でもある。

さらに、Witten-Olive [6] は、$\mathcal{N} \geq 2$ の超対称性理論においては、超対称性の代数に、中心拡大項が存在するときに、常に BPS 解が現れることを発見した。

以上の論文の帰結によれば、monopole 解、dyon 解について、自発的対称性の破れを引き起こす場の真空期待値を a とすると、charge Z(電荷 及び 磁荷) により決定されている。Z は、

$$Z = an_e + a_D n_m \tag{4.42}$$

で与えられる。BPS 方程式の解の質量の最小値は、BPS 飽和状態 (BPS saturated state) と呼ばれ、この charge Z により

$$M^2 = 2\left|Z\right|^2 \tag{4.43}$$

で与えられる。これは、古典的に与えられる方程式であり、量子補正を受けないことも、[6] により確かめられている。超対称性理論において、代数の中心拡大項として得られるということは、代数の関係式として書かれる表式であるということである。代数において成立する関係式は、量子論に移行しても変化することはない。従って、この式は成立し続けるのである。

実際、我々が扱っている理論は、$SU(2) \to U(1)$ の自発的破れのある、ゲージ理論であり、monopole, dyon 解が、現れる。現在、扱っている理論の場合には、古典的には、a_D を用いて、charge は

$$Z_{cl} = a(n_e + \tau_{cl}\ n_m) \tag{4.44}$$

と書ける。ここで、$\tau_{cl} = \frac{\theta}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2}$ である。n_e と n_m は、それぞれ、単位電荷を持った粒子と、単位磁荷を持った粒子の数である。よって、BPS 解に対して、

$$M^2 \geq 2\left|Z\right|^2 \tag{4.45}$$

ここで、古典的には、

$$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} \tag{4.46}$$

a_D を用いてこれを書けば

$$Z = a \cdot n_e + a_D \cdot n_m \tag{4.47}$$

である。量子論に移行したとき、τ_{cl} で書いた表式は成り立たなくなるが、a_D で書いた式は、量子論で a_D 自体も補正を受けるため、常に成立し続ける。a , a_D は、今まで現れた真空の構造を示すパラメータであり、n_e , n_m は、再び、存在する単位電荷を持った粒子と、単位磁荷を持った粒子の数である。

また、BPS 飽和状態についてコメントしておく。$\mathcal{N} = 2$ の理論の hypermultiplet について、massive 表現の自由度は、$2^{2N} = 2^{2\times 2} = 16$ であることが知られている。一方、massless 表現の自由度は、$\mathcal{N} = 2$ の理論の自由度は、$2^N = 2^2 = 4$ である。BPS 飽和状態は、massive な状態であるが、この自由度は、$\mathcal{N} = 2$ で、massless hypermultiplet の表現と同じ自由度になる。

第5章　低エネルギー有効作用の決定

5.1　モノドロミー

さて、以下では、モノドロミーという概念を導入する。
今、a と a_D を u の関数として与えた。

$$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} \tag{5.1}$$

であったことと、低エネルギー有効作用が、式 (3.21) で与えられていたことを思い出すと、この a と a_D を与えれば、低エネルギー有効作用が与えられることになる。

ここで、a と a_D が、u の関数であったことを思い出そう。実は、u 平面上の低エネルギー有効作用のモノドロミーを解析することで、a と a_D の構造を決定することが出来る。モノドロミーとは以下のようなものである。真空を規定する空間として、u-plane を想定し、その上に u の関数である、$(a(u)\ ,\ a_D(u))$ が定義されているとする。$u \to e^{i2\pi}u$ の変換は、物理を変えないはずであるが、a と a_D との間に変換を生じても構わない。なぜなら、a と a_D な物理量ではないからである。実際、u-plane におけるある特異点や、位相的な欠陥の周りを $u \to e^{i2\pi u}$ でまわるときに a と a_D とのあいだに変換がおきる。その変換を、行列 M を用いて、

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \to M \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

と表すことができる。この変換をモノドロミー変換といい、M をモノドロミー行列という。

このモノドロミー行列を全ての位相的欠陥や、決定することにより、楕円曲線の解析から複素関数 a と a_D の構造を決定することができる。

今、理論で扱う空間の構造を変えない対称性として、最大の対称性は、$SL(2,Z)$ である。ゆえに、モノドロミー変換は、 $SL(2,Z)$ の行列の部分群となるような変換行列によって書き表される。モノドロミー行列を M とし、$(a_D\ ,\ a)$ を列ベクトル v とする。この列ベクトルに対して、Kähler メトリックを不変にしたままで、許されるモノドロミー変換は、

$$v \to Mv + c \tag{5.3}$$

である。c は、二成分の列ベクトルで、定ベクトルである。
　ここで、BPS states の質量は、BPS states の charge

$$Z = n_e a + n_m a_D \tag{5.4}$$

で決まっていた。モノドロミー変換は、理論を不変に保つ対称性であって欲しいと要請するのであるから、Z をも不変に保つものであって欲しい。

物理的要請 モノドロミーは、理論を不変に保つため、メトリックだけでなく、質量を規定する charge をも不変に保つ。

$(n_e\ ,\ n_m)$ に実数の範囲で、どんな変換をしても、Z の中には $(a\ ,\ a_D)$ の一次の項として現れることになり、c を $(n_e\ ,\ n_m)$ の変換で打ち消すことができない。ただし、文献 [3] で解析しているように、基本表現に属している物質場が存在するとき、Z には新たな項を加えることができて、$c \neq 0$ であっても良い。

5.2 $\mathcal{N} = 2$ において、許される特異点

　まず、特異点の個数を考える。今、$u \to \infty$ のところでの a 及び a_D の漸近形は解っている。ここにはモノドロミーが現れる。つまり、$u \to \infty$ は、特異点とみなせ、その点の周りでモノドロミーが生じるわけである。
　ここで、$u \to \infty$ の周りを回るということは、その内部全てを一周することと等価である。無限大の周りでモノドロミーが生じるということは、内部にもなんらかの位相的欠陥や、モノドロミーがなければならないことを意味する。
　ここで、仮定として、

仮定 内部にある位相的欠陥は特異点であり、かつ、特異点の数は、必要な最小個であるとする。

とする。無限大も 1 個と数えたとき、特異点の数として、最小となるのは、2 個である。だが、u 平面上には、Z_2 対称性があった。それ故、それは原点でなければならない。だが、特異点の数が 1 個であるとする仮定には問題がある。特異点が原点のみであるとき、モノドロミーを示す曲線は原点まで縮むことが出来る。このとき、a も全体でよい座標となってしまう。すると、メトリックが負の値をとるような状況になってしまうのである。
　従って、特異点の数として最小個数を考えた場合、$u \neq 0$ に取ることになり、$u \leftrightarrow -u$ の Z_2 対称性が u 平面上にある以上、その個数は 3 個である。もちろん、考える特異点の

数を増やすことは、可能である。今までの議論により、その個数は、$1+2n(n \geq 1; n \ni \mathbb{Z})$であればよい。だが、3 個と仮定した解が、解として望ましい性質を持っており、様々なテストをパスする解になっている。従って、最小の個数である、3 個を仮定すればよいであろうと、現在では考えられている。以下では、特異点の数は 3 個であるとして解析していく。

また、特異点が何から生じるかということについて述べておく。元の低エネルギー有効作用が $U(1)$ の massless ゲージ粒子と、その超対称変換で得られる場からなる、vector superfield のみを含んでいたことを思い出す。ここにさらに massless のゲージ粒子が現われたり、何か非摂動論的励起が massless になるものとして現われるとき、低エネルギー有効作用は破綻する。たとえば、massless ゲージ粒子が余計に現われれば、低エネルギー有効作用を求めるための経路積分が発散することは容易に解る。また、massless の励起状態が存在すれば、それを交換する相互作用も存在するはずであり、低エネルギー有効作用はそれを含んでいなければならないことになるが、元の低エネルギー有効作用はそのような非摂動論的励起を含むものではなく、このときにも破綻する。実際には、結合定数や、有効作用を求めるときの経路積分の発散として、このような点で、有効作用が singular (特異的) になるのである。

さて、それぞれの特異点についてさらに少し述べる。まず、無限大に一点の特異点があることは述べた。さらに強結合領域に、2 点の 特異点があることを仮定することを述べた。そこでは、ゲージ粒子が massless になるのであろうか？たしかに、古典論での特異点は原点であり、$U(1)$ に破れないで、$SU(2)$ であり続ける点、すなわち、massless のゲージ粒子が、より多く出るような点で、特異点が生じていた。よって、量子論においても、第一には、ゲージ粒子が massless になることから、特異点が現われるのではないか、と考えたくなる。massless のゲージ粒子が強結合で現われるとき、低エネルギー領域に共形不変な固定点が存在することが必要である。この固定点では、理論はスケール不変になるが、原点以外の点では、$u = \langle tr(\phi^2) \rangle \neq 0$ というスケールを持ち込むことになり、スケール不変性は崩れる。今、原点以外のところに 2 点の特異点がある状況を仮定しているのだから、これは矛盾である。従って、特異点では別の粒子が massless にならなければならない。

ここで、非摂動論的な集合励起である BPS state が massless になることを仮定する。そして、そのうちの一点では、 monopole が massless になることを仮定するのである。これらの仮定は、この仮定をおいて求めた解が、解として持ちうるべき、諸性質を持つことで正当化されていると考えられる。実際、求めた解が、漸近的性質として、良い性質を持つことは簡単に確かめることは出来る。

5.3 モノドロミーの決定

無限遠でのモノドロミーを決定する。この領域は弱結合領域となり、無限遠での a_D は、

$$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} \approx \frac{2ia}{\pi} \ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right) + \frac{ia}{\pi} \tag{5.5}$$

である。さらに、a については、古典的な式

$$u \approx \frac{1}{2}a^2 \tag{5.6}$$

がよい近似でそのまま用いることが出来る。

$$u \to e^{2\pi i}u \tag{5.7}$$

とすると、

$$\ln a \to \ln a + i\pi \tag{5.8}$$

となる。従って、

$$a_D \to -a_D + 2aa \to -a \tag{5.9}$$

となり、無限遠の周りのモノドロミー行列は、

$$M_\infty = PT^{-2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

となる。このうち、P は、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

であり、元々古典的にもあるものである。古典的には、

$$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}_{\prime}(a)}{\partial a} = \tau_{cl}a \tag{5.12}$$

であった。ここで、再び

$$u \to e^{2\pi i}u \tag{5.13}$$

とすると、

$$\begin{cases} a \to -a \\ a_D \to -a_D \end{cases} \tag{5.14}$$

となる。よって、古典的なモノドロミーは P であったと見ることが出来る。そして、T は、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

これは、量子論において、初めて現われたモノドロミーである。この P と T により無限遠でのモノドロミー M_∞ が与えられた。

次に強結合の領域について考える。強結合領域において、第 1 点目の特異点では、massless の monopole が現われることを仮定した。monopole の質量は、

$$\sqrt{2}|n_m a_D| \tag{5.16}$$

である。よって、

$$a_D(u_0) = 0 \tag{5.17}$$

となる点 u_0 の周りでのモノドロミーを考えるというわけである。元々の理論では、この領域は、強結合になるため、摂動論で正しく扱うことが出来ない。ここで、dual の描像に移って、強結合の τ でなく、弱結合の τ_D を求めることで、a の漸近形を求めて、モノドロミーを求めるのである。

まず、この点の周りでは、モノポールが、magnetic photon と結合した、理論を考えることになる。これは、dual な描像で考えると、"electron" が ゲージ場に結合した、$\mathcal{N}=2$ の $U(1)$ ゲージ理論である。そのようなゲージ場による摂動論を考えるのである。"electron" とダブルクォーテーションマーク付きで書いたのは本当の意味での electron ではないからである。単位電荷を持ち、複素スカラー場 2 つ、スピノール場 2 つによって記述される、基本表現の $U(1)$ hypermultiplet が、$U(1)$ vectormultiplet に結合した形になる。

実際、式 (3.30) により、

$$b = 2 \tag{5.18}$$

よって、繰り込み群方程式により、

$$\tau_D \approx -\frac{i}{\pi}\ln a_D \tag{5.19}$$

と求まる。u_0 近傍で、a_D は、

$$a_D \approx c_0(u-u_0) \quad (\text{但し } c_0 \text{ は定数。}) \tag{5.20}$$

と書ける。

$$\tau_D = -\frac{da}{da_D} \tag{5.21}$$

であるから、a の漸近形が、

$$a(u) \approx a_0 + \frac{i}{\pi} a_D \ln a_D \approx a_0 + \frac{i}{\pi} c_0 (u - u_0) \ln(u - u_0) \quad (a_0 \text{ は、ある複素の定数。}) \tag{5.22}$$

と求めることが出来るわけである。この解析の結果によって、$u - u_0 \to e^{2\pi i}(u - u_0)$ としたときの a と a_D の漸近形の組み換えを見れば、この点の周りでのモノドロミー行列が求まる。それは、

$$\begin{aligned} a_D &\to a_D \\ a &\to a - 2a_D \end{aligned} \tag{5.23}$$

となり、モノドロミー行列は、

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

と求まる。ここで、M_1 と書いたのは、座標 u の規格化により、特異点 u_0 はいつでも、$u_0 = 1$ となるように取り直せるからである。

さて、前述のように、特異点の個数は、最小であり、3 個であるという仮定に立つ。最後に、もう一つの特異点の周りでのモノドロミーを決定する。今、$u = \infty$ も、その特異点のうちの一点であるとしたとき、もう一つの特異点に対するモノドロミーを求めなければならない。そのモノドロミー行列を M_{-1} と呼ぶことにする。$u = 1$ と Z_2 変換で結ばれる点 $u = -1$ において生じるモノドロミーであるからである。全てのモノドロミー変換は、u 平面上を、反時計周りに回転するパラメータ変換のもとで、生じるものとする。つまり、図 5.1 のようにモノドロミーを取るということである。図 5.1 により、モノドロミー行列は、

$$M_1 M_{-1} = M_\infty \tag{5.25}$$

の関係式を満たさなければならないことになる。

今まで、式 (5.10)、及び、式 (5.24) で求めた M_∞, M_1 を代入することで、M_{-1} は

$$M_{-1} = (TS)T^2(TS)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

のように導ける。ここで、行列 A を、

$$A = TM_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

という形で定める。

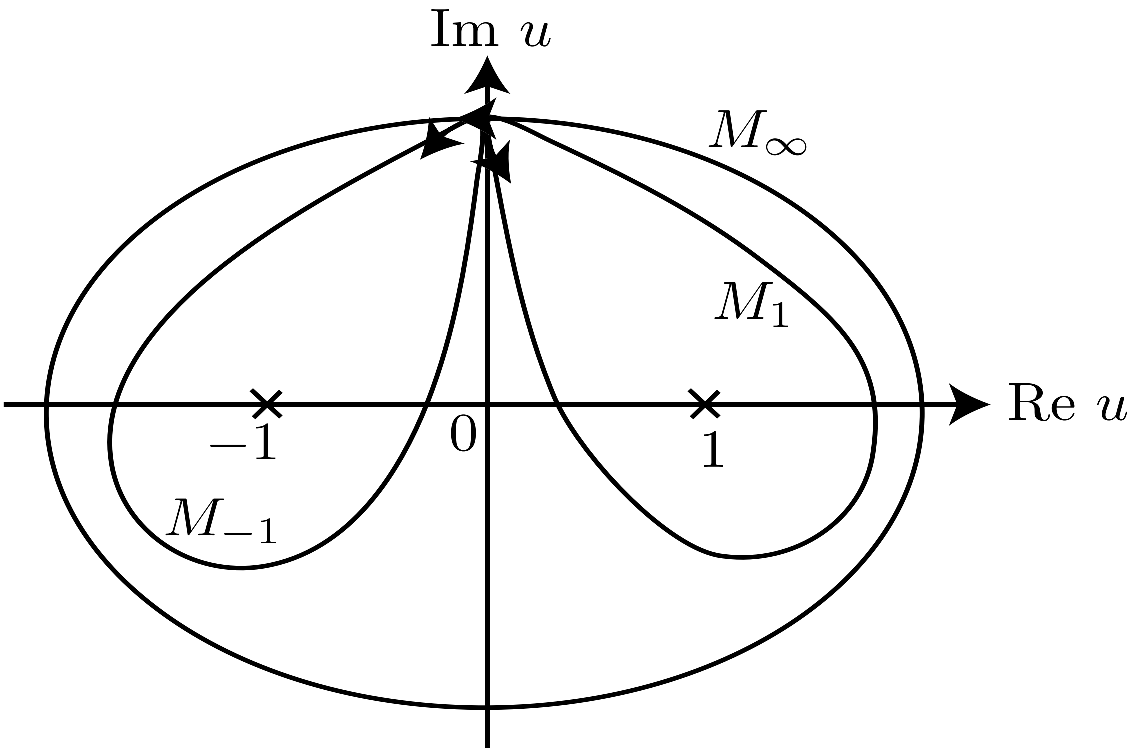

図 5.1: u-平面上のモノドロミーを示す曲線

このとき、以下の意味で、行列 M_{-1} は、M_1 に共役である。

$$M_{-1} = AM_1A^{-1} \tag{5.28}$$

M_1 は、モノポールの質量がゼロになる点の周りのモノドロミーであった。M_{-1} では、どのような粒子の質量がゼロになることで、このようなモノドロミーが生じるのかということを、次に言及する。

今、荷電が作る横ベクトル

$$q = (n_m,\ n_e) \tag{5.29}$$

及び、縦ベクトル

$$v = \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

を考える。これらの行列に対して、モノドロミー行列 M は、

$$\begin{cases} v \to Mv \\ q \to qM^{-1} \end{cases} \tag{5.31}$$

と作用する。従って、A による共役変換を行ったとき、

$$\begin{cases} v \to Av \\ q \to qA^{-1} \end{cases} \tag{5.32}$$

よって、$u = 1$ で $q = (1,\ 0)$ であった荷電ベクトルは、$u = -1$ において、

$$qA^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (1,\ -1) \tag{5.33}$$

となり、この点で、massless になるのは この dyon であることが解る。
　また、モノドロミー行列 M と q の間には、

$$qM = q \tag{5.34}$$

なる関係がある。今、M_1 について考えると、

$$q_1 = (1,\ 0) \tag{5.35}$$

としたときに、

$$q_1 M_1 = q_1 \tag{5.36}$$

である。一方、M_{-1} のときに対応する荷電のベクトルは、

$$q_{-1} = (1,\ -1) \tag{5.37}$$

となり、このような dyon が、massless になっていることもここでも解る。

第6章　モデルの解

6.1　モデルの解の構成

今、モノドロミー行列が、それぞれの特異点について

$$
\begin{aligned}
M_\infty &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
M_{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

と、求まった。

さらに、a a_D が、それぞれの特異点の周りで満たすべき漸近的性質が分かっているわけである。

解の満たすべき性質として、パラメータ空間の計量の正値性の問題があった。パラメータ空間の作る多様体の計量は、空間全域にわたって、正でなければならない。すなわち、『パラメータ空間全域に渡って、

$$
\mathrm{Im}\,(\tau) > 0 \tag{6.2}
$$

となるようなパラメータで、真空のモデュライ空間が記述されていなければならない』ということである。これらの性質を満たすようなパラメータ　a , a_D を見つけるわけである。モノドロミーが完全に決定されたとき、楕円曲線の解析により、その関数の構造を決定することが出来る。その解析については、

結局、解は

$$
a = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \oint_{\gamma_2} \frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} \tag{6.3}
$$

$$
a_D = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{1}^{u} \frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} \tag{6.4}
$$

という形で求まる。

6.2 解の漸近的挙動

解は、

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx\sqrt{x-u}}{x^2-1}$$
$$a_D = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{1}^{u}\frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} \tag{6.5}$$

と求まった。この解が正しい解であることのチェックの一つとして、元々の漸近的挙動を再現していることをチェックして、結びとする。

これの漸近的挙動は、$u \approx \infty$ の周辺で、

$$a \approx \frac{\sqrt{2u}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-x^2} = \sqrt{2u} \tag{6.6}$$

a_D については、$x = uz$ の変数変換をすると、

$$a_D = \frac{\sqrt{2u}}{\pi}\int_{1/u}^{1}\frac{dz\sqrt{z-1}}{z^2-u^{-2}} \tag{6.7}$$

となり、$u \to \infty$ の極限をとったとき、この積分からは、log 発散する部分が出る。その部分を取り出すと、

$$a_D \approx i\frac{\sqrt{2u}\ln u}{\pi} \tag{6.8}$$

である。これは、元々の a と a_D の漸近形そのものである。

次に、$u = 1$ の特異点の周りでは、まず、a_D について

$$a_D = \frac{\sqrt{2u}}{\pi}\int_{1/u}^{1}\frac{dz\sqrt{z-1}}{z^2-u^{-2}} \approx \frac{1}{\pi}\int_{1/u}^{1}\frac{dz\sqrt{z-1}}{z-u^{-1}} = \frac{i}{2}(1-\frac{1}{u}) \approx \frac{i(u-1)}{2} \tag{6.9}$$

となる。a については、まず、$u = 1$ という値を代入してしまったものの振る舞いを見る。そして、次に、$u = 1$ から、少しだけ値をずらしたときの a の振る舞いを見る。まず、$u = 1$ を代入すると、

$$a(u=1) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+1} = \frac{4}{\pi} \tag{6.10}$$

となる。さらに、

$$\frac{da}{du} = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-1)(x-u)}} \tag{6.11}$$

であるから、a は、

$$a = \frac{4}{\pi} - \frac{(u-1)\ln(u-1)}{2\pi} \tag{6.12}$$

という漸近形を取る。確かにこれは、$u = 1$ のときの漸近形も再現しているのである。

第 7 章　まとめ
―この解析の達成されたことの意義―

結局、この解析でしたこととは、$F_{\mu\nu}$ の自己双対方程式 (self-dual equation)

$$F_{\mu\nu} = +\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{7.1}$$

の解である、インスタントンによる効果を、その実際の計算をすることなしに、特異点とそのモノドロミーの解析だけで完全に与えたことである。インスタントンの実際の計算は、後述のように、現在では手法が確立しているが、当時は、まだ確立しておらず、さらに、より煩瑣な解析が必要とされる。

非摂動論的効果であるインスタントン効果を完全に含めて解析する手法は、当時、他にはなかったのだが、Seiberg-Witten [2] は、その具体的な計算を行わず、それを全て考慮するという手法を確立したのである。

実際、これより対称性が低いときには、現在でも、非摂動論的効果を取り扱う満足な手法は確立していない。

弦理論は、やはり真空の構造が定まらない理論である。非摂動論的効果が重要であると考えられているものの、それを系統だって扱う満足な解析的手法は今のところ存在しない。

$\mathcal{N}=1$ の超対称性のあるゲージ理論では、基本表現に属する物質場も存在する理論を考えると、その運動項が入った項 D-term を決定することが、出来ていない。

超対称性のないゲージ理論では、基本表現の場に対して、非摂動的に扱う手法が存在すれば、有効作用にその基本表現の場が現れないこと、すなわち、クォークの閉じ込めが説明できると考えられている。しかし、その非摂動論的効果を解析的に扱う手法は、今のところ満足なものが存在していないのである。

そのように、弦理論、$\mathcal{N}=1$ の超対称ゲージ理論、超対称性のない非可換ゲージ理論を通じて、非摂動論的解析が重要なことは知られているが、その具体的手法に関しては、未だに確立されたものが存在しない。

唯一、存在するのは、$\mathcal{N}=2$ のときの解析のみである。[1]その解析という意味で、この解析の意義は大きかった。結局、摂動論的効果や、非摂動論的効果が考慮に入れられ

[1]さらに対称性が大きくなれば、理論は trivial になる。実際、$\mathcal{N}=4$ の理論では、結合定数は、running しない。

た後でも、真空の縮重は解けなかった。だが、その低エネルギー有効作用については求めることが出来たのである。

また、数学的にも、多様体の構造解析に楕円曲線を用いるという手法は、一石を投じるものであった。

この理論の物理としての、現在の進展としては、超対称性の小さい $\mathcal{N}=1$ の理論への応用や、直接、インスタントン計算をして、$\mathcal{F}_{instanton}$ を決定する方法の研究、弦理論の非摂動効果の計算への応用の研究が進んでいる。このうち、インスタントン計算を完全に実行する方法に関しては達成されている。

本修士論文では、著者の理解不足のため触れることが出来ないが、2002年には、N.Nekrasov により、k の任意の次数に対する $\mathcal{F}_k$ の具体形の公式が、[9] で予想された。その証明は、Okounkov と Nekrasov 自身によって、[10] で与えられている。また、日本人の数学者 2 名により、で、同時期に全くの別手法を用いてこの公式の証明が与えられている。

そのような、別の手法での解析は進んでいる訳だが、他の手法が無い時代に、実際のインスタントンの計算をすることなく、理論を完全に解いたこの解析は当時、衝撃を与えた。ゲージ理論のさらなる理解と、場の理論の非摂動論的効果の理解の手がかりを得るという意味でもこの解析の達成は大きかった。

現在でも、新たな非摂動論的解析の手法の構築のための、スターティングポイントになっているとも言えるであろう。

謝辞

この修士論文作成に当たって、全面的にご指導を頂いた北澤敬章先生、指導教官の南方久和先生に心よりの感謝を申し上げます。また、素粒子理論サブグループ、高エネルギー理論サブグループの諸先輩・同輩・後輩達には、公私ともにお世話になりました。その方達を始めとして、この二年間の間に私に関わった全ての方々に感謝を申し上げます。最後に、特に、私を精神的・経済的に支えてくれた家族に感謝を捧げます。

参考文献

[1] J. Wess and J. Bagger, *"Supersymmetry and Supergravity"* , Princeton University Press, Princeton, (1983), (second edition: 1992).

[2] N. Seiberg and E. Witten, *"Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory"* , Nucl.Phys.**B426**:19-52,1994 (arXiv:hep-th/9407087).

[3] N. Seiberg and E. Witten, *"Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in N=2 Supersymmetric QCD"* , Nucl.Phys.**B431**:484-550,1994 (arXiv: hep-th/9408099)

[4] E.B.Bogomolny, *"The stability of classical solutions"*,Sov.J.Nucl.Phys.**24**:449,1976.

[5] M.K.Prasad and Charles M. Sommerfield, *"Exact Classical Solution for the t'Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon"* , Phys.Rev.Lett.**35**:760-762,1975.

[6] E. Witten and D. Olive, *"Supersymmetry algebras that include topological charges"* , Phys.Lett.**B78**:97,1978.

[7] E. Witten, *"Dyons of Charge $\frac{e\theta}{2\pi}$"* , Phys.Lett.**B86**:283-287,1979.

[8] N. Seiberg, Phys.Lett. **206B** (1988) 75.

[9] N.A.Nekrasov, *"SEIBERG-WITTEN PREPOTENTIAL FROM INSTANTON COUNTING"*, Adv.Theor.Math.Phys.7:831-864,2004 (arXiv: hep-th/0206161).

[10] Nikita Nekrasov and Andrei Okounkov, *"SEIBERG-WITTEN THEORY AND RANDOM PARTITIONS"*, (arXiv hep-th/0306238).

[11] Hiraku Nakajima and Kota Yoshioka, "INSTANTON COUNTING ON BLOWUP. 1.", (arXiv: math.ag/0306198).