

Non-SUSY Minimal  $SO(10)$  GUT モデルにおける  
fermions の質量の解析

藤本 侑貴  
首都大学東京 理工学研究科  
物理学専攻 素粒子理論研究室

2018 年 1 月

# 目次

第 1 章	はじめに	3
第 2 章	標準模型	5
2.1	群とゲージ対称性	5
2.2	電弱相互作用	6
2.3	Higgs 場と自発的対称性の破れ	7
2.4	湯川相互作用と fermions の質量	9
2.5	強い相互作用	11
2.6	標準模型の問題点	12
第 3 章	Grand Unification Theory	14
3.1	Grand Unification Theory	14
3.2	The Georgi-Glashow $SU(5)$ model	14
3.3	繰り込み群方程式と fermions の質量	16
3.4	$SU(5)$ GUT モデルの問題点	19
第 4 章	$SO(10)$ GUT	20
4.1	$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$	20
4.2	$SO(10)$ 群	21
4.3	$SO(10)$ の SM への破り方	22
4.4	$SO(10)$ GUT における fermions の質量	24
第 5 章	Minimal Non-Supersymmetric $SO(10)$ GUT	26
5.1	Economic Yukawa Sector in $SO(10)$	26
5.2	RGEs for Gauge Coupling Constants	27
5.3	RGEs from $M_{GUT}$ to $M_I$	27
5.4	RGEs from $M_I$ to $M_Z$	29
5.5	モデルパラメータ	30
第 6 章	解析	32
6.1	先行研究と neutrino 実験の問題点	32
6.2	Best fit とその解析	33
6.3	NO $\nu$ A 実験と T2K 実験での実験結果を用いた解析	39

第7章 まとめ	41
Apendix	42
謝辞	44
参考文献	45

# 第 1 章

## はじめに

素粒子物理学の目的は、自然界に存在する最も基本となる粒子を発見し、その性質や相互作用を解明、そしてそれを数学的に記述することである。素粒子物理学において現在のところ最も多くの実験結果を理解再現することが出来ている模型は標準模型 (the Standard Model, SM) である。2012 年には標準模型において存在が予言された Higgs 粒子が、欧州原子核研究機構 (CERN) の大型ハドロン衝突型加速器 (Large Hadron Collider, LHC) を用いた実験により発見され、標準模型はより確実に存在が認められた。それでも標準模型には理論的または実験的観点から解決すべき問題をいくつか抱えている。理論的な問題点としては「重力が量子化できていない」、「調整可能なパラメータを数多く含む」、「繰り込み不可能なものがある」等が存在する。実験的観点による問題点は「neutrino に質量がない」、「暗黒物質の候補となる粒子が存在しない」、「バリオン数の非対称性を説明できない」等が存在する。そのために現在、「標準模型を超える理論 (Beyond the Standard Model)」について理論と実験の両方で盛んに研究されている。それらの大々的な解決策として統一理論が強く支持されている。統一理論とは、自然界にある相互作用は宇宙初期は元々 1 つの相互作用で、それらがエネルギーの変化により分かれたという考え方である。この考え方は電場と磁場を一つの相互作用とする量子電磁気学 (Quantum Electrodynamics (QED)) に端を発している。また、標準模型は電磁相互作用と弱い相互作用を統一する電弱統一理論である。そして統一理論は対称性と大きな関係がある。例えば QED は時空の対称性を導入することで得ることが出来る。そして標準模型は 1961 年に Sheldon Lee Glashow がハドロンが持つ量子数であるアイソスピンとストレンジネスとの類推から  $SU(2) \times U(1)$  対称性を考えたことが始まりである。従って対称性を考えることが統一理論を構築する上で重要になってくる。それではどのような対称性があるのでしょうか。よく考えられているのが標準模型では破れている左巻きと右巻きの対称性 (Left-Right Symmetry) や、バリオン数の非対称性を説明する B-L 対称性、bose 粒子と fermi 粒子が同じ粒子であると考えられる超対称性 (Super Symmetry) 等である。これらの対称性を導入することで相互作用、特に量子化できている強い相互作用を電弱相互作用と統一しようとするのが大統一理論 (Grand Unification Theory, GUT) である。しかし、GUT を構築する上で重要になってくるのが実験事実である。まず標準模型の相互作用の強さを示す結合定数 (coupling constants) を合わせなければならない。また、標準模型に存在する粒子のパラメータも合わせなくてはならない。これらの多くのパラメータを合わせた上で実験事実と矛盾しない模型を構築する必要がある。だが調整可能なパラメータを数多く含む事もあり、様々な複雑なモデルが日夜考えられているのが今の現状である。それらの中から一つに絞るためには、新しく強い拘束条件をもつ実験事実を発見することが必要である。そしてそのような実験をするためにも、現状可能なモデルの整理をすることが重要であると思われる。なので本研究では、出来るだけ単純かつ現状否定されていないモデルを考えることで、GUT モデルについて深く考察することが目的である。

本論文の構成を以下に示す。まず第 2 章では相互作用に注目して標準模型を説明する。第 3 章では GUT 理論の例として  $SU(5)$ GUT を紹介し、GUT 理論の構築方法と問題点を解説する。次に第 4 章で実際に用いる対称性である  $SO(10)$  による GUT について一般的に言えることを解説する。そして第 5 章及び第 6 章では今回用いるモデルについて詳細に議論していく。最後の第 7 章で解析と結論を与える。

## 第 2 章

# 標準模型

### 2.1 群とゲージ対称性

Dirac fermion 場  $\psi(x)$  に対する局所的 (local) ゲージ変換を考える。

$$\psi(x) \rightarrow \psi' = \exp(-i\alpha(x))\psi(x) \quad (2.1)$$

ここで  $\alpha(x)$  は  $x = (t, \mathbf{x})$  の関数であり、時空の異なる点で異なる値を取りうる。これは位相の変換であり、1次元 unitary 変換  $U(1)$  に分類される。このゲージ変換によって得られる  $\psi'(x)$  は自由粒子の Dirac 方程式

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (2.2)$$

を満たさない。そこで、ゲージ場  $A_\mu$  を導入し、微分を共変微分に置き換える。

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2.3)$$

このとき、fermion 場  $\psi(x)$  が、場  $A_\mu$  の元で運動する場合の運動方程式

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (2.4)$$

を満たすためには、場の変換に対してゲージ場が

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (2.5)$$

と変換すればよい。また、Lagrangian 密度は新しく増えたゲージ場の運動エネルギー項を加えると

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.6)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.7)$$

となり、これは  $e$  を fermion 場  $\psi(x)$  の電荷とすれば、ゲージ場  $A_\mu$  は電磁場であることがわかる。つまり、場  $\psi(x)$  に local 対称性  $U(1)$  ゲージ不変性を課すことによって、電磁相互作用を媒介するゲージ場  $A_\mu$  が自然と現れる。言い換えれば、場に存在するゲージ対称性によって相互作用が記述される。

一般にゲージ対称性が  $SU(N)$  群である場合を考える。 $SU(N)$  群とは、行列式が 1 の  $N$  次元 unitary 行列の為す群のことである。 $N$  個の成分を持つ場

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

の  $SU(N)$  群による微小変換  $U(x)$  は

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) = \exp(ig\theta^a(x)T^a)\psi(x) \quad (2.9)$$

と表せる。ここで  $g$  は結合定数と呼ばれる実数定数であり、 $\theta^a(x)$  は変換のパラメータである。また、 $T^a$  はゲージ群の無限小変換の生成子であり、 $SU(N)$  群の場合は  $a = 1, \dots, (N^2 - 1)$  の  $N \times N$  エルミート行列である。この変換の下で場  $\psi$  の Lagrangian 密度が不変になるために微分を共変微分に置き換えると

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a(x)T^a \quad (2.10)$$

であり、Lagrangian 密度が不変になるためには

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu'^a(x) = A_\mu^a(x) + f^{abc}A_\mu^b(x)\theta^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) \quad (2.11)$$

とならなければならない。ここで  $f^{abc}$  は  $SU(N)$  群の構造定数と呼ばれ、

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (2.12)$$

で表される完全反対称な定数である。従って  $SU(N)$  ゲージ対称性を持つ Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) \quad (2.13)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.14)$$

となる。またゲージ場  $A_\mu$  に対して質量項を考えると、ゲージ不変でなくなってしまう。すなわち、ゲージ不変性の要請によってゲージボソンの質量は 0 である。

## 2.2 電弱相互作用

電磁相互作用は  $U(1)$  ゲージ対称性によって描写される。一方、弱い相互作用は弱い相互作用のみの独立したゲージ対称性だと考えると、現実と合わない性質が現れる。そこで標準模型では、電磁相互作用と弱い相互作用を 1 つの電弱相互作用の異なる成分として表す。この対称性は  $SU(2)$  群と  $U(1)$  群の直積によって

$$SU(2) \times U(1)$$

ゲージ対称性として表される。そして、この対称性が自発的に破れ、その結果、破れない部分群  $U(1)$  ( $SU(2) \times U(1)$  群の  $U(1)$  とは異なる) が電磁相互作用となる。今後それぞれを区別するために、電磁相互作用のゲージ対称性を  $U(1)_{QED}$ 、電弱相互作用のゲージ対称性を  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  とする。

弱い相互作用は左巻きの fermions にのみ作用し、また、右巻き neutrino は存在しない。従って、右巻きと左巻きの対称性が破れており、それぞれに対して異なるゲージ変換を考える必要がある。そこで左巻きの fermions を  $SU(2)$  二重項、右巻きの fermions を一重項として考える。簡単のため第一世代の leptons だけを考えて、左巻きの leptons は

$$L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$$

となり、右巻きの電子は

$$e_R$$

と表す。ここで fermion 場  $\psi$  に対する右巻き・左巻きの場  $\psi_R, \psi_L$  は、斜影演算子

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}, P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}$$

を用いて、 $\psi_R = P_R \psi, \psi_L = P_L \psi$  と表される。それぞれの leptons に対して、 $SU(2)_L$  ゲージ変換と  $U(1)_Y$  ゲージ変換を考えると、Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L + i\bar{e}_R\gamma^\mu D_\mu e_R - \frac{1}{2}\text{tr}(B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\text{tr}(W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu}) \quad (2.15)$$

$$D_\mu L = \left( \partial_\mu + ig_Y B_\mu \frac{Y}{2} + ig_L W_\mu^i T^i \right) L \quad (2.16)$$

$$D_\mu e_R = \left( \partial_\mu + ig_Y B_\mu \frac{Y}{2} \right) e_R \quad (2.17)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.18)$$

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_Y \varepsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (2.19)$$

$\varepsilon(i = 1, 2, 3)$  は完全反対称テンソル、 $Y/2$  は  $U(1)_Y$  の生成子、 $T^i$  は  $SU(2)_L$  の生成子である。 $T^i$  は二次元表現で表すと、Pauli 行列によって  $\sigma^i/2$  と表すことが出来る (Appendix)。一方  $Y$  は weak hypercharge と呼ばれ、電荷の演算子  $Q$  と、weak isospin と呼ばれる  $T^3$  によって

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2} \quad (2.20)$$

という関係にある。それぞれの leptons に対する値は表 (1) に示す。質量項については、fermion  $\psi$  の質量項は、 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  より

$$-\mathcal{L}_m = m\bar{\psi}\psi = m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L \quad (2.21)$$

と書かれるはず。従って電弱相互作用の場合、左巻きは  $SU(2)_L$  二重項、右巻きは一重項なので、質量項は  $SU(2)_L$  対称性を破ってしまう。しかしながら実際は質量をもつ。その方法は後述で説明する。

## 2.3 Higgs 場と自発的対称性の破れ

ゲージ場  $B_\mu, W_\mu$  が表すゲージボソンの質量はゲージ変換不変性によって厳密に 0 であることを要請する。しかしながら、弱い相互作用が無遠方まで働かず、高エネルギーでのみ観測されることから、媒介するボソンの質量は極めて大きいと考えられる。そこで導入されたのが、物理系を表す Lagrangian はゲージ不変であるが、「真空」がゲージ不変ではないという考え方で、それを起こすために新たに Higgs 場を定義する。Higgs 場とはスピン 0・電荷 0 のボーズ粒子によるスカラー場である。この場がゲージ変換不変であれば、Lagrangian 密度に Higgs 場  $\phi$  の項

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi) \quad (2.22)$$

を加えてもゲージ変換不変のままである。このとき真空として選ばれるのは、Higgs 場のポテンシャル項  $V(\phi)$  が最小値を取るときであるので、もしその最小値がゲージ対称性を持たない場合、真空として選ぶことによって対称性が破れ、ゲージ場は質量を獲得する。

実際に  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  ゲージ対称性の場合を考えてみる。ゲージ変換不変な複素スカラー場  $\phi$  は  $SU(2)_L$  二重項として

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$



として表す。さらに  $\phi^+$  の電荷は  $Q = 1$  で、 $\phi^0$  の電荷は  $Q = 0$  とする。すると、

$$T^3 \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ -\phi^0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

より  $\phi^+$  と  $\phi^0$  で同じ weak hypercharge  $Y = 1$  となるので、 $\phi$  は左巻きの leptons と同様のゲージ変換を受け、共変微分は

$$D_\mu \phi = \left( \partial_\mu + ig_Y B_\mu \frac{Y}{2} + ig_L W_\mu^i T^i \right) \phi \quad (2.24)$$

となる。一方、ゲージ変換不変なポテンシャル項は、繰り込み可能なことから  $\phi$  のたかだか 4 次の関数であり

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (2.25)$$

となる。ポテンシャルが極小値を持つためには  $\lambda > 0$  である。また、 $\mu^2 > 0$  の場合は最小値は  $\phi = 0$  のときなので、ゲージ対称性は破れず、質量を持たせることはできない。従って  $\mu^2 < 0$  であり、このときポテンシャルが最小になるのは

$$\phi^\dagger \phi = \frac{-\mu^2}{\lambda} \quad (2.26)$$

のとき。この段階では  $\phi$  の変換に対する自由度が 4 つ残っているが、真空期待値として

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \nu = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (2.27)$$

に選ぶことによって、真空が  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  ゲージ対称性を破る。しかしながら

$$Q \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \left( T^3 + \frac{Y}{2} \right) \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0 \quad (2.28)$$

より、 $U(1)_{QED}$  対称性は破れていない。つまり Higgs 場  $\phi$  が真空期待値を持つことで、ゲージ対称性は

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{QED}$$

と自発的に破れる。ここで  $\phi$  の運動項に注目すると、真空において

$$D_\mu \phi \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{g_Y}{2} B_\mu + \frac{g_L}{2} W_\mu^i \sigma^i \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{i\nu}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g_L W_\mu^1 - ig_L W_\mu^2 \\ g_Y B_\mu - g_L W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

より、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin} &= \frac{1}{2} \left( \frac{g_L \nu}{2} \right)^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{g_L^2 + g_Y^2} \nu}{2} \right)^2 (\cos \theta_W W^{3\mu} - \sin \theta_W B^\mu) (\cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu) \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる。ここで  $\theta_W$  は Weinberg 角と呼ばれ、

$$\cos \theta_W = \frac{g_L}{\sqrt{g_L^2 + g_Y^2}}, \sin \theta_W = \frac{g_Y}{\sqrt{g_L^2 + g_Y^2}} \quad (2.31)$$

と置く。さらに

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm iW_\mu^2), Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \quad (2.32)$$

と置けば、

$$\mathcal{L}_{kin} = \left(\frac{g_L \nu}{2}\right)^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{g_L^2 + g_Y^2} \nu}{2}\right)^2 Z^\mu Z_\mu \quad (2.33)$$

となる。よって  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  のゲージ対称性が破れると共に質量 0 のゲージ場  $B_\mu, W_\mu$  が質量

$$M_W = \frac{g_L \nu}{2}, M_Z = \frac{\sqrt{g_L^2 + g_Y^2} \nu}{2}$$

を持った  $W^\pm$  ボソンと  $Z$  ボソンに変化した。これは元々 Higgs 場  $\phi$  にあった 4 つの自由度のうち 1 つだけが Higgs 場になり、残りの 3 つがゲージボソンに吸収され、質量を獲得したという事である。また、ゲージ場  $Z_\mu$  に直交した成分は質量を持たないが、それは電磁場  $A_\mu$  で与えられる。従って、 $Z_\mu$  と  $A_\mu$  との間には

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

という関係があり、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$  のゲージ場が Weinberg 角で混ざり  $U(1)_{QED}$  のゲージ場になる。また、leptons の共変微分のうち  $A_\mu$  の成分は

$$D_\mu \rightarrow \partial_\mu + i \frac{g_L g_Y}{\sqrt{g_L^2 + g_Y^2}} \left(\frac{Y}{2} + T^3\right) A_\mu = \partial_\mu + i \frac{g_L g_Y}{\sqrt{g_L^2 + g_Y^2}} Q A_\mu \quad (2.35)$$

となるので、 $U(1)_{QED}$  の結合定数  $e$  は

$$e = \frac{g_L g_Y}{\sqrt{g_L^2 + g_Y^2}}$$

であることが分かる。

## 2.4 湯川相互作用と fermions の質量

Higgs 場が導入されたことで、Higgs と fermions の相互作用が新たに考えられる。しかし、新たな相互作用も  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  不変でなくてはならない。まず、 $SU(2)_L$  不変性を保つために、2 重項である左巻き fermion 場、 $SU(2)_L$  1 重項である右巻き fermion 場、 $SU(2)_L$  2 重項である Higgs 場が 1 つずつの積の形の相互作用でなければならない。また、その積自体も  $U(1)_Y$  不変でなくてはならない。つまり、leptons の場合、それぞれの  $U(1)_Y$  変換を

$$L' = \exp\left(-i\alpha \frac{Y_L}{2}\right) L, e'_R = \exp\left(-i\alpha \frac{Y_{e_R}}{2}\right) e_R, \phi' = \exp\left(-i\alpha \frac{Y_H}{2}\right) \phi$$

と置くと、

$$(\bar{L}\phi e_R)' = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}(-Y_L + Y_H + Y_{e_R})\right)$$

となるので、 $U(1)_Y$  不変な条件は

$$-Y_L + Y_H + Y_{e_R} = 0$$

であり、成り立っている。よって、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$  な Lagrangian 密度は、

$$\mathcal{L}_{yukawa} = -y_e \bar{L}\phi e_R + h.c. \quad (2.36)$$

となり、これを湯川相互作用 (Yukawa Coupling) と呼び、 $y_e$  は電子の湯川結合定数である。さらに、自発的対象性の破れによって Higgs が真空期待値をとると

$$\mathcal{L}_{yukawa} = -y_e \bar{L} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_R + h.c. = -\frac{y_e \nu}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) = -\frac{y_e \nu}{\sqrt{2}} \bar{e} e \quad (2.37)$$

となる。よって電子は自発的対象性の破れによって、湯川相互作用より質量

$$m_e = \frac{y_e \nu}{\sqrt{2}}$$

を獲得した。

今まで第一世代の leptons についてのみ議論してきたが、これを quarks および 3 世代にまで拡張することが出来る。そのとき、quarks は  $SU(2)_L$  二重項である左巻きの quarks と、 $SU(2)_L$  一重項である右巻き u type quarks, d type quarks の 3 つ

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, u_R, d_R$$

が存在し、湯川相互作用は

$$\mathcal{L}_{yukawa} = -y_u \bar{Q} \phi u_R - y_d \bar{Q} \phi d_R + h.c. \quad (2.38)$$

となる。また、quarks において世代間の混合が存在する。湯川相互作用による 3 世代 quarks の質量項を考えると、

$$\mathcal{L}_{yukawa} = -\bar{u}_L \mathcal{M}_u u_R - \bar{d}_L \mathcal{M}_d d_R \quad (2.39)$$

$$u_L = \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix}, u_R = \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix}, d_L = \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, d_R = \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix}$$

となるが、leptons と違い、quarks の場合は u type quarks と d type quarks の二つがあるので、どちらか一方の質量行列  $\mathcal{M}$  ( $3 \times 3$  ユニタリー行列) を対角にとると、もう一方が対角に取れず、質量固有状態で世代間の混合が起こる。なので、今後は世代間の混合を d 型 quarks に押し付けた Cabbibo-小林-益川行列 (CKM 行列)

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

を用いて、特に区別するときは

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}$$

を  $SU(2)_L$  二重項を構成する状態、

$$\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

を質量固有状態とする。

## 2.5 強い相互作用

標準模型における強い相互作用は quarks にのみ作用し、 $SU(3)_C$  ゲージ対称性によって記述される。leptons はの一重項であるのに対して、quarks はカラーによって三重項

$$q_f = \begin{pmatrix} q_f^1 \\ q_f^2 \\ q_f^3 \end{pmatrix}$$

で表される。ここで  $f$  は quarks のフレーバー  $f = 1, 2, \dots, 6 = u, d, c, s, t, b$  である (質量固有状態)。よって Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{2} \text{tr}(G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}) \quad (2.41)$$

$$D_\mu q_f = (\partial_\mu + ig_3 T^a G_\mu^a) q_f \quad (2.42)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_3 f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.43)$$

$T^a$  は  $SU(3)_C$  の生成子 ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ) であり、二次元表現で表すと、Gell-Mann 行列によって  $\lambda^a/2$  と表すことができる (Appendix)。

以上より標準模型を対称性の観点から見ると、高エネルギーでは

$$SU(3)_C \times [SU(2)_L \times U(1)_Y]$$

という対称性を持っていて、エネルギーが下がると Higgs が極小値を取ることで、対称性が

$$SU(3)_C \times U(1)_{QED}$$

に破れる。

表 2.1 SM における fermions の表現

	$SU(3)$	$T^3$	$Y/2$	$Q$
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	<b>3</b>	$\begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	+1/6	$\begin{pmatrix} +2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$u_R$	<b>3</b>	0	+2/3	+2/3
$d_R$	<b>3</b>	0	-1/3	-1/3
$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}$	<b>1</b>	$\begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	-1/2	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$e_R^-$	<b>1</b>	0	-1	-1
$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	<b>1</b>	$\begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	+1/2	$\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$

## 2.6 標準模型の問題点

標準模型にはいくつかの問題点がある。その内の二つに注目してみる。一つは neutrino には質量が存在することである。標準模型において、neutrino には右巻きが存在しないので、 $SU(2)$  対称性より質量は厳密に 0 となるはずである。しかし、1998 年にニュートリノ振動が発見された。これは neutrino が空間を伝播するときの固有状態である質量固有状態 ( $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ ) と、観測する際に  $e, \mu, \tau$  と相互作用するフレーバー固有状態 ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) が異なるために起こる。なので、quarks と同様に世代間の混合を (Pontecorvo)-牧-中川-坂田行列 (MNS 行列) によって

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = V_{MNS} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

と表される。

二つ目の問題はアノマリーによるものである。経路積分で対称性について考えると、パラメータ  $\epsilon^a$  による場の無限小の Local 変換

$$\delta\psi = \psi'(x) - \psi(x) = \epsilon^a(x)G^a(x) \quad (2.45)$$

に対して、場の経路積分の測度  $D\psi = \Pi d\psi(x)$  が

$$D\psi' = D\psi \exp\left(i \int d^4x \epsilon^a(x)A^a(x)\right) \quad (2.46)$$

のように変化するとするとき、作用

$$S[\psi] = \int d^4x \mathcal{L}(x)$$

を用いて経路積分

$$\int D\psi e^{iS[\psi]}$$

が不変となるものが対称である。計算してみると、

$$\begin{aligned} \int D\psi' e^{iS[\psi']} &= \int D\psi \exp\left(i \int d^4x \epsilon^a(x)A^a(x)\right) \exp\left(iS[\psi] + i \int d^4x \frac{\delta S[\psi]}{\delta\psi(x)} \epsilon^a(x)G^a(x)\right) \\ &= \int D\psi \exp\left(i \int d^4x \epsilon^a(x) \left(A^a(x) + \frac{\delta S[\psi]}{\delta\psi(x)} G^a(x)\right)\right) e^{iS[\psi]} \end{aligned} \quad (2.47)$$

となるので、

$$\int d^4x \epsilon^a(x) \left(A^a(x) + \frac{\delta S[\psi]}{\delta\psi(x)} G^a(x)\right) = 0 \quad (2.48)$$

さらに任意のパラメータ  $\epsilon^a(x)$  で成り立つので

$$\langle A^a(x) + \frac{\delta S[\psi]}{\delta\psi(x)} G^a(x) \rangle = 0 \quad (2.49)$$

という恒等式を得る。Local 変換不変なので

$$\delta S[\psi] = \int d^4x \frac{\delta S[\psi]}{\delta\psi(x)} \epsilon^a(x)G^a(x) = 0 \quad (2.50)$$

であり、任意のパラメータ  $\epsilon^a(x)$  で成り立つので、上の恒等式は

$$\langle A^a(x) \rangle = 0$$

を与えるべきである。なので

$$\langle A^a(x) \rangle \neq 0$$

のような場合をアノマリーがあると呼ぶ。ここで  $SU(N)$  ゲージ理論が持つアノマリーについて見てみる。 $\psi(x)$  は  $N$  個の成分から成る、右手型もしくは左手型のディラック場とする。すると

$$P_R^\dagger = P_L, P_L^\dagger = P_R$$

となるので、微小変換は

$$\delta\psi_R = ig\theta^a T^a P_R \psi, \delta\bar{\psi}_R = -\bar{\psi} ig\theta^a T^a P_L \quad (2.51)$$

$$\delta\psi_L = ig\theta^a T^a P_L \psi, \delta\bar{\psi}_L = -\bar{\psi} ig\theta^a T^a P_R \quad (2.52)$$

従って経路積分の測度は

$$\begin{aligned} D\bar{\psi}'_R D\psi'_R &= D\bar{\psi} \text{Det}(1 - ig\theta^a T^a P_L) D\psi \text{Det}(1 + ig\theta^a T^a P_R) \\ &= D\bar{\psi} D\psi \text{Det}(1 + ig\theta^a T^a \gamma_5) \\ &= D\bar{\psi} D\psi \exp\left(\int d^4x ig\theta^a \text{tr}(T^a \gamma_5 \delta^4(0))\right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$D\bar{\psi}'_L D\psi'_L = D\bar{\psi} D\psi \exp\left(-\int d^4x ig\theta^a \text{tr}(T^a \gamma_5 \delta^4(0))\right) \quad (2.54)$$

となる。よってアノマリーは

$$\langle T^a \gamma_5 \delta^4(0) \rangle = 0$$

なら無い。もし  $\delta^4(0)$  が単なる数ならば、 $SU(N)$  の場合、 $T^a$  も  $\gamma_5$  もトレスは 0 なので問題ない。しかし正則化の仕方によってはそうならない可能性がある。ただしディラック場が複数あるときは、それらの足し合わせによってアノマリーが相殺されることがある。例えば右手型と左手型が常に対になっている場合は相殺できることがすぐにわかる。しかし、標準模型の場合、右手型と左手型が対になっていないので相殺できるとは限らない（カイラルアノマリー）。だが実際に確かめてみると、leptons と quarks の両方が存在して初めてアノマリーが相殺されることがわかる。また、weak hypercharge が少しでも異なれば相殺されない。これは偶然とは考えにくい。つまり、標準模型の背後には何か quarks と leptons を統一する理論が存在すると予想できる。

## 第 3 章

# Grand Unification Theory

### 3.1 Grand Unification Theory

QCD によると、強い相互作用は local  $SU(3)$  ゲージ対称性によって記述される。Weinberg-Salam モデルによると、電弱相互作用は local  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  によって記述される。そして SM の粒子の表現と電荷をまとめると表 1 のようになる。これらを満たした上で quarks と leptons を統一しようとする。その方法として、電磁場と弱い相互作用のように、電弱相互作用と強い相互作用が高エネルギーでは統一されているという考え方が Grand Unification Theory(GUT) である。つまり quarks と leptons は同じ粒子の異なる状態であり、高エネルギーでは区別できないが低エネルギーで  $SU(3)_C \times [SU(2)_L \times U(1)_Y]$  に破れることで区別されアノマリーが不思議に見えてしまうのではということである。そこでまず、 $SU(3) \times [SU(2) \times U(1)]$  を含む最も小さな単純群を考えてみると、それは  $SU(5)$  群である。そこで、最も単純な Georgi-Glashow  $SU(5)$  model を考えて見るが、残念ながらこのモデルは実験的に排除されている。しかしさらに複雑な群を見るためにも、GUT によって SM の粒子がどのように記述されていくのかを見ていく。

### 3.2 The Georgi-Glashow $SU(5)$ model

$SU(5)$  でも単純な Georgi-Glashow モデルで SM の粒子を記述してみる。 $SU(5)$  の生成子は traceless で hermitian な  $5 \times 5$  行列である。 $SU(3)$  の生成子  $\lambda^a (a = 1, \dots, 8)$  は左上の  $3 \times 3$  block に、 $SU(2)$  の生成子  $T^a (a = 1, \dots, 3)$  は右下の  $2 \times 2$  block に埋め込まれる。Weak hypercharge 演算子  $Y$  は traceless で  $SU(3)$  と  $SU(2)$  の生成子と交換する (Appendix)。また、すべての  $SU(5)$  の表現は  $\mathbf{5}$  表現と  $\bar{\mathbf{5}}$  表現で表すことが出来る。そこで 2 つの  $\mathbf{5}$  表現  $A^i, \tilde{A}^i$  を用いて 2nd ランクの表現を考える。2nd ランクの antisymmetric テンソル  $A^{ij}$  は

$$A^{ij} = A^i \tilde{A}^j - A^j \tilde{A}^i$$

であらわせる。これは 10 個の独立な成分を持ち、 $SU(5)$  の  $\mathbf{5}$  表現の次に小さい  $\mathbf{5}$  表現である。一方、2nd ランクの symmetric テンソル

$$S^{ij} = A^i \tilde{A}^j + A^j \tilde{A}^i$$

は  $\mathbf{5} \times \mathbf{5} = \mathbf{25}$  表現から antisymmetric な表現を引いたものなので、 $\mathbf{15}$  表現である。第一世代のフェルミ粒子すべてをリストアップすると (このとき粒子・反粒子、quarks のカラーを区別する)、に含まれる粒子は 15 個ある。従って、他の表現は 15 次元を超えてしまうので、フェルミ粒子が過不足なく現れるのであるならば、15 個のフェルミ粒子は  $\mathbf{5}, \bar{\mathbf{5}}, \mathbf{10}, \bar{\mathbf{10}}, \mathbf{15}, \bar{\mathbf{15}}$  表現であらわされる。

生成子の関係性から、SMの量子数を表すことができるのは  $\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}$  のときのみである。5表現を  $SU(3)$  と  $SU(2)$  に分解すると、 $(\mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2})$  となる。従って  $\bar{\mathbf{5}}$  表現は  $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2})$  となる。 $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$  表現に当てはまるのは  $(e_L^-, \nu_{eL})^T$  しかない。一方  $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})$  表現には  $\bar{u}_R$  と  $\bar{d}_R$  が考えられる。しかしながら  $SU(5)$  の生成子はすべて traceless であるので、電荷  $Q = T_3 + Y/2$  より、 $\bar{\mathbf{5}}$  表現の電荷を足し合わせると 0 にならなければならない。よって  $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})$  は  $\bar{d}$  であり、実際  $\bar{d}$  のカラー 3 つと  $(e_L^-, \nu_{eL})^T$  の電荷を足し合わせると

$$Q = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 + 0 = 0$$

となる。 $\mathbf{10}$  表現は  $\mathbf{5} \times \mathbf{5}$  の antisymmetric なものなので、 $\mathbf{5} = (\mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2})$  より、 $\mathbf{10}$  表現を  $SU(3)$  と  $SU(2)$  に分解すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{10} &= [\{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \times \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2})\}]_A \\ &= [(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \times (\mathbf{3}, \mathbf{1})]_A + (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \times (\mathbf{1}, \mathbf{2}) + [(\mathbf{1}, \mathbf{2}) \times (\mathbf{1}, \mathbf{2})]_A \\ &= (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}) + (\mathbf{3}, \mathbf{2}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる。 $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})$  表現に当てはまるのは残っている  $\bar{u}_R$  であり、 $(\mathbf{3}, \mathbf{2})$  表現に当てはまるのは  $(u_L, d_L)^T$  で、 $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$  表現には  $e_R^+$  である。

以上より同じ表現に quarks と leptons が存在するので、 $SU(5)$ GUT では陽子崩壊が起こる。実際、 $SU(5)$  の随伴表現である  $\mathbf{24}$  表現のゲージボソンを  $SU(3)_C \times [SU(2)_L \times U(1)_C]$  に分解すると、

$$\mathbf{24} = (\mathbf{8}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{3}, \mathbf{2}) + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}) \quad (3.2)$$

となり、quarks と leptons のゲージ相互作用を担う X, Y ゲージボソン  $(\mathbf{3}, \mathbf{2}), (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})$  を含む。

$SU(5)$ GUT における  $SU(3)_C \times [SU(2)_L \times U(1)_C]$  への自発的対称性の破れを考える。SM の場合と同じように考えると、 $SU(5)$  の随伴表現で変換する Higgs 場  $\Sigma^{ij}$  が真空期待値を取ることによって破れると考えられる。Higgs 場のポテンシャルを考えると、

$$V(\phi, \Sigma) = V_\phi(\phi) + V_\Sigma(\Sigma) + \lambda_4(\text{tr}\Sigma^2)h^\dagger\phi + \lambda_5\phi^{dag}\Sigma^2\phi \quad (3.3)$$

$$V_\Sigma = -m_1^2(\text{tr}\Sigma^2) + \lambda_1(\text{tr}\Sigma^2)^2 + \lambda_2(\text{tr}\Sigma^4) \quad (3.4)$$

$$V_\phi = -m_2^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda_3(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (3.5)$$

となる。このとき、 $\phi$  は SM において破れる Higgs 二重項の拡張

$$\phi^T = (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^+, \phi^0)$$

であり、SM における Higgs 二重項が下の 2 つの成分に対応している。このポテンシャルで  $SU(3)_C \times [SU(2)_L \times U(1)_C]$  交換するように真空期待値を取らなければならないので

$$\langle \Sigma \rangle = M \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3) \quad (3.6)$$

$$M^2 = \frac{m_1^2}{2(30\lambda_1 + 7\lambda_2)}$$

となる。この破れは X, Y ゲージボソンにオーダー  $M$  の質量を与えるので、陽子崩壊の寿命は  $M^4$  に比例して

$$\tau \sim \frac{M^4}{g_5^2 m_p^5}$$

となる。ここで  $g_5$  は  $SU(5)$ GUT における結合定数、 $m_p$  は陽子の質量である。



### 3.3 繰り込み群方程式と fermions の質量

相対論的な場の量子論において摂動展開しようとしても発散してしまうことがある。これはループの運動量積分の範囲が0から無限大まであり、cut-offが無いためである。そこで繰り込み理論では、私たちが物理的に測定可能な量からこれらの無限をすべて除去することで計算するという方法である。

例えば、スカラー場  $\phi$  に対して4乗の相互作用を考える  $\phi^4$  theory の場合、2-loop の自己エネルギー  $\Sigma(p^2)$  は4次の発散をする。従って、 $\mu^2$  で Tatlor 展開すると発散項が2つ現れ、

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(\mu^2) + (p^2 - \mu^2)\Sigma'(\mu^2) + \tilde{\Sigma}(p^2) \quad (3.7)$$

として  $\Sigma(\mu^2)$  は4次の発散、 $\Sigma'(\mu^2)$  は log 発散する。一方  $\tilde{\Sigma}(p^2)$  は有限な項で、

$$\tilde{\Sigma}(\mu^2) = 0, \tilde{\Sigma}'(\mu^2) = 0$$

である。従って、2点関数  $i\Delta(p)$  は

$$i\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon} = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(\mu^2) - (p^2 - \mu^2)\Sigma'(\mu^2) - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon} \quad (3.8)$$

となる。ここで、 $\mu^2$  を

$$m^2 + \Sigma(\mu^2) = \mu^2$$

と置き換えると

$$i\Delta(p) = \frac{i}{(p^2 - \mu^2)[1 - \Sigma'(\mu^2)] - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon} \quad (3.9)$$

となり、 $\Delta(p^2)$  は  $p^2 = \mu^2$  で pole を持つ。従って  $\mu^2$  は physical mass と呼ばれ、裸の質量  $m^2$  の発散を  $\Sigma(\mu^2)$  の発散が打ち消して有限の質量を持った。これが質量の繰り込みである。さらに発散項  $\Sigma'(\mu^2)$  を取り除くために、 $\Sigma'(\mu^2)$  と  $\tilde{\Sigma}(p^2)$  が結合定数  $\lambda_0$  のオーダーを持つことから、繰り込み定数

$$Z_\phi = [1 - \Sigma'(\mu^2)]^{-1} = 1 + \Sigma'(\mu^2) + \mathcal{O}(\lambda_0^2) \quad (3.10)$$

によって

$$i\Delta(p) = \frac{iZ_\phi}{p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon} \quad (3.11)$$

とすることが出来る。よって、繰り込まれた場  $\phi$  を繰り込まれていない場  $\phi_0$  で

$$\phi = \sqrt{Z_\phi}\phi_0 \quad (3.12)$$

とすれば、繰り込まれた2点関数  $i\Delta_R(p)$  は

$$i\Delta_R(p) = \frac{i}{p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon} = Z_\phi^{-1}i\Delta(p) \quad (3.13)$$

となる。

n点関数の場合、繰り込まれていないn点関数  $G_0^{(n)}$  は  $\mu$  に依存していないことから

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_0^{(n)} = 0 \quad (3.14)$$

これに対して、繰り込まれた  $n$  点関数  $G^{(n)}$  は繰り込み定数  $Z(\phi_0 = \sqrt{Z}\phi)$  を使って

$$G^{(n)} = Z^{-n/2}G_0$$

と書けるので、

$$Z^{-n/2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{n/2}G^{(n)}) = 0 \quad (3.15)$$

である。さらに、 $n$  点関数が  $\mu$  と  $\lambda$  の関数として左辺を計算すると、

$$\begin{aligned} Z^{-n/2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{n/2}G^{(n)}) &= Z^{-n/2}\left(\mu\frac{\partial Z^{n/2}}{\partial\mu} + Z^{n/2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)G^{(n)} \\ &= Z^{-n/2}\left(\frac{n}{2}\mu Z^{n/2-1}\frac{\partial Z}{\partial\mu} + Z^{n/2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + Z^{n/2}\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)G^{(n)} \\ &= \left(-n\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z^{-1/2} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)G^{(n)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

となるので、

$$\beta(\lambda) = \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}, \gamma(\lambda) = -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z^{-1/2} \quad (3.17)$$

と置くと、

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + n\gamma(\lambda)\right)G^{(n)} = 0 \quad (3.18)$$

となる。このとき、 $\beta$  と  $\gamma$  が  $\mu$  を含んでいると次元をあわせることが出来ないので無次元量  $\lambda$  にのみ依存している。従って、結合定数  $\lambda$  は physical mass  $\mu$  によって変化することがわかる。このような  $\mu$  の変化による方程式を繰り込み群方程式 (Renormalization Group Equation)(RGE) と呼ばれ、 $\beta$  は結合定数の振る舞いを表している。

特に、非可換群によるゲージ場の場合、結合定数  $g$  の 1-loop での  $\beta(g)$  は

$$\beta = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}t_2(V) - \frac{4}{3}t_2(F) + \frac{1}{3}t_2(S)\right] \quad (3.19)$$

$$t_2(F)\delta^{ab} = \text{tr}(T^a(F)T^b(F))$$

$$t_2(S)\delta^{ab} = \text{tr}(T^a(S)T^b(S))$$

となる。ここで  $T^a(F)$  と  $T^a(V)$  はゲージ場と fermions, scalars との生成子。  $t_2(V)$  は随伴表現における 2 次の Casimir 演算子で、構造定数  $f^{abc}$  自体が随伴表現となるので

$$t_2(V)\delta^{ab} = f^{acd}f^{bcd}$$

となる。よって

$$\mu\frac{\partial g}{\partial\mu} = \beta(g) = -\frac{a}{16\pi^2}g^3 \quad (3.20)$$

と置きこの方程式を解くと

$$g^{-2}(\mu) = g^{-2}(\mu_0) - \frac{a}{8\pi^2}\ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \quad (3.21)$$

として結合定数のスケール依存性が分かる。

$SU(3), SU(2), U(1)$  の Gauge Coupling Constants  $g_3, g_2, g_1$  の場合、

$$a_3 = \frac{4}{3}n_G - 11 \quad (3.22)$$

$$a_2 = \frac{4}{3}n_G + \frac{1}{6}n_H - \frac{22}{3} \quad (3.23)$$

$$a_1 = \frac{4}{3}n_G + \frac{1}{10}n_H \quad (3.24)$$

$n_G$ :fermions の世代数、 $n_H$ :Higgs の数となる。

さらに、 $SU(5)$  にゲージ群が統一されることを考えてみる。SM において  $SU(3)_C$  と違い、 $SU(2)_L$  群と  $U(1)_Y$  群は独立した群ではないので、 $SU(5)$  に単に含まれる  $SU(2), U(1)$  に何かしらの関係性が必要になる。そこで  $SU(5)$  の生成子を見てみると、 $U(1)_Y$  の生成子  $Y/2$  と  $SU(2)_L$  の生成子  $T^3$  を

$$\frac{Y}{2} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\lambda_{24}}{2}, T^3 = \frac{\lambda_{23}}{2}$$

として含んでいることがわかる。これを踏まえると  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  の Gauge Coupling Constants  $g_L, g_Y$  と  $SU(5)$  に含まれるゲージ群  $U(2), U(1)$  の Gauge Coupling Constants  $g_2, g_1$  との間には

$$\begin{aligned} g_Y \frac{Y}{2} &= g_1 \frac{\lambda_{24}}{2}, g_L T^3 = g_2 \frac{\lambda_{23}}{2} \\ \rightarrow g_Y &= \sqrt{\frac{3}{5}} g_1, g_L = g_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

という関係がある。これを用いて Higgs が無い場合での 1-loop 補正でのエネルギースケール  $\mu$  による変化を求めると図 3.1 のようになる。これを見ると SM の Gauge Coupling Constants は  $\mu \simeq 10^{15}[\text{GeV}]$  あたりで

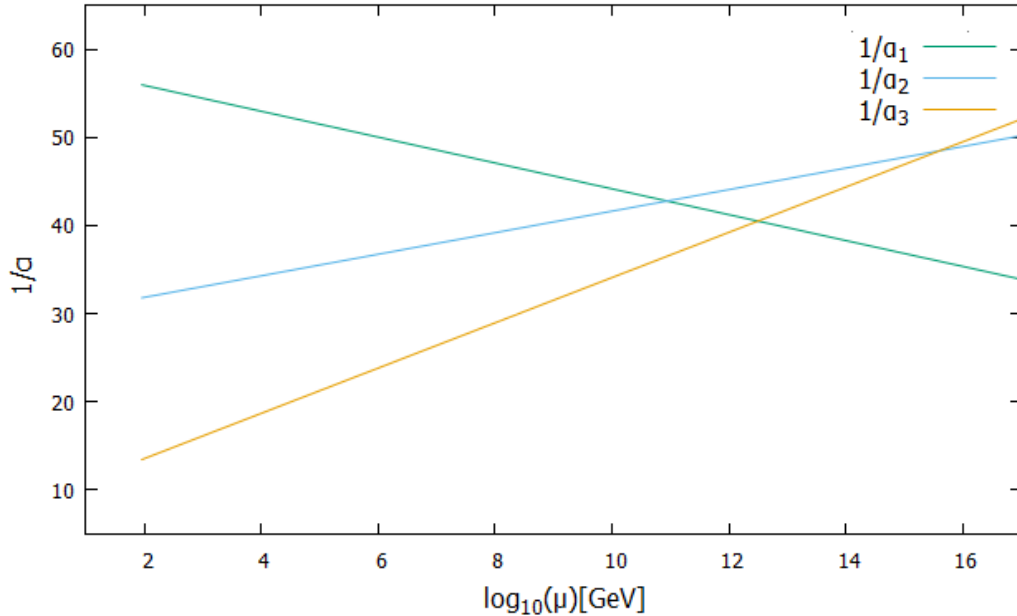


図 3.1 SO(10) GUT モデルの Gauge Coupling Constants の RG runnings。

$\alpha^{-1} \simeq 40$  に統一されることがわかる。

今回は fermions の質量も考えてみる。fermions の質量は湯川相互作用で与えられるので、 $SU(5)$  での Lagrangian は

$$-\mathcal{L}_{yukawa} = \frac{1}{8}\epsilon_5\psi_{10}Y_{10}\phi_H\psi_{10} + \psi_{10}Y_5\phi_H^*\overline{\psi_5} \quad (3.26)$$

となる。SM と同じように Higgs $\phi_H$  が真空期待値  $\langle\phi_H^i\rangle = \delta^{i5}\langle\phi_H^0\rangle$  を取ると、第一項目は

$$\frac{1}{8}\epsilon_5\psi_{10}Y_{10}\phi_H\psi_{10} \rightarrow Y_{10}\langle\phi_H^0\rangle (\psi_{10}^{34}\psi_{10}^{12} + \psi_{10}^{23}\psi_{10}^{41} + \psi_{10}^{12}\psi_{10}^{34}) \quad (3.27)$$

となる。10 表現の fermion である  $\psi_{10}$  の 12,23,34 成分は up type quarks なので、第一項目は up type quarks に質量を与える。一方、第二項目は

$$\psi_{10}Y_5\phi_H^*\overline{\psi_5} \rightarrow Y_5\langle\phi_H^0\rangle (\psi_{10}^{15}\overline{\psi_5}^{-1} + \psi_{10}^{25}\overline{\psi_5}^{-2} + \psi_{10}^{35}\overline{\psi_5}^{-3} + \psi_{10}^{45}\overline{\psi_5}^{-4}) \quad (3.28)$$

10 表現の fermion である  $\psi_{10}$  の 15,25,35,45 成分と 5 表現の fermion である  $\psi_5$  の 1,2,3,4 成分は down type quarks と e type leptons なので、第二項目は down type quarks と e type leptons に同じ質量を与える。従って  $SU(5)$  では tree level において GUT スケールで  $m_d = m_e$  となる。しかし Yukawa Couplings に対しても繰り込みを行うことが出来るので観測スケールでの fermions の質量を求めることが出来る。

### 3.4 $SU(5)$ GUT モデルの問題点

Georgi-Glashow  $SU(5)$  model では Weinberg 角は実験結果とよく合った。多くの問題点が見つかった。まず、 $SU(5)$  の基本群の中には右巻き neutrino がないので、右巻き neutrino を何か特別な手法で入れなければ neutrino の質量が説明できない。また、 $SU(5)$  では陽子の寿命は  $\mu \simeq 10^{15}[\text{GeV}], \alpha^{-1} \simeq 40$  より  $\tau \simeq 10^{30\sim 32}$  年となるが、カミオカンデの実験結果では陽子崩壊が観測されず、少なくとも  $10^{34}$  年はあるため合わない。さらに Yukawa Couplings の繰り込みを行うと、 $SU(5)$  では第二世代と第三世代では  $m_s = m_\mu, m_b = 3m_\tau$  となり実験とよく合う一方で、第一世代では  $m_d = 3m_e$  となってしまう実験と合致しない。

以上より単純な  $SU(5)$  モデルでは実験結果と合わず否定されている。しかし合うようにするためには  $SU(5)$  の他に一重項を加えたり、何か特別な機構を考えたりしなければならない。その内の一つとして有力視されているのが Super Symmetric(SUSY) である。 $SU(5)$  に SUSY を含めた場合はまだ完全には否定されていない。また、 $SU(5)$  以外の大きな群に SUSY を含めた GUT モデルは現在数多く議論されている。だが SUSY を含んでいない単純な群として実験で否定されていないものがある。なので、本研究ではその中でも  $SO(10)$  を用いたモデルについて考えてみる。

## 第 4 章

# $SO(10)$ GUT

### 4.1 $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$

$SU(5)$  と同じように  $SU(3)_C \times [SU(2)_L \times U(1)_Y]$  を含む、簡単な群を考えてみる。またその際、アノマリーがないように、右巻き neutrino も含めた 16 個すべてのフェルミ粒子が一つの表現で表せることが望ましい。そのような群として考えられたのが  $SO(10)$  群である。 $SO(10)$  群は 16 次元を基本表現としている。また、 $SO(10)$  ゲージ対称性を仮定すると B-L 対称性  $U(1)_{B-L}$  や Left-Right 対称性が自然に得られる。しかし、 $SO(10)$  から直接 SM に壊れるためには  $144_H$  でしか出来ず、特別な機構を課さなければ fermions の質量を実現できないので、中間状態を経由してから SM に破れる必要がある。また、SUSY を含めない場合は  $SU(5)$ -like な中間状態を経由するモデルも排除されている。従って  $SO(10)$  を破るためには、中間状態として  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  ゲージ対称性を経由する必要がある。そこでまず  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  ゲージ対称性について見ていく。

$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  ゲージ対称性では左巻きの quarks, leptons と同様に右巻きの neutrino も存在することで右巻き quarks, leptons も二重項を作る。さらに leptons を quarks のカラーの一つとして拡張する。それにより fermions は  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  において  $F = (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}), F^c = (\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}^*)$  表現として

$$F = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \nu \\ d_1 & d_2 & d_3 & e \end{pmatrix}, F^c = \begin{pmatrix} d_1^c & d_2^c & d_3^c & e^c \\ -u_1^c & -u_2^c & -u_3^c & -\nu^c \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

となる。すると SM の  $SU(3)_C$  対称性と新たに  $U(1)_{B-L}$  対称性を  $SU(4)_C$  は含む。また SM に破れるためには Higgs 場として

$$\Delta_L = (\bar{\mathbf{10}}, \mathbf{3}, \mathbf{1}), \Delta_R = (\bar{\mathbf{10}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}), \Phi = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}^*)$$

の 3 つが必要になる。まず  $SU(2)_L$  一重項である  $\Delta_R$  が真空期待値をもつことで、 $SU(4)_C$  に含まれる  $U(1)_{B-L}$  と  $SU(2)_R$  が  $U(1)_Y$  に破れ、 $SU(3)_C \times [SU(2)_L \times U(1)_Y]$  になる。その際右巻き neutrino に重い質量を与えると考えられている。また、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$  が  $U(1)_{QED}$  に破れる際の Higgs は  $SU(2)_L$  二重項である  $\Phi$  が成る。Higgs が真空期待値を持つことによって右巻き neutrino に重い質量を与える方法は seesaw メカニズムと呼ばれている。これにはいくつかのタイプが議論されている。

Type 1 seesaw メカニズム :

右巻き neutrino に対する Lagrangian が

$$\mathcal{L} = y_D \bar{l}_L \tilde{\Phi} \nu_R + \frac{1}{2} M_{R\nu} \nu_R^T C \nu_R + h.c. \quad (4.2)$$

であるとする。ここで

$$\nu_M = \nu_L + C\nu_L^T \quad (4.3)$$

$$N_M = \nu_R + C\nu_R^T \quad (4.4)$$

と置くと、

$$\bar{\nu}_M N_M = \bar{N}_M \nu_M$$

であるので、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_D (\bar{\nu}_M N_M + \bar{N}_M \nu_M) + \frac{1}{2} M_R \bar{N}_M N_M \quad (4.5)$$

$$m_D = y_D \langle \Phi^0 \rangle$$

となる。これにより質量行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

となる（上が  $\nu_M$  で下が  $N_M$ ）。このとき  $M_R \gg m_D$  の場合、固有値を求めると

$$M_N = M_R, M_\nu = -m_D^T \frac{1}{M_R} m_D \quad (4.7)$$

となり、右巻き neutrino の質量  $M_N$  に比べて左巻き neutrino の質量  $M_\nu$  が非常に小さくなる。

## 4.2 $SO(10)$ 群

$SO(10)$  群は  $10 \times 10$  の直交行列であって行列式が 1 のものであり、変換パラメータ  $\epsilon_{ij}$  と 45 個の複素生成子  $T_{ij}$  によって

$$O = \exp \frac{\epsilon_{ij}}{2} T_{ij} \quad (4.8)$$

と表せ、交換関係は

$$[T_{ij}, T_{kl}] = i(\delta_{ik} T_{jl} + \delta_{jl} T_{ik} - \delta_{il} T_{jk} - \delta_{jk} T_{il}) \quad (4.9)$$

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, 9, 0)$$

となる ( $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタ)。また  $D^5 = SO(10)$  群において  $SU(5)$  は正則であるが極大ではない。 $SO(10)$  の正則極大部代数は  $SO(6)$  と  $SO(4)$  であり、 $SO(6)$  は  $SU(4)$  と同じ代数、 $SO(4)$  は  $SU(2) \times SU(2)$  と同じ代数である。さらにこの  $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)'$  部分群の下で

$$D^5 \rightarrow (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$$

と分解され、複素共役表現  $\bar{D}^5$  は

$$\bar{D}^5 \rightarrow (\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}^*)$$

となり、 $SO(10)$  は SM を表すのにうまくいっているように思える。また、 $SO(N)$  は  $N > 6$  のときアノマリーが無い群となる。なので  $SO(6) = SU(4)$  はアノマリーがある一方で  $SO(10)$  はアノマリーが無い。

$SO(10)$  の生成子を見てみると、交換関係より同時に交換可能な生成子として

$$T_{12}, T_{34}, T_{56}, T_{78}, T_{90}$$

を選ぶことができる。また、 $SO(10) \supset SU(4) \times SU(6)$ であることをふまえて、 $SO(4)$ の生成子の分を  $i, j = 1, 2, 3, 4$ 、 $SO(6)$ の生成子の分を  $i, j = 5, 6, 7, 8, 9, 0$ とすれば、 $SO(10)$ において weak hypercharge  $Y$ と weak isospin  $T^3$ は

$$\frac{Y}{2} = T_R^3 + \sqrt{\frac{2}{3}}T_{B-L} = \frac{1}{2}(T_{12} - T_{34}) + \frac{1}{3}(T_{65} + T_{87} + T_{90}) \quad (4.10)$$

$$T^3 = T_L^3 = \frac{1}{2}(T_{12} + T_{34}) \quad (4.11)$$

という関係にあることがわかる。ここで  $T_R^3$ は  $SU(2)_R$ における weak isospin であり、 $T_{B-L}$ は  $U(1)_{B-L}$ の生成子でバリオン数と leptons 数の差

$$\sqrt{\frac{2}{3}}T_{B-L} = \frac{B-L}{2}$$

を出す。表現で見ると、 $SO(10)$ の随伴表現 **45**は  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ において

$$\mathbf{45} = (\mathbf{15}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad (4.12)$$

と分解され、 $(\mathbf{15}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ は gluon と leptiquarks( $\bar{q}$ と  $l$ の相互作用のボソン)、 $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$ は weak bosons、 $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ は superheavy weak bosons、 $(\mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ は diquarks と leptiquarks( $q$ と  $l$ の相互作用のボソン)である。

表 4.1  $SO(10)$ GUT における fermions の表現

	$SU(4)$	$T_L^3$	$T_R^3$	$B-L$
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	0	$+\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} d^c \\ -u^c \end{pmatrix}$	$\bar{4}$	0	$\begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix} e \\ -\nu^c \end{pmatrix}$		0	$\begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	$+\frac{1}{2}$

### 4.3 $SO(10)$ のSMへの破り方

$SO(10)$ GUT においても Higgs 場が真空期待値を取ることによって SM に自発的に破れることを考える。 $SO(10)$ が  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ に破れるためには 54次元の Higg と 210次元の Higgs の二種類のみが許される。

まず 54次元の Higgs 場で破る場合を考える。Higgs 場  $\phi$ は対称で traceless な  $10 \times 10$ 行列で表すことが出来、繰り込み可能な最も一般的な  $\phi$ のポテンシャルは

$$V(\phi) = \frac{a}{4}(Tr\phi^2)^2 + \frac{b}{2}Tr\phi^4 + \frac{c}{3}Tr\phi^3 - \frac{1}{2}\mu^2 Tr\phi^2 \quad (4.13)$$

となる。 $SO(10)$  ゲージ変換によって  $\phi$  は対角化でき

$$\phi = \text{diag}(y_1, \dots, y_{10})$$

$$\sum_i y_i = 0, y_i \in \mathbf{R}$$

と置くと、このポテンシャルが最小をとるとき  $y_i$  は 2 つの成分  $y$  と  $m$  によって

$$(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{10}) = y [m(10-m)10]^{\frac{1}{2}} (10-m, \dots, 10-m, -m, \dots, -m)$$

と表すことが出来る。よって条件は

$$\frac{dV}{dy} = (a + 2bS_4)y^3 - |c|S_3y^2 - \mu^2y = 0 \quad (4.14)$$

$$S_k = [m(10-m)10]^{-\frac{k}{2}} \{m(10-m)^k + (10-m)(-m)^k\}$$

となる。従って  $SO(4) \times SO(6)$  に破れるためには  $m = 4$  で最小値をとる必要があり条件を満たす  $\phi$  は、

$$\text{diag}(\phi) = \frac{y_{\min}}{4\sqrt{15}} (6, 6, 6, 6, -4, -4, -4, -4, -4, -4) \quad (4.15)$$

となる。さらに 54Higgs で  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  に破ると、D parity を持つ。 $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  においては右巻きも左巻きと同様な対称性を持つので、左巻きと右巻きの交換による離散的な対称性である  $Z_2$  対称性を考えることが出来る。 $Z_2$  対称性には  $Z_2^P$  と  $Z_2^C$  の二つあり

$$Z_2^P : \begin{cases} \psi_L \leftrightarrow \psi_R \\ \Delta_L \leftrightarrow \Delta_R \\ \phi \leftrightarrow \phi^\dagger \end{cases} \quad \text{and} \quad Z_2^C : \begin{cases} \psi_L \leftrightarrow \psi_L^c \\ \Delta_L \leftrightarrow \Delta_R^* \\ \phi \leftrightarrow \phi^T \end{cases} \quad (4.16)$$

と変換され、CP が保存している場合は同じ変換となる。そして  $Z_2^C$  はゲージ対称性に埋め込むことが出来るので、この対称性を D parity と呼ぶ。

一方 210 次元の Higgs で破る場合、Higgs 場は実で反対称な 4 階のテンソル  $\phi_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$  によって表現でき、そのポテンシャルは

$$V(\phi) = -\mu^2\Sigma_2 + \lambda\Sigma_3 + \gamma_1\Sigma_{41} + \gamma_2\Sigma_{42} + \gamma_3\Sigma_{43} + \gamma_4\Sigma_{44} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\equiv (\phi)^2 \\ \Sigma_3 &\equiv \phi_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\phi_{\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6}\phi_{\mu_5\mu_6\mu_1\mu_2} \\ \Sigma_{41} &\equiv (\Sigma_2)^2 \\ \Sigma_{42} &\equiv (\phi_{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_1}\phi_{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_2})^2 \\ \Sigma_{43} &\equiv \phi_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}\phi_{\mu_1\mu_2\nu_3\mu_4}\phi_{\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2}\phi_{\mu_3\mu_4\nu_3\mu_4} \\ \Sigma_{44} &\equiv \phi_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}\phi_{\mu_1\mu_2\nu_3\mu_4}\phi_{\mu_3\mu_4\nu_1\nu_3}\phi_{\mu_3\mu_4\nu_2\mu_4} \end{aligned}$$

となる。 $SO(10)$  が 210Higgs によって  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  に破れると、真空期待値は

$$\langle \phi_{i_1 i_2 i_3 i_4} \rangle = a$$

$((i_1, i_2, i_3, i_4) = (1, 2, 3, 4)$  の循環置換、それ以外は 0)。このときポテンシャルは最小値をとるので条件は

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_{i_1 i_2 i_3 i_4}} = 48(-\mu^2 + 4(12\gamma_1 + 3\gamma_2 + 2\gamma_3 + \gamma_4)a^2) = 0 \quad (4.18)$$



となる。また、210Higgs の場合、D parity の生成子  $D$  によって

$$D\phi_{i_1 i_2 i_3 i_4} D^\dagger = -\phi_{i_1 i_2 i_3 i_4} \quad (4.19)$$

となる。従って 54Higgs と違い、210Higgs で  $SO(10)$  ゲージ対称性を破った場合、D parity も一緒に破る。

54Higgs と 210Higgs の両方で  $SO(10)$  を  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  に破ることが出来るが、この二つでは統一のエネルギースケールが異なってくる。210Higgs の場合、 $SO(10)$  が  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  に破れるスケール  $\mu = M_{GUT}$  において gauge couplings  $g_{4C}, g_{2L}, g_{2R}$  が統一されるので、RGEs は

$$g_{GUT}^{-2} = g_{4C}^{-2}(\mu) - \frac{a_{4C}}{8\pi^2} \ln\left(\frac{M_{GUT}}{\mu}\right) \quad (4.20)$$

$$= g_{2L}^{-2}(\mu) - \frac{a_{2L}}{8\pi^2} \ln\left(\frac{M_{GUT}}{\mu}\right) \quad (4.21)$$

$$= g_{2R}^{-2}(\mu) - \frac{a_{2R}}{8\pi^2} \ln\left(\frac{M_{GUT}}{\mu}\right) \quad (4.22)$$

となる。また、 $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  が SM に破れるスケール  $\mu = M_I$  においては、 $g_{4C}, g_{2L}, g_{2R}$  と SM の gauge couplings  $g_3, g_2, g_1$  は結合条件により

$$g_1^{-2}(M_I) = \frac{3}{5}g_{2R}^{-2}(M_I) + \frac{2}{5}g_{4C}^{-2}(M_I) \quad (4.23)$$

$$g_2^{-2}(M_I) = g_{2L}^{-2}(M_I) \quad (4.24)$$

$$g_3^{-2}(M_I) = g_{4C}^{-2}(M_I) \quad (4.25)$$

という関係がある。一方 54Higgs の場合は  $SU(2)_L$  と  $SU(2)_R$  の gauge couplings が等しくなる。よって  $M_I < \mu < M_{GUT}$  において

$$g_{2L} = g_{2R} = g_{2LR} \quad (4.26)$$

となる。それにより統一スケールが 210Higgs と 54Higgs ではずれ、54Higgs の場合  $M_{GUT} \simeq 10^{15}$ [GeV] となり陽子崩壊の制限により矛盾する。なので 54Higgs で破る際には補正が必要となる。一方で 210Higgs の場合は  $M_{GUT} \simeq 10^{16}$ [GeV] となり補正をいれずとも矛盾しない。なので本研究では 210Higgs で破ることを考える。

#### 4.4 $SO(10)$ GUT における fermions の質量

EW スケールにおける fermions の質量は、エネルギースケールが GUT スケールから EW スケールまで落ちる際に対称性が自発的に破れることで、Higgs により質量が与えられる。よって GUT スケールにおいて、対称性を破る 210H の他に中間状態  $= SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  スケールにおいて存在する  $\Delta_L, \Delta_R, \Phi$  を含んでいることを必要とする。また、fermions の質量を求めるには、対称性が破れるスケールと Yukawa 相互作用の Lagrangian さえ分かればよい。そのため fermions の質量を求めるだけならば、Yukawa 相互作用を持つ Higgs の質量が分かれば、その他の Higgs の正確な選択はそれほど重要ではない。それでもそのような条件を満たす模型は無限にある。 $SO(10)$  の場合、基本表現である 16 次元の積は

$$\mathbf{16} \times \mathbf{16} = \mathbf{10}_S + \mathbf{120}_A + \mathbf{126}_S \quad (4.27)$$

$$\mathbf{16} \times \overline{\mathbf{16}} = \mathbf{1}_S + \mathbf{45}_A + \mathbf{210}_S \quad (4.28)$$

( $S$  は symmetric,  $A$  は antisymmetric な表現) となり、それぞれ Higgs の表現として考えることができる。また、それぞれの表現の積も考えると非常に多くの Higgs の可能性がある。

そこで本研究では、物理的に否定されていない模型の中で、最も少ない Yukawa Sector を考える Economic Yukawa Sector に着目した。それにより、SO(10)GUT が物理的に否定されない条件を知り SO(10)GUT が現実的であるか、そして GUT を表現する物理を模索することに繋がると思われる。

## 第 5 章

# Minimal Non-Supersymmetric $SO(10)$ GUT

### 5.1 Economic Yukawa Sector in $SO(10)$

$SO(10)$  の fermions の表現である 16 次元の積は式 (4.21) で表すように実対称な 10 次元表現、実反対称な 120 次元表現、複素反対称な 126 次元表現の 3 つの表現の和で表される。なので fermions に質量を与える Higgs の表現が 10, 120, 126 次元表現であるのが最も単純である。理論に 10H、120H、126H のうちの 1 つの Higgs フィールドしか存在しない場合、この単一の Higgs 場の湯川結合行列は  $SO(10)$  回転を使用して対角化することができるので、フレーバーミキシングはない。したがって、現実的なフェルミスペクトルのためには、少なくとも 2 つの Higgs 場が必要である。

使用されている場の 1 つは 126H でなければならない。なぜなら 126 次元表現を  $SU(4)_C \times SU(2)_C \times SU(2)_C$  に分解すると

$$\mathbf{126}_S = (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{10}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{15}, \mathbf{3}, \mathbf{2})$$

となり、 $\overline{\Delta}_L, \Delta_R$  がここに含まれていて、大きな Majorana 質量を右巻き neutrino に与えるためには  $\Delta_R$  が Yukawa Sector に含まれている必要がある。

理論に 1 つの 126Higgs 場を維持しながら第 2 の Higgs 場を追加して現実的なフェルミスペクトルを生成できるかどうかを考えてみる。

第 2 の Higgs 場が 126H である場合、GUT スケールでの質量関係が  $m_\tau = 3m_b, m_\mu = 3m_s, m_e = 3m_d$  となり観測値と一致しない。比  $m_\tau/m_b$  は、低エネルギー質量パラメータが RGE を使用して GUT スケールまで展開されるときに、GUT スケールで約 1.7 であることが分かる。この比は、右手の neutrino セクターと  $SU(4)$  のゲージボゾンから生じる中間スケールの閾値効果が含まれる範囲 (1.4 - 1.7) において、この比がより現実的であることがわかっている。2 つの閾値効果のそれぞれは、GUT スケールでの比  $m_\tau/m_b$  の減少を引き起こす。よって  $m_\tau = 3m_b$  は明らかに除外される。関係  $m_\mu = 3m_s$  はそれほど遠く離れていない。一方、 $m_e = 3m_d$  は 1 桁大きい。したがって、126H の 2 つのコピーからなる最小の Yukawa Sector は現実的ではない。また、1 つの 126H と 1 つの 120H を使う場合も fermions の質量を正確に再現することはできない Ref[]。このモデルは GUT スケール質量比  $m_\tau/m_b \simeq 3$  を予測する。

2 番目の Higgs 場が 10H の場合、10 次元表現は

$$\mathbf{10}_S = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) + (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$$

となり  $\Phi$  がここに含まれている。 $\Phi$  は

$$\Phi^* = \tau_2 \Phi \tau_2 \leftrightarrow \Phi = \begin{pmatrix} \phi_0 & \phi^+ \\ -\phi^- & \phi_0^* \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

と書くことが出来、(1,1) 要素と (2,2) 要素は独立しているの、それぞれの真空期待値を  $v_u, v_d$  で表すと、 $v_u$  は up type quarks と Dirac neutrino、 $v_d$  は down type quarks と荷電 leptons に質量を与える。しかし実対称な 10H の場合、GUT スケールで  $r = |v_u/v_d| = 1$  なので t quark と b quark の間の大きな分割を達成することが出来ない。そこで two-Higgs-doublet model(2HDM) を用いて破ることを考える。2HDM では Higgs ポテンシャル

$$V = \lambda_1(\phi_1^\dagger\phi_1) + \lambda_2(\phi_2^\dagger\phi_2) \quad (5.2)$$

を用いる。このポテンシャルが中間スケールにおいて最小値を持つことで対称性が破れる。この場合 SM スケールでの Lagrangian は

$$-\mathcal{L}_{yukawa}^{SM} = Y_u \bar{q}_L \phi_2 u_R + Y_d \bar{q}_L \phi_1 d_R + Y_e \bar{l}_L \phi_1 e_R \quad (5.3)$$

となり up type と down type で異なった真空期待値をとるため現実的なフェルミスペクトルを表現できる。

従って、現在 fermions に質量を与える場として 10H と 126H の二つを考えるこのモデルが最も minimal な  $SO(10)$ GUT である。つまり Lagrangian は

$$-\mathcal{L}_{yukawa}^{GUT} = 16_F (Y^{10} 10_H + Y^{126} \overline{126}_H) 16_F \quad (5.4)$$

(flavor 空間で  $Y^{10}$  は  $3 \times 3$  実対角行列、 $Y^{126}$  は複素対称行列) となる。本研究では 1-loop d でこのモデルで fermions の質量を計算してみたい。

## 5.2 RGEs for Gauge Coupling Constants

まず、gauge coupling constants のスケール依存性を求めてみる。このモデルでの 1-loop での関数  $\beta(g_i)$  の式 (3.20) の定数  $a_i$  は

$$(a_{4C}, a_{2L}, a_{2R}) = \left( -\frac{7}{3}, 2, \frac{26}{3} \right) \quad (5.5)$$

$$(a_3, a_2, a_1) = \left( -7, -3, \frac{21}{5} \right) \quad (5.6)$$

となる。さらに 210Higgs によって  $SO(10)$ GUT を破るので、境界条件は式 (4.17)-(4.19) および

$$g_{GUT} = g_{4C}(M_{GUT}) = g_{2L}(M_{GUT}) = g_{2R}(M_{GUT}) \quad (5.7)$$

となる。

実験データより  $\mu = M_Z = 9.1876(\pm 0.0021)[\text{GeV}]$  において SM の gauge coupling constants は

$$g_1(M_Z) = 0.463(\pm 0.001)$$

$$g_2(M_Z) = 0.654(\pm 0.001)$$

$$g_3(M_Z) = 1.220(\pm 0.003)$$

であるので、best fit における gauge coupling constants のスケール依存性は次のようになった。

## 5.3 RGEs from $M_{GUT}$ to $M_I$

GUT スケールの Lagrangian(式 (5.4)) は、 $\mu = M_{GUT}$  で中間状態に破れることで

$$-\mathcal{L}_{yukawa}^{10+\overline{126}} = Y_F^{(10)} \bar{F}_L \Phi F_R + Y_F^{(126)} \bar{F}_L \Sigma F_R + Y_R^{(126)} F_R^T C F_R \overline{\Delta}_R \quad (5.8)$$

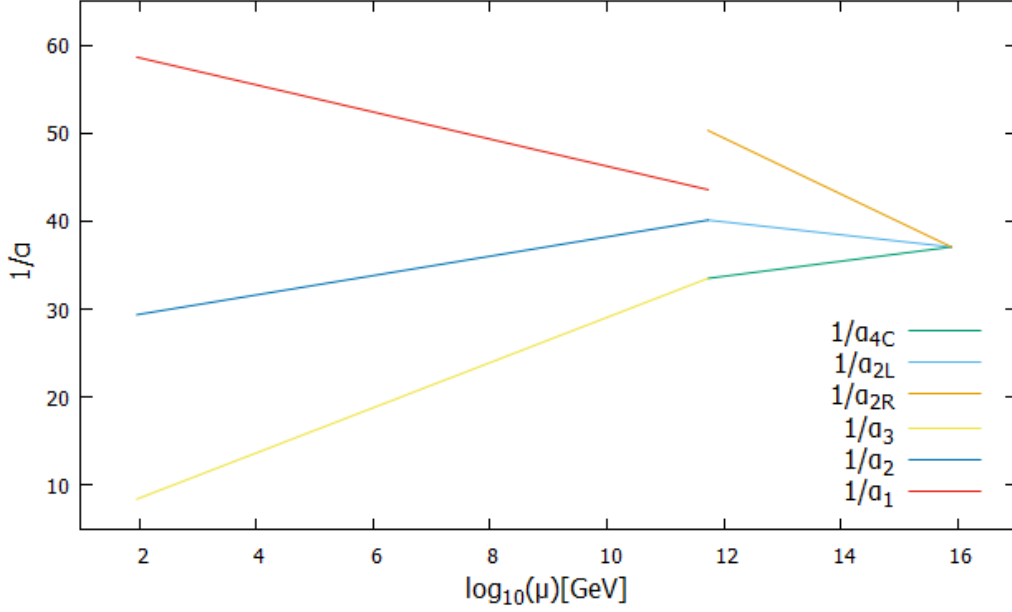


図 5.1 Non SUSY Minimal SO(10) GUT モデルの Gauge Coupling Constants の RG runnings.

となる。ここで、 $F_L = (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ ,  $F_R = (\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ ,  $\Phi = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ ,  $\Sigma = (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ ,  $\overline{\Delta}_R = (\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$  であり、境界条件より結合定数  $Y_F^{(10)}$ ,  $Y_F^{(126)}$ ,  $Y_R^{(126)}$  は  $\mu = M_{GUT}$  で

$$\frac{1}{\sqrt{2}} Y_F^{(10)}(M_{GUT}) \equiv Y^{(10)}(M_{GUT}) \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} Y_F^{(126)}(M_{GUT}) = \frac{1}{4} Y_R^{(126)}(M_{GUT}) \equiv Y^{(126)}(M_{GUT}) \quad (5.10)$$

である。また、 $M_I < \mu < M_{GUT}$  における 1-loop RGEs は以下ようになる。

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{dY_F^{(10)}}{dt} &= \left( Y_F^{(10)} Y_F^{(10)\dagger} + \frac{15}{4} Y_F^{(126)} Y_F^{(126)\dagger} \right) Y_F^{(126)} \\ &+ Y_F^{(126)} \left\{ Y_F^{(10)\dagger} Y_F^{(10)} + \frac{15}{4} \left( Y_F^{(126)\dagger} Y_F^{(126)} + 2Y_R^{(126)*} Y_R^{(126)} \right) \right\} \\ &+ 4Tr \left( Y_F^{(10)} Y_F^{(10)\dagger} \right) Y_F^{(10)} - \frac{9}{4} (g_{2L}^2 + g_{2R}^2 + 5g_{4C}^2) Y_F^{(10)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{dY_F^{(126)}}{dt} &= \left( Y_F^{(10)} Y_F^{(10)\dagger} + \frac{15}{4} Y_F^{(126)} Y_F^{(126)\dagger} \right) Y_F^{(10)} \\ &+ Y_F^{(10)} \left\{ Y_F^{(10)\dagger} Y_F^{(10)} + \frac{15}{4} \left( Y_F^{(126)\dagger} Y_F^{(126)} + 2Y_R^{(126)*} Y_R^{(126)} \right) \right\} \\ &+ Tr \left( Y_F^{(126)} Y_F^{(126)\dagger} \right) Y_F^{(126)} - \frac{9}{4} (g_{2L}^2 + g_{2R}^2 + 5g_{4C}^2) Y_F^{(126)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{dY_R^{(126)}}{dt} &= \left\{ Y_F^{(10)T} Y_F^{(10)*} + \frac{15}{4} \left( Y_F^{(126)T} Y_F^{(126)*} + 2Y_R^{(126)} Y_R^{(126)*} \right) \right\} Y_R^{(126)} \\ &+ Y_R^{(126)} \left\{ Y_F^{(10)\dagger} Y_F^{(10)} + \frac{15}{4} \left( Y_F^{(126)\dagger} Y_F^{(126)} + 2Y_R^{(126)*} Y_R^{(126)} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$+ 2Tr \left( Y_R^{(126)} Y_R^{(126)*} \right) Y_R^{(126)} - \frac{9}{4} (2g_{2R}^2 + 5g_{4C}^2) Y_R^{(126)} \quad (5.13)$$

それぞれの RGEs における最初の 3 項は fermion 場  $F_L, F_R$  の自己エネルギーから生じる。 $Y_R^{(126)}$  の項だけ異なるのは、 $Y_R^{(126)}$  の Lagrangian 項

$$Y_R^{(126)} F_R^T C F_R \overline{\Delta_R}$$

を見て分かるように、 $\overline{\Delta_R}$  が  $F_L$  と couple しない為である。また、trace の項は scalars の自己エネルギーへ寄与される fermion-loop から来る。最後の項は gauge couplings から来る項で、 $\overline{\Delta_R}$  は  $F_L$  と couple しないので  $Y_R^{(126)}$  は  $g_{2L}$  の項がない。

## 5.4 RGEs from $M_I$ to $M_Z$

中間状態の Lagrangian(式 (5.8)) は、 $\mu = M_I$  で SM に破れることで式 (5.3) になる。また、境界条件より結合定数  $Y_u, Y_d, Y_e$  は  $\mu = M_I$  で

$$Y_u(M_I) \equiv Y_F^{(10)}(M_I) + \frac{v_u}{4k_u} Y_F^{(126)}(M_I) \quad (5.14)$$

$$Y_d(M_I) \equiv Y_F^{(10)}(M_I) + \frac{v_d}{4k_d} Y_F^{(126)}(M_I) \quad (5.15)$$

$$Y_e(M_I) \equiv Y_F^{(10)}(M_I) - \frac{3v_d}{4k_d} Y_F^{(126)}(M_I) \quad (5.16)$$

となる。ここで、 $k_{u,d} \equiv \langle \Phi_{u,d} \rangle, v_{u,d} \equiv \langle \Sigma_{u,d} \rangle$  である。従って、 $M_Z < \mu < M_I$  における 1-loop RGEs は以下のようになる。

$$16\pi^2 \frac{dY_u}{dt} = 3Tr(Y_u Y_u^\dagger) Y_u - \left( 8g_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{17}{20}g_1^2 \right) Y_u + Y_u Y_u^\dagger Y_u + \frac{1}{2} Y_u (Y_u^\dagger Y_u + Y_d^\dagger Y_d) \quad (5.17)$$

$$16\pi^2 \frac{dY_d}{dt} = \left\{ 3Tr(Y_d Y_d^\dagger) + Tr(Y_e Y_e^\dagger) \right\} Y_d - \left( 8g_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{1}{4}g_1^2 \right) Y_d + Y_d Y_d^\dagger Y_d + \frac{1}{2} Y_d (Y_u^\dagger Y_u + Y_d^\dagger Y_d) \quad (5.18)$$

$$16\pi^2 \frac{dY_e}{dt} = \left\{ 3Tr(Y_d Y_d^\dagger) + Tr(Y_e Y_e^\dagger) \right\} Y_e - \left( \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{9}{4}g_1^2 \right) Y_e + \frac{3}{2} Y_e Y_e^\dagger Y_e \quad (5.19)$$

となる。また、Higgs の self couplings  $\lambda_1, \lambda_2$  は  $\mu = M_I$  では  $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$  であるが、 $M_Z < \mu < M_I$  では繰り込まれ、1-loop RGEs は

$$16\pi^2 \frac{d\lambda_1}{dt} = 24\lambda_1^2 - \left( 9g_2^2 + \frac{9}{5}g_1^2 \right) \lambda_1 + \frac{9}{8}g_2^4 + \frac{9}{20}g_2^2 g_1^2 + \frac{27}{200}g_1^4 + 12Tr(Y_u Y_u^\dagger) \lambda_1 - 6Tr(Y_u Y_u^\dagger Y_u Y_u^\dagger) \quad (5.20)$$

$$16\pi^2 \frac{d\lambda_2}{dt} = 24\lambda_2^2 - \left( 9g_2^2 + \frac{9}{5}g_1^2 \right) \lambda_2 + \frac{9}{8}g_2^4 + \frac{9}{20}g_2^2 g_1^2 + \frac{27}{200}g_1^4 + 4Tr(Y_e Y_e^\dagger + 3Y_d Y_d^\dagger) \lambda_2 - 2Tr(Y_e Y_e^\dagger Y_e Y_e^\dagger) - 6Tr(Y_d Y_d^\dagger Y_d Y_d^\dagger) \quad (5.21)$$

となる。これより up,down type quarks と e type leptons の質量行列は

$$M_u = Y_u \frac{k_u}{\sqrt{2}} \quad (5.22)$$

$$M_d = Y_d \frac{k_d}{\sqrt{2}} \quad (5.23)$$

$$M_e = Y_e \frac{k_d}{\sqrt{2}} \quad (5.24)$$

となる。また neutrino の質量行列は Type 1 see saw メカニズムより  $\mu = M_I$  で

$$M_\nu = m_D^T \frac{1}{M_R} m_D \equiv \frac{k_u^2 \kappa}{2} \quad (5.25)$$

$$M_R \equiv \frac{1}{4} \langle \overline{\Delta_R} \rangle Y_R^{(126)}, \quad m_D = \frac{k_u}{\sqrt{2}} \left( Y_F^{(10)}(M_I) - \frac{3v_u}{4k_u} Y_F^{(126)}(M_I) \right)$$

となる。従ってこれもまた繰り込まれるので、 $M_Z < \mu < M_I$  における  $\kappa$  の 1-loop RGE は

$$16\pi^2 \frac{d\kappa}{dt} = -3g_2^2 \kappa + 4\lambda_2 \kappa + 6Tr(Y_d Y_d^\dagger) \kappa + 2Tr(Y_e Y_e^\dagger) \kappa - \frac{3}{2} (\kappa Y_e^\dagger Y_e + Y_e^T Y_e^* \kappa) \quad (5.26)$$

となる。

## 5.5 モデルパラメータ

質量行列を求めることで 17 個の実験による観測値と比べてみる。その場合このモデルにおいては 21 個の free parameters がある。まず Yukawa couplings  $Y^{(10)}(M_{GUT}), Y^{(126)}(M_{GUT})$  はそれぞれ  $3 \times 3$  の実対角行列と複素対称行列なので 15 個の free parameters がある。また、真空期待値  $k_{u,d}, v_{u,d}$  は 5 個の free parameters である。なぜなら、実験により 10Higgs の真空期待値  $|\langle \Phi \rangle| = \sqrt{k_u^2 + k_d^2} = 246[\text{GeV}]$  であることが分かっているので  $r_v = k_u/k_d$  として free parameters を 1 個にでき、 $v_u, v_d$  は複素数の parameter だからである。また、Higgs の self coupling  $\lambda$  は実 parameter として選べる。

一方で、 $\overline{\Delta_R}$  を見てみると neutrino の質量にのみ依存していることが分かる (階層性にも依存していない)。従って neutrino の質量が合うようにあとであわせる。

この元で実験結果 (表 5.1) に合うパラメータをカイ 2 乗検定で見つける。カイ 2 乗検定とは

$$\chi^2 = \sum_i \chi_i^2 = \sum_i \left( \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i^{exp}} \right)^2 \quad (5.27)$$

( $X_i$  は観測値,  $\sigma_i^{exp}$  は観測誤差) で表される  $\chi^2$  が最小となるような計算結果  $\mu_i$  を出すパラメータを見つける方法である。

表 5.1 物理量の観測値

Quark sector			Lepton sector		
Observable	$X_i$	$\sigma_i^{exp}$	Observable	$X_i$	$\sigma_i^{exp}$
$m_u$ [GeV]	$1.27 \times 10^{-3}$	$4.6 \times 10^{-4}$	$m_e$ [GeV]	$4.87 \times 10^{-4}$	$2.43 \times 10^{-5}$
$m_c$ [GeV]	$6.19 \times 10^{-1}$	$8.4 \times 10^{-2}$	$m_\mu$ [GeV]	$1.03 \times 10^{-1}$	$5.14 \times 10^{-3}$
$m_t$ [GeV]	$1.72 \times 10^2$	3	$m_\tau$ [GeV]	1.75	$8.73 \times 10^{-2}$
$m_d$ [GeV]	$2.90 \times 10^{-3}$	$1.22 \times 10^{-3}$	$r \equiv \Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2$	$3 \times 10^{-2}$	$3 \times 10^{-3}$
$m_s$ [GeV]	$5.50 \times 10^{-2}$	$1.55 \times 10^{-2}$	$\sin^2 \theta_{12}^l$	$3.06 \times 10^{-1}$	$1.2 \times 10^{-2}$
$m_b$ [GeV]	2.89	$9 \times 10^{-2}$	$\sin^2 \theta_{13}^l$	$2.17 \times 10^{-2}$	$7.5 \times 10^{-4}$
$\sin \theta_{12}^q$	$2.25 \times 10^{-1}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$\sin^2 \theta_{23}^l$	$4.41 \times 10^{-1}$	$2.7 \times 10^{-2}$
$\sin \theta_{13}^q$	$3.5 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-4}$			
$\sin \theta_{23}^q$	$4.2 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-3}$			
$\delta_{CKM}(\pi)$	$3.88 \times 10^{-1}$	$1.83 \times 10^{-2}$			



## 第 6 章

# 解析

### 6.1 先行研究と neutrino 実験の問題点

先行研究 [8] によると、2-loop で fitting すると以下のモデルパラメータの元で  $\chi^2 \simeq 8.93$  の best fit した (有効数字 3 桁)。このとき neutrino の質量階層性は Normal Ordering であった。

$$h = \begin{pmatrix} 2.21 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & -1.65 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -0.508 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

$$f = \begin{pmatrix} 3.99 \cdot 10^{-6} - 2.31 \cdot 10^{-5}i & 5.74 \cdot 10^{-6} + 1.32 \cdot 10^{-4}i & -1.55 \cdot 10^{-2} - 4.10 \cdot 10^{-2}i \\ 5.74 \cdot 10^{-6} + 1.32 \cdot 10^{-4}i & 8.08 \cdot 10^{-7} + 4.59 \cdot 10^{-4}i & -0.154 + 6.25 \cdot 10^{-5}i \\ -1.55 \cdot 10^{-2} - 4.10 \cdot 10^{-2}i & -0.154 + 6.25 \cdot 10^{-5}i & -6.89 \cdot 10^{-2} - 7.58 \cdot 10^{-5}i \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$(h \equiv Y^{(10)}(M_{GUT}), f \equiv Y^{(126)}(M_{GUT}))$$

$$r_v = 55.1[GeV], v_u = 7.95[GeV], v_d = (0.512 + 1.01i)[GeV] \quad (6.3)$$

$$\lambda = 2.88 \times 10^{-2} \quad (6.4)$$

しかしながら  $\sin^2 \theta_{23}^l$  の観測値には問題点がある。現在のデータ (Nov, 2017) によると Normal Ordering における  $\sin^2 \theta_{23}^l$  の best fit の値は表 5.1 のとおりである。しかし、これはすべての実験結果を統合した global fit での値である。最新の neutrino 実験である NOvA 実験と T2K 実験では  $2\sigma$  以上のずれがあり、

$$NOvA : \sin^2 \theta_{23}^l = 0.404$$

$$T2K : \sin^2 \theta_{23}^l = 0.534$$

となっていることで論議を呼んだ。しかしながらごく最近の研究で NOvA 実験での許容範囲が 0.5 を含むようになってきた (January 2018 Wine and Cheese at Fermilab Alex Radovic)。

そこで本研究では NOvA 実験と T2K 実験での値を用いた場合でモデルの best fit がどのように変化するか調べることを試みる。しかしながら先行研究と同様に 2-loop 補正ですべてのモデルパラメータを同時に振ってカイ 2 乗検定を行うことは非常に困難である。従って本研究では 1-loop 補正でのみ計算をし、また、モデルパラメータを先行研究の best fit 付近で別々に振って、パラメータの微小変化が計算結果にどのような影響を受けるのか見てみる。

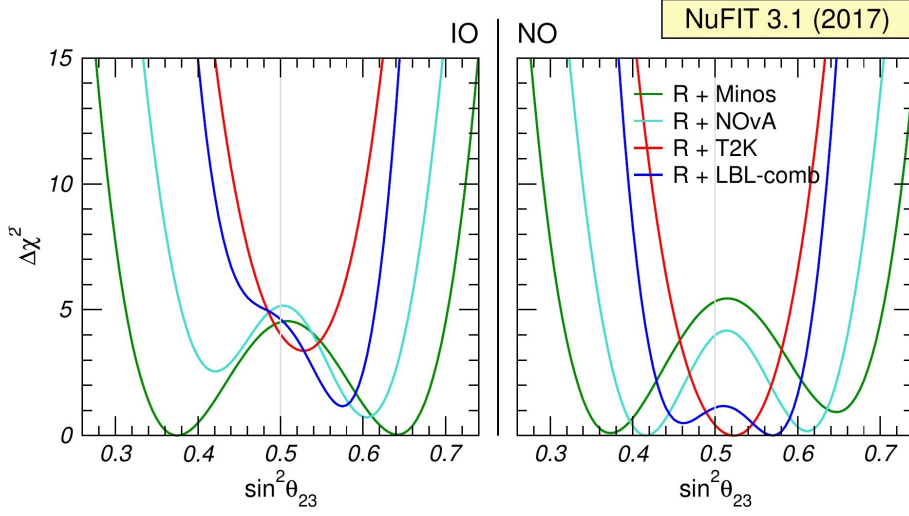


図 6.1 右 : Normal Ordering と左 : Inverted Ordering における  $\sin^2 \theta_{23}^l$  の実験結果

## 6.2 Best fit とその解析

まず global fit での値を用いて先行研究のモデルパラメータで 1-loop での RGEs を行い、そのときの物理量を解析してみる。すると表 6.1 のようになった。

表 6.1 物理量の計算結果

Quark sector			Lepton sector		
Observable	$\mu_i$	$\chi_i^2$	Observable	$\mu_i$	$\chi_i^2$
$m_u$ [GeV]	$1.34 \times 10^{-3}$	$2.23 \times 10^{-2}$	$m_e$ [GeV]	$4.78 \times 10^{-4}$	$1.46 \times 10^{-1}$
$m_c$ [GeV]	$7.02 \times 10^{-1}$	$9.75 \times 10^{-1}$	$m_\mu$ [GeV]	$1.03 \times 10^{-1}$	$5.65 \times 10^{-3}$
$m_t$ [GeV]	$1.71 \times 10^2$	$1.69 \times 10^{-1}$	$m_\tau$ [GeV]	1.61	2.58
$m_d$ [GeV]	$1.14 \times 10^{-3}$	2.09	$r \equiv \Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2$	$7.09 \times 10^{-2}$	$1.86 \times 10^2$
$m_s$ [GeV]	$3.26 \times 10^{-2}$	2.09	$\sin^2 \theta_{12}^l$	$2.42 \times 10^{-1}$	$2.80 \times 10$
$m_b$ [GeV]	2.98	$9.91 \times 10^{-1}$	$\sin^2 \theta_{13}^l$	$9.73 \times 10^{-2}$	$1.02 \times 10^4$
$\sin \theta_{12}^q$	$2.40 \times 10^{-1}$	$1.74 \times 10^2$	$\sin^2 \theta_{23}^l$	$3.32 \times 10^{-1}$	$1.63 \times 10$
$\sin \theta_{13}^q$	$2.53 \times 10^{-2}$	$5.27 \times 10^3$			
$\sin \theta_{23}^q$	$7.36 \times 10^{-2}$	$5.91 \times 10^2$			
$\delta_{CKM}(\pi)$	$3.01 \times 10^{-1}$	$2.26 \times 10$			

また、そのときのエネルギースケール  $\mu$  依存性は以下ようになった。

u-type および b quark, e,  $\mu$  lepton の質量が非常に良く fit しているのが見て取れる。また、d, s quark,  $\tau$  lepton の質量の誤差は小さい。しかしながら CKM 行列,  $r$ , MNS 行列の誤差は非常に大きくなってしまった。その原因としてまず考えなければならないのが、パラメータの有効数字を 3 桁にしたことによる誤差である。

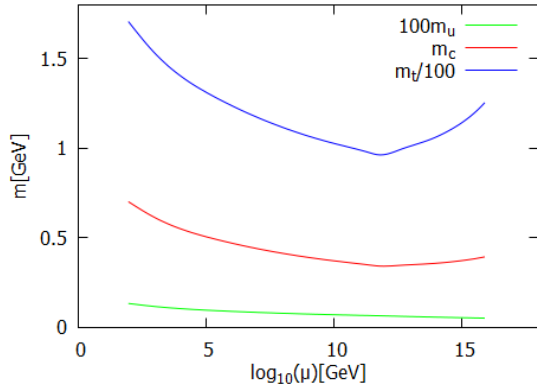


図 6.2 u,c,t の質量の RG runnings。

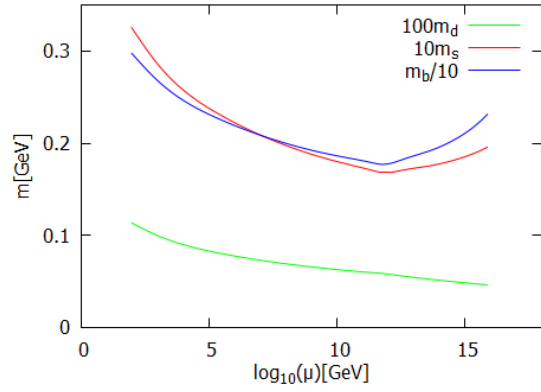


図 6.3 d,s,b の質量の RG runnings。

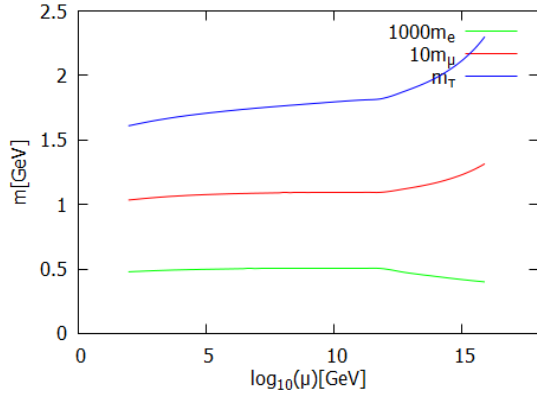


図 6.4 e,μ,τ の質量の RG runnings。

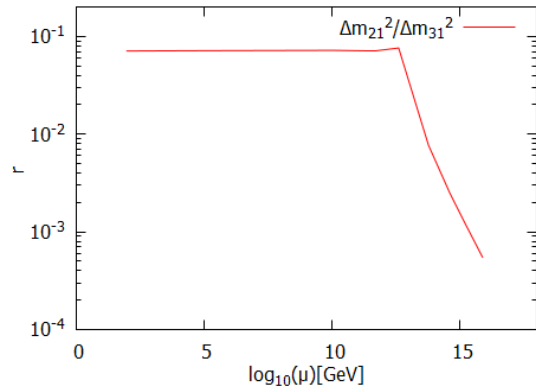


図 6.5 質量固有状態の neutrino の質量の 2 乗差の比  $r = \Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2$  の RG runnings。

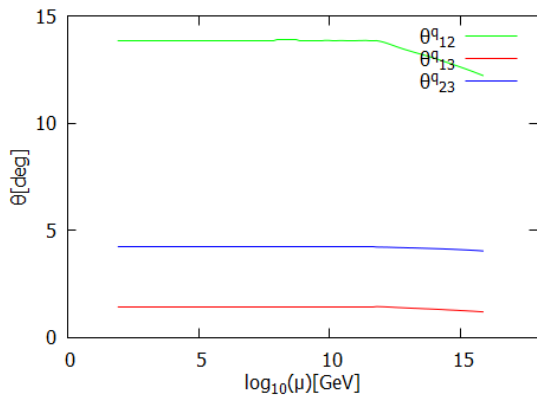


図 6.6 CKM 行列の角度パラメータの RG runnings。

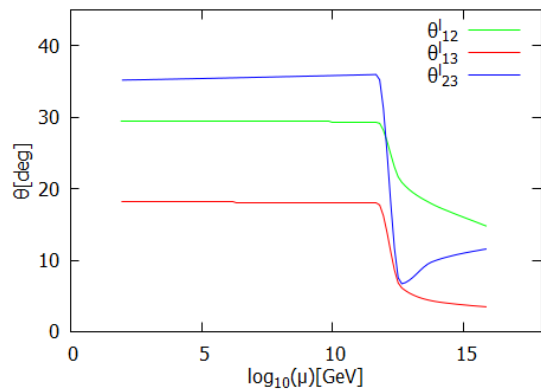


図 6.7 MNS 行列の角度パラメータの RG runnings。

なので  $\mu = M_{GUT}$  における Yukawa Couplings  $Y_{GUT}^{10}, Y_{GUT}^{126}$  のパラメータ  $h, f$  の有効数字を 3 桁に落としたことによる計算結果からのそれぞれのカイ 2 乗誤差  $\chi_i'^2$  の最大値を計算してみると表 6.2 のようになった。

表 6.2 h, f の誤差による影響

Quark sector			Lepton sector		
Observable	$\chi_i'^2$	$\chi_i^2$	Observable	$\chi_i'^2$	$\chi_i^2$
$m_u$ [GeV]	$1.02 \times 10^{-3}$	$2.23 \times 10^{-2}$	$m_e$ [GeV]	$8.02 \times 10^{-2}$	$1.46 \times 10^{-1}$
$m_c$ [GeV]	$1.70 \times 10^{-3}$	$9.75 \times 10^{-1}$	$m_\mu$ [GeV]	$3.04 \times 10^{-2}$	$5.65 \times 10^{-3}$
$m_t$ [GeV]	$1.82 \times 10^{-2}$	$1.69 \times 10^{-1}$	$m_\tau$ [GeV]	$2.74 \times 10^{-4}$	2.58
$m_d$ [GeV]	$1.12 \times 10^{-4}$	2.09	$r \equiv \Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2$	$1.52 \times 10^2$	$1.86 \times 10^2$
$m_s$ [GeV]	$9.76 \times 10^{-5}$	2.09	$\sin^2 \theta_{12}^l$	1.16	$2.80 \times 10$
$m_b$ [GeV]	$1.26 \times 10^{-3}$	$9.91 \times 10^{-1}$	$\sin^2 \theta_{13}^l$	$6.63 \times 10^2$	$1.02 \times 10^4$
$\sin \theta_{12}^q$	1.38	$1.74 \times 10^2$	$\sin^2 \theta_{23}^l$	$8.95 \times 10^{-1}$	$1.63 \times 10$
$\sin \theta_{13}^q$	$6.80 \times 10^{-2}$	$5.27 \times 10^3$			
$\sin \theta_{23}^q$	$4.22 \times 10^{-2}$	$5.91 \times 10^2$			
$\delta_{CKM}(\pi)$	$3.83 \times 10^{-4}$	$2.26 \times 10$			

これを見ると  $r$  の計算結果からの誤差は計算結果の実験値の誤差に匹敵するので、 $r$  の誤差は有効数字を落としたことによる誤差の影響が大きいと考えられる。一方で CKM 行列のパラメータは Yukawa Couplings の誤差の影響がほとんどないことが分かる。よって原因として考えられるのは他のパラメータによる誤差か、もしくは 2-loop による影響が大きいためではと考えられる。そこで今度は他のパラメータを変化させた時にどうなるかを見てみる。

まず  $\lambda$  を変化させた場合を見てみるが、 $\lambda$  の微小な変化による  $\chi^2$  の変化は見られなかった。これは 1-loop において  $\lambda_{1,2}$  が直接影響を及ぼすのは式 (5.26) のみであり、そして  $g_2^2 > 0.3$  であるため  $\lambda \sim 10^{-2}$  では影響が小さいためである。

そこで真空期待値のパラメータ  $r_v, v_u, v_d$  を変化させるとどうなるか見てみる。まず、 $r_v = k_u/k_d$  を  $r_v > 1$  で変化させるとどうなるか見てみると以下ようになった。

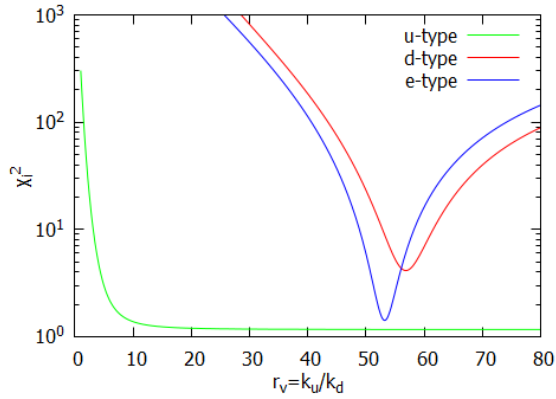


図 6.8  $r_v = k_u/k_d$  を変化させたときの u,d,e-type の  $\chi^2$

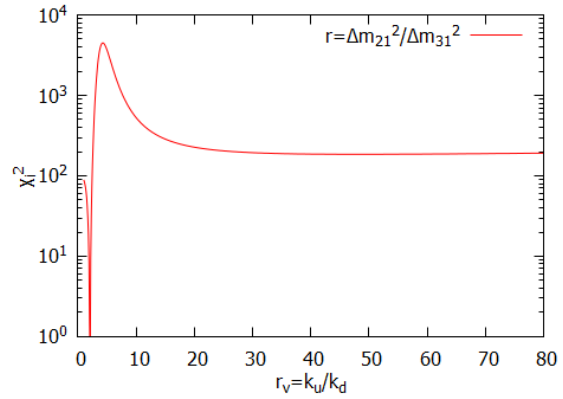


図 6.9  $r_v = k_u/k_d$  を変化させたときの  $r = \Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2$  の  $\chi^2$

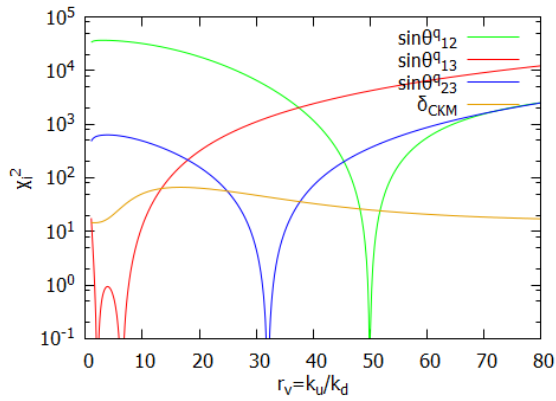


図 6.10  $r_v = k_u/k_d$  を変化させたときの CKM の  $\chi^2$

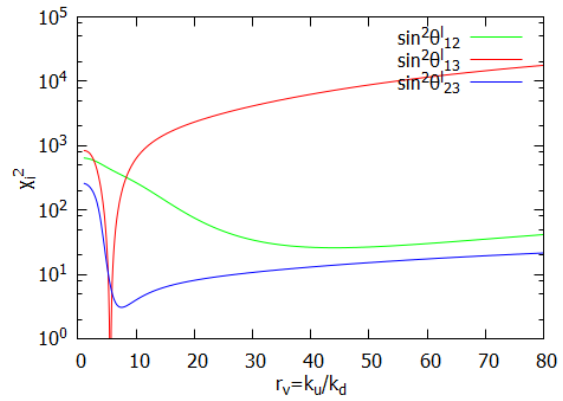


図 6.11  $r_v = k_u/k_d$  を変化させたときの MNS の  $\chi^2$

これを見ると、 $r, \delta_{CKM}$  は  $r_v$  による影響がほとんど無い。また MNS のパラメータは  $r_v = 55.1[\text{GeV}]$  付近では変化が無い。大きく影響を受けるのは quark の質量で、 $r_v = 55.1[\text{GeV}]$  付近から離れると誤差が非常に大きくなるのがわかる。また  $\sin \theta_{12}^q, \sin \theta_{13}^q, \sin \theta_{23}^q$  はそれぞれ best fit が大きく異なるが best fit の点では  $\chi^2_i$  がとても小さい。

次に  $v_u$  を複素平面上で変化させたときの誤差を調べてみる。

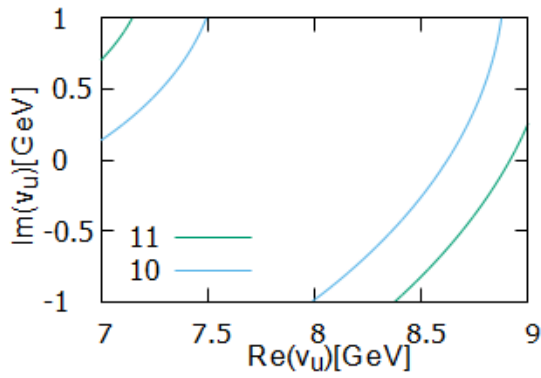


図 6.12  $v_u$  を変化させたときの u,d,e-type の  $\chi^2$

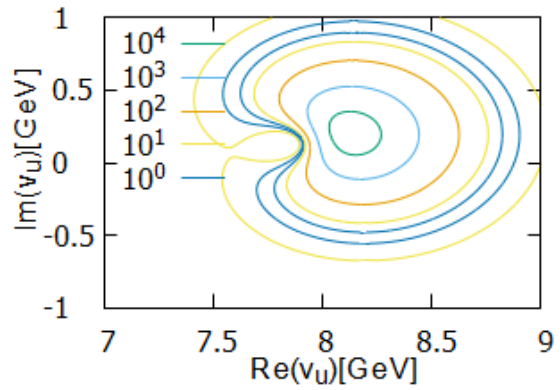


図 6.13  $v_u$  を変化させたときの  $r = \Delta m^2_{21}/\Delta m^2_{31}$  の  $\chi^2$

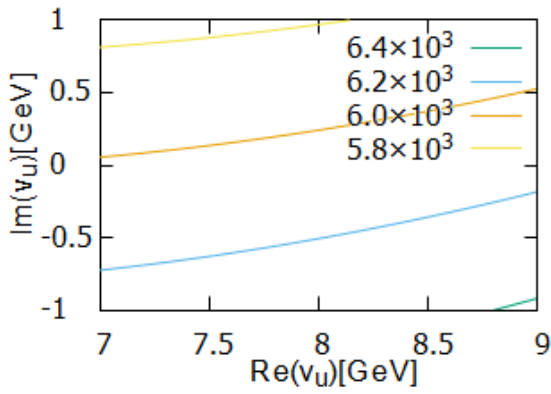


図 6.14  $v_u$  を変化させたときの CKM の  $\chi^2$

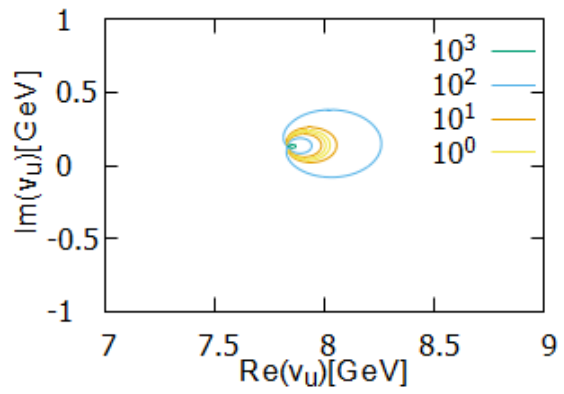


図 6.15  $v_u$  を変化させたときの  $\sin^2 \theta^l_{12}$  の  $\chi^2$

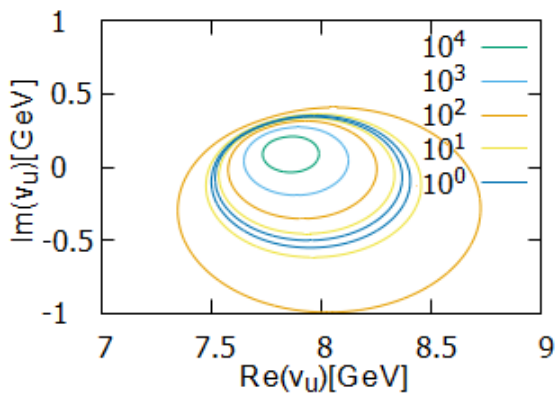


図 6.16  $v_u$  を変化させたときの  $\sin^2 \theta^l_{13}$  の  $\chi^2$

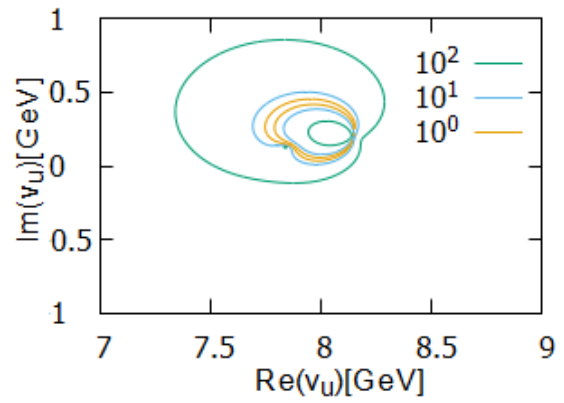


図 6.17  $v_u$  を変化させたときの  $\sin^2 \theta^l_{23}$  の  $\chi^2$

これを見ると、u,d,e-type の質量と CKM 行列は  $v_u$  による影響がほとんど無い。一方で  $r$  及び MNS 行列は微小な変化で強く影響を受ける。特に  $r$  は Yukawa Couplings の誤差による影響が大きいため、その影響はとても大きい。また、MNS 行列のパラメータを見てみると  $\sin^2 \theta_{12}^l$  及び  $\sin^2 \theta_{23}^l$  は  $v_u = 7.95[\text{GeV}]$  付近で誤差が小さくなっているが  $\sin^2 \theta_{13}^l$  はずれているように見える。しかし Yukawa Coupling による誤差の影響を考えてみるとそれぞれ大きくずれてはいない。従って実験値からの  $r$  及び MNS の誤差が大きくなってしまったのは Yukawa Couplings の誤差と 2-loop の影響を考えなかったための誤差によって  $v_u$  の best fit がずれてしまったためであると考えられる。

次に  $v_d$  を複素平面上で変化させたときの誤差を調べてみる。

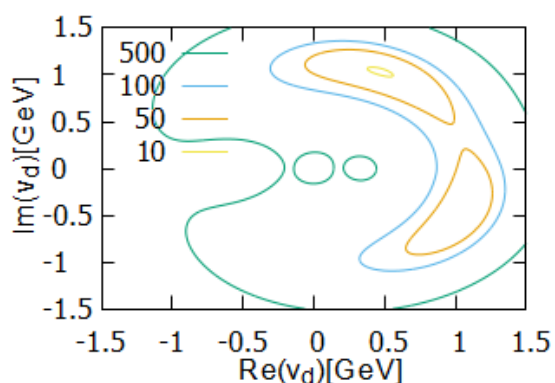


図 6.18  $v_d$  を変化させたときの u,d,e-type の  $\chi^2$

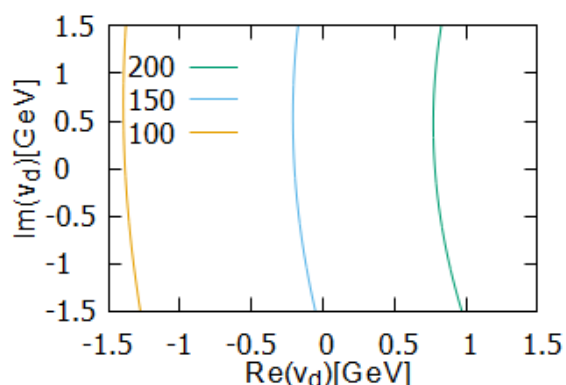


図 6.19  $v_d$  を変化させたときの  $r = \Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2$  の  $\chi^2$

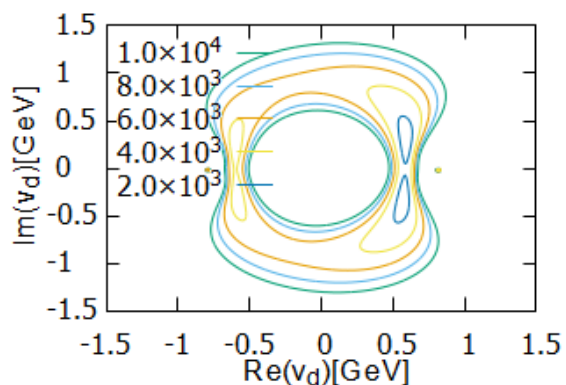


図 6.20  $v_d$  を変化させたときの CKM の  $\chi^2$

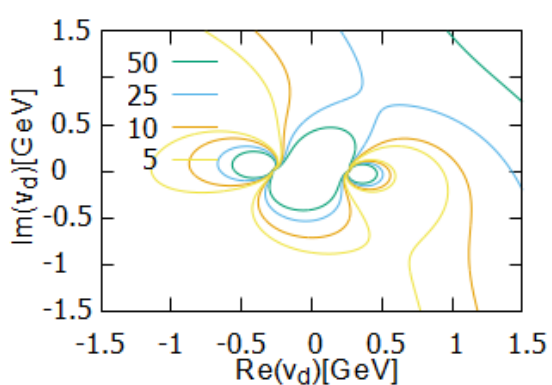


図 6.21  $v_d$  を変化させたときの  $\sin^2 \theta_{12}^l$  の  $\chi^2$

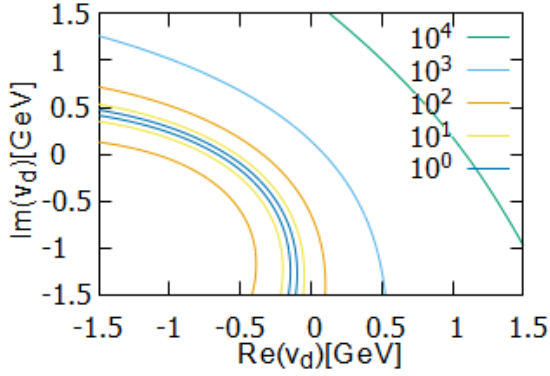


図 6.22  $v_d$  を変化させたときの  $\sin^2 \theta_{13}^l$  の  $\chi^2$

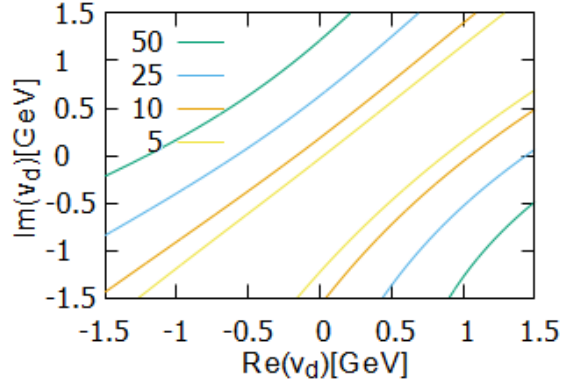


図 6.23  $v_d$  を変化させたときの  $\sin^2 \theta_{23}^l$  の  $\chi^2$

これを見ると、 $r$  は  $v_d$  の変化の影響が小さい。CKM も良い fit にはならないが、原点付近と  $|v_d| > 1.5$  [GeV] が排除されることが見て取れる。その上で見てみると、u,d,e-type の質量は  $\text{Re}(v_d) > 0$  に良い fit をしていることが分かる。一方で  $\sin^2 \theta_{12}^l$  及び  $\sin^2 \theta_{13}^l$  は  $\text{Re}(v_d) > 0$  かつ  $\text{Im}(v_d) > 0$  では fit があまり良くない。また、 $\sin^2 \theta_{23}^l$  は傾き 1 の線にそって fit している。以上から  $v_d = (0.512 + 1.01i)$  [GeV] 付近で u,d,e-type の質量と  $\sin^2 \theta_{23}^l$  が良い fit をしていることが分かる。

### 6.3 NOvA 実験と T2K 実験での実験結果を用いた解析

次にパラメータを変えずにそれぞれの場合で  $\chi^2$  を計算してみることで、fitting にどのような影響があるのか調べてみる。これまでの結果から  $\sin^2 \theta_{23}^l$  の違いの影響を強く受けるモデルパラメータは  $r_v, v_{u,d}$  である。そこでそれらの変化に対する  $\chi^2$  の値の変化を見てみる。すると  $r_v$  及び  $v_u$  の場合は  $\sin^2 \theta_{23}^l$  の NOvA と T2K による差がほとんど無い。一方で  $v_d$  の場合、u,d,e-type の質量の best fit が  $\text{Re}(v_d) > 0$  かつ  $\text{Im}(v_d) > 0$  と  $\text{Re}(v_d) > 0$  かつ  $\text{Im}(v_d) < 0$  の 2 箇所あり、また  $\sin^2 \theta_{23}^l$  は右下ほど大きくなるので、NOvA と T2K での値の差の影響を強く受ける。実際に  $\chi_i^2 < 100$  で比較的良好な fitting である u,d,e-type の質量、 $\delta_{CKM}, \sin^2 \theta_{12}^l, \sin^2 \theta_{23}^l$  の  $\chi_i^2$  を合わせてプロットしてみると以下ようになった。

NOvA 実験でのパラメータの場合は統合したときと同じように  $v_d$  は第一象限である  $v_d = 0.45 + 1.03i$  [GeV] で  $\chi^2 = 66.2$  の best fit となる。一方で T2K 実験でのパラメータの場合は  $v_d$  は第四象限である  $v_d = 1.12 + 0.24i$  [GeV] で  $\chi^2 = 54.1$  の best fit となる。また T2K の方が小さくなったのは  $\sin^2 \theta_{12}^l$  が良い fit をもたすためだと考えられる。従って 1-loop で計算する限り、T2K と NOvA 実験の global fit を用いた場合は NOvA 実験の影響が強かったが、NOvA より T2K の値を用いた方が fit がよくなる。またその違いは  $\Sigma$  の真空期待値の成分  $\langle \Sigma_d \rangle$  に強く影響することが分かる。



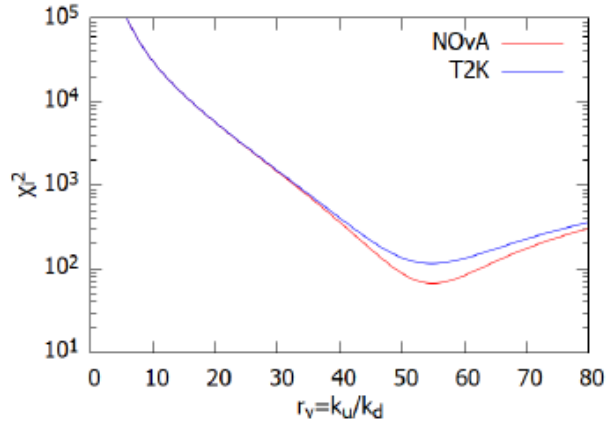


図 6.24 NOvA 実験の結果を用いたときの u,d,e-type の質量と  $\delta_{CKM}$  と  $\sin^2 \theta_{12}, \sin^2 \theta_{23}$  の  $\chi_i^2$  をあわせた  $\chi^2$  の  $r_v$  変化。

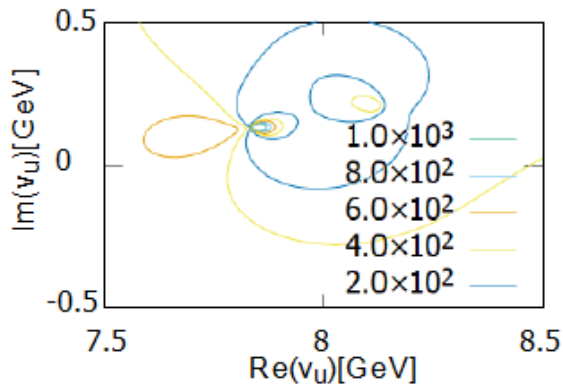


図 6.25 NOvA 実験の結果を用いたときの u,d,e-type の質量と  $\delta_{CKM}$  と  $\sin^2 \theta_{12}, \sin^2 \theta_{23}$  の  $\chi_i^2$  をあわせた  $\chi^2$  の  $v_u$  変化。

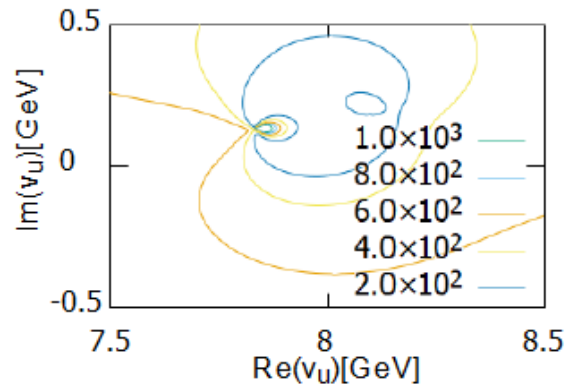


図 6.26 T2K 実験の結果を用いたときの u,d,e-type の質量と  $\delta_{CKM}$  と  $\sin^2 \theta_{12}, \sin^2 \theta_{23}$  の  $\chi_i^2$  をあわせた  $\chi^2$  の  $v_u$  変化。

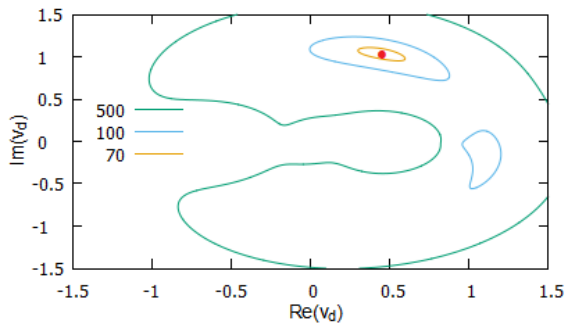


図 6.27 NOvA 実験の結果を用いたときの u,d,e-type の質量と  $\delta_{CKM}$  と  $\sin^2 \theta_{12}, \sin^2 \theta_{23}$  の  $\chi_i^2$  をあわせた  $\chi^2$  の  $v_d$  変化。

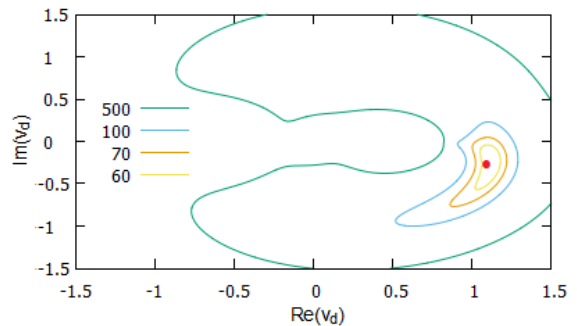


図 6.28 T2K 実験の結果を用いたときの u,d,e-type の質量と  $\delta_{CKM}$  と  $\sin^2 \theta_{12}, \sin^2 \theta_{23}$  の  $\chi_i^2$  をあわせた  $\chi^2$  の  $v_d$  変化。

## 第7章

### まとめ

まず、対称性の点から標準模型を解説し現状の問題点を上げた。電弱相互作用は  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  で書かれ、Higgs 粒子が真空期待値を持つ頃によって電磁相互作用の  $U(1)_{QED}$  に破れる。また、強い相互作用は  $SU(3)_C$  で書かれる。しかし、標準模型は Left-Right 対称性が破れており、右巻き neutrino が存在しないので質量が 0 になってしまう。また、カイラルアノマリーは quark と lepton の両方が存在しなければならず、かつ weak hypercharge が少しでも異なれば相殺されない。

次に最も単純な GUT モデルである  $SU(5)$ GUT を例にとって GUT モデルについて解説した。GUT モデルでは quark と lepton を同じ粒子の別の状態として考える。 $SU(3)_C \times [SU(2)_L \times U(1)_Y]$  を含む最も単純な群は  $SU(5)$  であるが、 $SU(5)$ GUT では右巻き neutrino を説明するためには特別な機構を加えなければならない。また、陽子の寿命が短いので補正を加える必要がある。また第一世代の d と e の質量の関係が合わない。一方で Weinberg 角はよく合い、第二世代 s と  $\mu$  と第三世代 b,  $\tau$  の質量の関係は実験と合う。

次に今回用いる対称性である  $SO(10)$  を用いた GUT において一般的に言えることを解説した。 $SO(10)$ GUT の場合、右巻き neutrino を含めたすべての fermi 粒子を一つの基本表現で表せる。また、 $SO(10)$ GUT で現実の粒子を説明するには中間状態として  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  対称性を経由する必要がある。また、補正を加えずに陽子の寿命を説明するには  $126H$  で  $SO(10)_{GUT}$  を破る必要がある。また、seesaw メカニズムによって右巻き neutrino に重い質量が与えられるため実験で観測されていないと考えられる。

次に実際の Non SUSY Minimal  $SO(10)$ GUT モデルについて詳細に議論した。現実的な質量を fermions に与えることが出来る minimal な Higgs は  $10H$  と  $126H$  の二つが必要である。また GUT スケールで t と b quark の間の大きな分割を説明するためには 2HDM を用いる必要がある。その場合 2-loop でカイ二乗検定を行うことで 21 個のパラメータが必要。このパラメータを変化させたときにどうなるか解析してみると、u,d,e-type の質量は  $r_v = v_u/v_d$  に対して強い制限を設けるが  $v_u$  に対してはほとんど変化しない。一方で  $r = \Delta m_{21}^2/\Delta m_{31}^2$  と MNS 行列は  $r_v$  の変化の影響は小さいが  $v_u$  の微小な変化で大きく影響する。また、CKM 行列は 2-loop の影響を強く受ける。また NOvA 実験と T2K 実験では  $\sin^2 \theta_{23}^l$  の best fit に違いが見られるのでそれぞれの場合で解析してみると、 $v_d$  に影響がでる。

さらに詳細にこのモデルを議論するためには、2-loop でのパラメータの解析を行い、そして具体的な実験によって他のパラメータについても議論する必要がある。

# Appendix

・  $SU(2)$  の生成子 : Pauli 行列  $\sigma_{1\sim 3}/2$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

・  $SU(3)$  の生成子 : Gell-Mann 行列  $\lambda_{1\sim 8}/2$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

・  $SU(5)$  の生成子 :  $\lambda_{1\sim 24}/2$

$$\lambda_{1\sim 8} = \begin{pmatrix} SU(3) \text{ の } \lambda_{1\sim 8} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{21\sim 23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & SU(2) \text{ の } \sigma_{1\sim 3} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{24} = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{diag}(-2, -2, -2, 3, 3)$$

・  $SU(4)$  の生成子 :  $\lambda_{1\sim 15}/2$

$$\lambda_{1\sim 8} = \begin{pmatrix} SU(3) \text{ の } \lambda_{1\sim 8} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{13,14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & SU(2) \text{ の } \sigma_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{15} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

・  $SO(10)$  の生成子  $(T_{1,2,\dots,9,0})$  と  $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  の生成子  $T_C^{1\sim 15}, T_{L,R}^{1\sim 3}$  との関係 :

$$T_{L,R}^1 = \frac{1}{2}(T_{23} \pm T_{14}), T_{L,R}^2 = \frac{1}{2}(T_{31} \pm T_{24}), T_{L,R}^3 = \frac{1}{2}(T_{12} \pm T_{34})$$

$$T_C^1 = \frac{1}{2}(T_{89} + T_{70}), T_C^2 = \frac{1}{2}(T_{97} + T_{80}), T_C^3 = \frac{1}{2}(T_{09} + T_{87}),$$

$$\begin{aligned}
T_C^4 &= \frac{1}{2}(T_{96} + T_{05}), T_C^5 = \frac{1}{2}(T_{59} + T_{06}), T_C^6 = \frac{1}{2}(T_{67} + T_{85}), \\
T_C^7 &= \frac{1}{2}(T_{75} + T_{86}), T_C^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2T_{65} + T_{78} + T_{09}), T_C^9 = \frac{1}{2}(T_{67} + T_{58}), \\
T_C^{10} &= \frac{1}{2}(T_{75} + T_{68}), T_C^{11} = \frac{1}{2}(T_{69} + T_{05}), T_C^{12} = \frac{1}{2}(T_{95} + T_{06}), \\
T_C^{13} &= \frac{1}{2}(T_{89} + T_{07}), T_C^{14} = \frac{1}{2}(T_{97} + T_{08}), T_C^{15} = \frac{1}{\sqrt{6}}(T_{65} + T_{87} + T_{90})
\end{aligned}$$

・混合行列  $V_{CKM}, V_{MNS}$  のパラメータ :

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

# 謝辞

本研究にあたり、2年間にも亘って指導してくださいました安田修教授、北澤敬章助教に深く感謝いたします。そして Manojit Ghosh 特任助教には貴重なご意見をいただき感謝いたします。また、同じ素粒子理論研究室のメンバーである酒井裕企さん、柳田秀明さん、増川京佑さん、芝田健仁さんには大変お世話になりました。また、すでに卒業していらっしゃる深澤信也さん、大場雅男さん、松坂勇志さん、そして後輩の石川和也君、鈴木啓介君には1年間という短い間でしたがお世話になりました。最後に、様々な面で支えてくれた家族に心より感謝いたします。

## 参考文献

- [1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579. doi:10.1016/0029-5582(61)90469-2
- [2] H. Fritzsch and P. Minkowski, Annals Phys. **93** (1975) 193. doi:10.1016/0003-4916(75)90211-0
- [3] G. Lazarides, M. Magg and Q. Shafi, Phys. Lett. **97B** (1980) 87. doi:10.1016/0370-2693(80)90553-5
- [4] D. Chang and A. Kumar, Phys. Rev. D **33** (1986) 2695. doi:10.1103/PhysRevD.33.2695
- [5] L. Di Luzio, arXiv:1110.3210 [hep-ph].
- [6] G. Senjanovic, Riv. Nuovo Cim. **34** (2011) 1. doi:10.1393/ncr/i2011-10061-8
- [7] K. S. Babu, B. Bajc and S. Saad, JHEP **1702** (2017) 136 doi:10.1007/JHEP02(2017)136 [arXiv:1612.04329 [hep-ph]].
- [8] D. Meloni, T. Ohlsson and S. Riad, JHEP **1703** (2017) 045 doi:10.1007/JHEP03(2017)045 [arXiv:1612.07973 [hep-ph]].
- [9] NuFIT, URL: [www.nu-fit.org/](http://www.nu-fit.org/)