

QCD θ 項の 2-loop 輻射補正

坂野 達哉 (名古屋大学 E 研)

共同研究者: 久野純治 北原鉄平 長村尚弘

JHEP 02 (2024) 195 (arXiv:2311.07817)

素粒子物理学の進展 2024 (PPP2024)

2024/08/23

Introduction

QCD における CP 対称性の破れ

$$\mathcal{L}_{CPV} = -\bar{q} (m_q P_R + m_q^* P_L) q + \theta_G \frac{\alpha_s}{8\pi} G\tilde{G}$$

$$\xrightarrow{\text{カイラル回転}} -|m_q| \bar{q}q + (\theta_G - \arg(m_q)) \frac{\alpha_s}{8\pi} G\tilde{G}$$

場の再定義に依らない物理的なパラメータ： $\bar{\theta}$

$$\bar{\theta} = \theta_G - \sum_{\text{\# of quark}} \arg(m_q)$$

$\bar{\theta}$ は中性子電気双極子能率 (nEDM) d_n の測定から決まる [J. Liang, et al. arXiv:2301.04331]

$$|d_n| \simeq 1.48 \times 10^{-16} \bar{\theta} \text{ e} \cdot \text{cm}$$

現在の d_n の値 [C. Abel, et al. Phys. Rev. Lett. 124 (2020)]

$$|d_n| < 1.8 \times 10^{-26} \text{ e} \cdot \text{cm}$$

d_n から来る $\bar{\theta}$ の上限

$$|\bar{\theta}| \lesssim 1.2 \times 10^{-10}$$

SM の枠組みでクォークは 2 つの CP 位相を持つ

1. CKM 行列の複素位相

$$\delta_{\text{CKM}} \simeq 1.2$$

2. QCD θ 項

$$\bar{\theta} \lesssim 10^{-10}$$

何故 $\bar{\theta}$ は不自然に小さいのか → **強い CP 問題**

解の1つ：P または CP 対称性を課す模型 (ex. 左右対称模型、Nelson-Barr 模型)

- P-odd かつ CP-odd な θ 項は Lagrangian に書けない
- 低エネルギースケールで SM になるために P や CP は自発的に破れる

このような模型では対称性の自発的破れに伴って $\bar{\theta}$ が輻射補正から生成される

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_{\text{tree}} + \delta\theta$$

$\bar{\theta}$ への補正を正確に評価 → 模型の検証

従来の方法：藤川の方法を用いて、量子補正込みのくりこまれたクォーク質量の虚部で評価

[J. R. Ellis and M. K. Gaillard, Nucl. Phys. B 150 (1979)]

$$\mathcal{L}_{CPV} = -\bar{q} \underbrace{(m_q + \Delta m_q)}_{\text{renormalized mass}} P_R q + \text{h.c.} \rightarrow \bar{\theta} = -\arg(m_q + \Delta m_q)$$

問題点

- $\arg(m_q + \Delta m_q)$ 以外の寄与は評価できない
 \longleftrightarrow くりこみ群の効果で dipole 演算子が θ に寄与する [E. E. Jenkins, et al. JHEP 01 (2018)]
- Δm_q を定義するくりこみ条件が不明

本研究では Feynman 図の直接計算によって QCD θ 項への 2-loop level の補正を調べた

- diagram 計算による θ の評価では $\arg(m_q + \Delta m_q)$ 以外の寄与も評価できることを明らかにした
- 従来の方法で θ を評価する際はクォークの運動量 0 で定義した Δm_q を使うのが適切であることを確認した

diagram 計算によって QCD θ への補正を評価した結果をいくつか紹介する

1. クォークの有効理論での 1-loop θ の評価
→ dipole 演算子が θ に寄与することを確認
2. CP を破る湯川相互作用を持つ模型での 2-loop level の θ の評価
 - Δm_q の定義を明らかにした上で、 $\arg(m_q + \Delta m_q)$ で評価する従来の方法との比較
 - 従来の方法では不十分な場合があることも見る

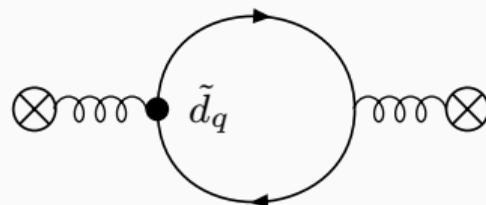
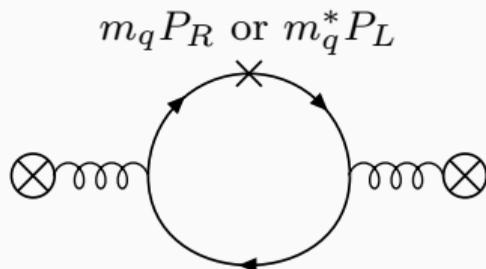
quark EFT & 1-loop θ

1-loop θ

まずは 1-loop diagram の計算によって $\arg(m_q)$ 以外の寄与も評価できることを見る
次元 5 までの演算子を含むクォーク有効理論 (1-flavor, $\theta_G = 0$)

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \bar{q} [i\not{D} - (m_q^* P_L + m_q P_R)] q - \frac{1}{2} g_s \mu_q \bar{q} (\sigma \cdot G) q - \frac{i}{2} g_s d_q \bar{q} (\sigma \cdot G) \gamma_5 q$$

θ に寄与する diagram



背景グルーオン場の有効作用 ($\log \det$) を評価すると

$$\Delta S = - \left(\frac{i}{2} \log \frac{m_q^*}{m_q} + 2|m_q| \tilde{d}_q \log \frac{|m_q|}{\mu} \right) \int d^4x \frac{\alpha_s}{8\pi} G\tilde{G}$$

- 藤川の方法で評価できていた部分: $\frac{i}{2} \log \frac{m_q^*}{m_q} = \arg(m_q)$
- diagram 計算によって評価できた部分: chromo EDM \tilde{d}_q からの寄与
くりこみ群方程式 $\left(\mu \frac{d\theta}{d\mu} = 4m_q \tilde{d}_q \right)$ の結果と整合

diagram による評価では $\arg(m_q)$ 以外の寄与も含めて評価できる

一方で 2-loop 以上では $\log \det$ の評価は困難 → 別の方法で評価

2-loop θ の評価

CP を破る湯川相互作用持つ模型で θ 項への 2-loop 補正を見る

1. EFT による理解 (review)

- クォーク質量の位相 + **くりこみ群の効果**

2. diagram の直接計算による評価

- 極限で EFT の結果と整合することを確認
- $\arg(m_q + \Delta m_q)$ で評価する際の Δm_q の定義を明確にする
- $\arg(m_q + \Delta m_q)$ では不十分な場合があることも見る

今回扱う模型

QCD θ 項への 2-loop 補正を簡単な模型で調べた

(仮想的な) クォーク q と実スカラー ϕ 間の CP を破る湯川相互作用 ($\text{Im}(y_q) \neq 0$) を持つ模型

$$-\mathcal{L} = \bar{q} (\text{Re}[m_q] + i \text{Im}[m_q] \gamma_5) q + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + y_q \phi \bar{q} P_R q + y_q^* \phi \bar{q} P_L q$$

対称性: $\phi \rightarrow -\phi, y_q \rightarrow -y_q$

カイラル回転に依らない量: $\theta_G - \arg(m_q), y_q m_q^*$

仮定: $m_q > \Lambda_{\text{QCD}}, \text{Im}(m_q) \ll \text{Re}(m_q), \theta_G = 0$

\Rightarrow QCD θ 項へ寄与する複素位相

$$\arg(m_q) \simeq \frac{\text{Im}(m_q)}{\text{Re}(m_q)}$$

$$\text{Im}((y_q m_q^*)^2) \simeq \text{Im}(y_q^2) \text{Re}(m_q)^2$$

クォーク q がスカラー ϕ より十分軽い場合 ($m_q \ll m_\phi$)

→ QCD θ 項への補正はクォークの有効理論で理解できる

スケール $\mu = m_\phi$ で重い ϕ を積分すると CP を破る次元 6 までの演算子は

$$-\mathcal{L}_{\text{eff}} = \bar{q}i \text{Im}[m_q + \Delta m_q(\mu)]\gamma_5 q + \frac{i}{2}g_s \tilde{d}_q \bar{q}\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 G_{\mu\nu} q - C_4^q(\bar{q}q)(\bar{q}i\gamma_5 q) \\ - \cancel{C_5^q(\bar{q}\sigma^{\mu\nu}q)(\bar{q}i\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 q)} + \Delta\theta_{\text{th}} \frac{\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} + \cancel{\frac{1}{3}\omega f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_\rho^{b\nu} \tilde{G}^{c\rho\mu}}$$

- $\Delta m_q(\mu)$: 運動量 0 で定義したクォーク質量への補正
- \tilde{d}_q : chromo-電気双極子能率, C_4^q : 4-fermi 演算子
- $\Delta\theta_{\text{th}}$: θ への閾値補正 (EFT では決まらない)
- その他の演算子 (C_5^q, ω): 高次の寄与なので無視する

くりこみ群の効果 ($m_q \leq \mu \leq m_\phi$)

- \tilde{d}_q と C_4^q の混合: $\tilde{d}_q, C_4^q \rightarrow \tilde{d}_q(\mu)$ [J. Hisano, et al. Phys. Lett. B 713 (2012)]

$$\mu \frac{d\tilde{d}_q}{d\mu} = \frac{4m_q}{16\pi^2} C_4^q$$

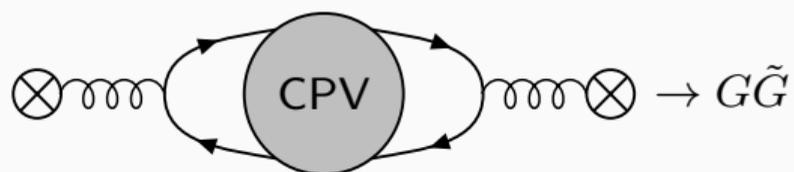
- \tilde{d}_q の θ への寄与 [E. E. Jenkins, et al. JHEP 01 (2018)]

$$\mu \frac{d\theta}{d\mu} = 4m_q \tilde{d}_q(\mu)$$

従来の方法 $\arg(m_q + \Delta m_q)$ と合わせると

$$\bar{\theta} = \delta\theta_{\text{EFT}} = -\frac{\text{Im}[m_q + \Delta m_q]}{\text{Re}[m_q]} - 2 \int_{\log m_\phi^2}^{\log m_q^2} \text{Re}[m_q] \tilde{d}_q(\mu) d \log \mu^2 + \Delta\theta_{\text{th}}$$

次に diagram 計算による θ 項への補正を考える



- 先に見た有効作用を求める際の $\log \det$ の計算は、2-loop 以上では困難
- 通常の計算方法では運動量保存のために全微分項 $G\tilde{G} \propto \partial [A\partial A + \frac{2}{3}A^3]$ を扱えない

→ Fock-Schwinger gauge method

Fock-Schwinger gauge method

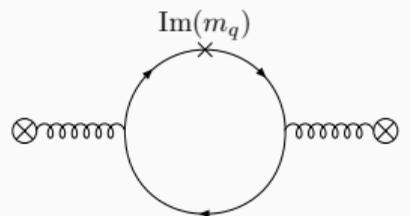
Fock-Schwinger gauge : $(x - x_0)^\mu A_\mu(x) = 0$

- 並進対称性 (=運動量保存) を破る \Rightarrow 全微分項 $G\tilde{G} \propto \partial [A\partial A + \frac{2}{3}A^3]$ を扱える
- ゲージ不変な量では並進対称性が回復
[S. N. Nikolaev, A.V. Radyushkin, Phys. Lett. B 110 (1982), Nucl. Phys. B 213 (1983)]
- ゲージ場を field strength で展開できるため、効率的な計算が可能

$$A_\mu(q) = -\frac{i(2\pi)^4}{2} G_{\nu\mu}(0) \frac{\partial}{\partial q_\nu} \delta^{(4)}(q) + \dots$$

QCD θ 項への $\text{Im}(m_q)$ の寄与 \rightarrow 1-loop diagram の評価 ($\arg(m_q)$ と整合)

[J. Hisano, et al. JHEP 03 (2023)]



The diagram shows a circular quark loop with two external gluon lines (represented by wavy lines with a cross in a circle). The top vertex of the loop is marked with an 'X' and labeled $\text{Im}(m_q)$. The diagram is followed by an arrow pointing to the equation $\delta\theta_{1\text{-loop}} = -\frac{\text{Im}(m_q)}{\text{Re}(m_q)}$.

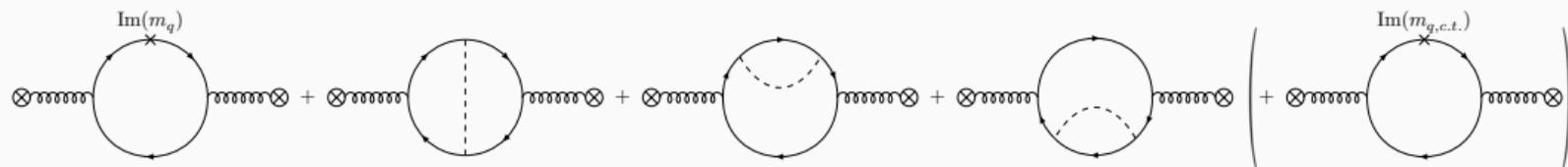
$$\rightarrow \delta\theta_{1\text{-loop}} = -\frac{\text{Im}(m_q)}{\text{Re}(m_q)}$$

θ 項へ寄与する diagram (2-loop level)

今回扱っている模型

$$-\mathcal{L} = \bar{q} (\text{Re}[m_q] + i \text{Im}[m_q] \gamma_5) q + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + y_q \phi \bar{q} P_R q + y_q^* \phi \bar{q} P_L q$$

θ 項へ寄与する diagram は 2-loop までを考えると



$\text{Im}(m_q)$ の寄与 + 2-loop の寄与 (+ クォーク質量への counter term の寄与)

→ Fock-Schwinger gauge method を用いた diagram 計算によって θ 項への補正を評価

Result

クォークが軽い場合 ($m_q \ll m_\phi$)

Fock-Schwinger gauge method を用いた 2-loop level の QCD θ 項の評価

$$\bar{\theta} = \delta\theta = \delta\theta_{1\text{-loop}} + \delta\theta_{2\text{-loop}}$$

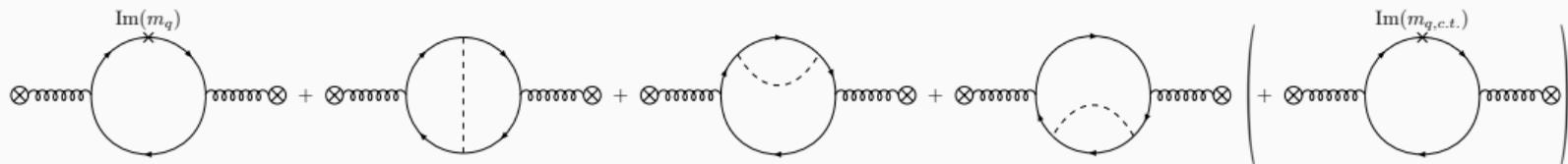


diagram 計算による θ の評価は $m_q \ll m_\phi$ で EFT の方法と整合する ($\Delta\theta_{\text{th}}$ はここで決める)

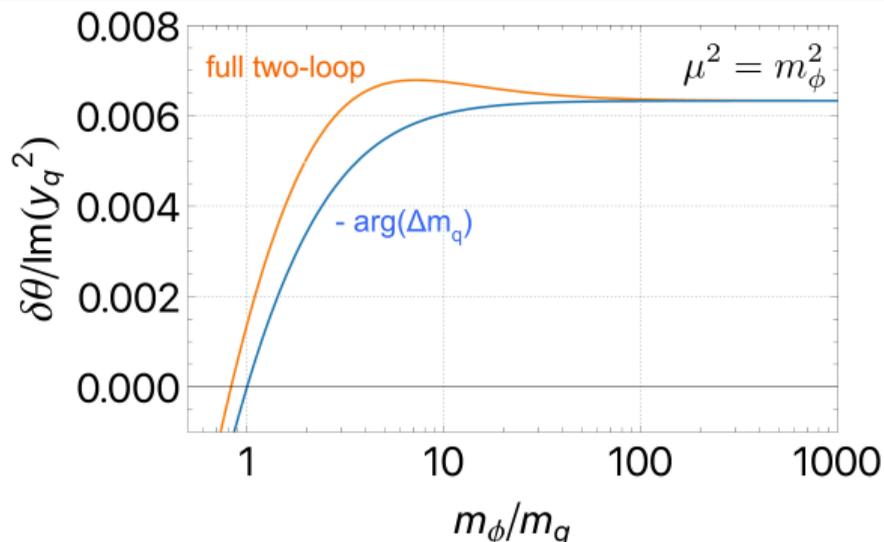
$$\delta\theta_{1\text{-loop}} + \delta\theta_{2\text{-loop}} = \delta\theta_{\text{EFT}} = -\frac{\text{Im}[m_q + \Delta m_q]}{\text{Re}[m_q]} - 2 \int_{\log m_\phi^2}^{\log m_q^2} \text{Re}[m_q] \tilde{d}_q(\mu) d \log \mu^2 + \Delta\theta_{\text{th}}$$

- Feynman 図の評価によって $\arg(m_q + \Delta m_q)$ 以外の寄与も評価できた
- \tilde{d}_q , $\Delta\theta_{\text{th}}$ の寄与は $\mathcal{O}(m_q^2/m_\phi^2)$ で抑制される

$m_q \sim m_\phi$ のときはどうか?

クォークが軽い場合 ($m_q \leq m_\phi$)

$m_q \leq m_\phi$ でループ関数の解析解の振る舞い



青: クォーク質量の 1-loop 補正の複素位相

$$\delta\theta = -\arg(\Delta m_q)$$

オレンジ: 2-loop diagram の解析解

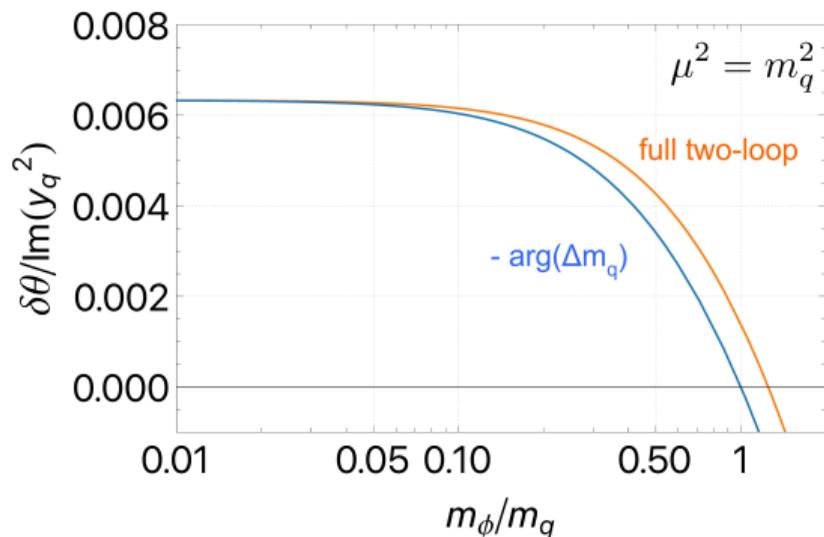
$$\delta\theta = \delta\theta_{2\text{-loop}}$$

$\Delta m_q(\mu)$ は運動量 0 で定義したクォーク質量の補正
スケール μ は $\mu^2 = m_\phi^2$ に取る

$m_\phi/m_q \lesssim 10$ では Feynman 図の直接計算によって評価すべき

クォークが重い場合 ($m_q \geq m_\phi$)

$m_q \geq m_\phi$ でループ関数の解析解の振る舞い



青: クォーク質量の 1-loop 補正の複素位相

$$\delta\theta = -\arg(\Delta m_q)$$

オレンジ: 2-loop diagram の解析解

$$\delta\theta = \delta\theta_{2\text{-loop}}$$

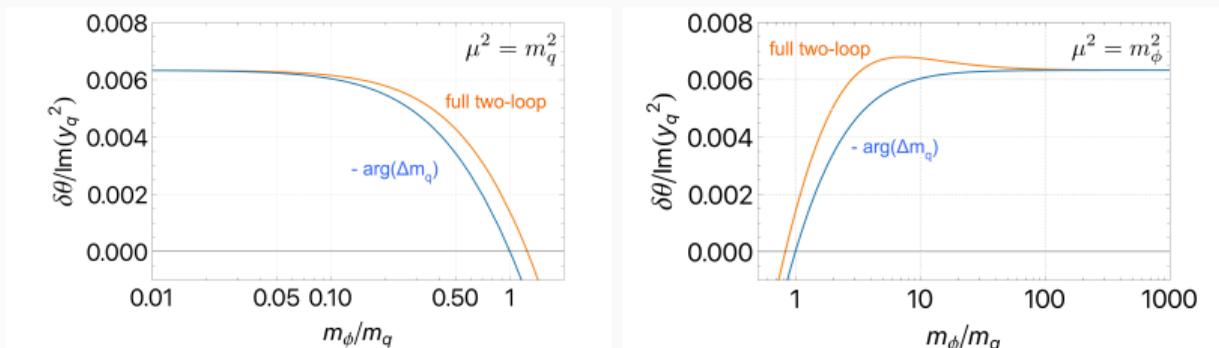
$\Delta m_q(\mu)$ は運動量 0 で定義したクォーク質量の補正
スケール μ は $\mu^2 = m_q^2$ に取る
(重いクォークが積分されるスケール)

$m_\phi/m_q \gtrsim 0.1$ では Feynman 図の直越計算によって評価すべき
クォークの有効理論で記述できない $m_\phi/m_q \ll 1$ で一致する理由は不明

- QCD θ 項へのクォーク質量の複素位相以外の寄与: $\bar{\theta} = -\arg(m_q + \Delta m_q) + \dots$

$$\bar{\theta} = \delta\theta_{1\text{-loop}} + \delta\theta_{2\text{-loop}} = \text{Im}(m_q) + \dots$$

- クォーク質量への補正 Δm_q を運動量 0 で定義すると
質量の階層性が大きいときは $\arg(m_q + \Delta m_q)$ に一致
- 質量の階層性が小さいときは $\arg(m_q + \Delta m_q)$ による評価では不十分



Fock-Schwinger gauge method では QCD θ 項への高次補正を正確に評価できる
中性子の電気双極子能率の測定により $\bar{\theta}$ は制限される

- 現在の制限は $\bar{\theta} \lesssim 10^{-10}$
- 将来実験で 1~2 桁の精度向上が見込まれている

強い CP 問題の解の 1 つである P 対称性を課す模型（左右対称模型）において
 $\delta\theta$ への 3-loop の寄与（最低次）を調べる

- 先行研究での見積もり： $\delta\theta_{3\text{-loop}}$ は実験からの制限より数桁下
[J. Hisano, et al. JHEP 03 (2023)]
- $\delta\theta_{3\text{-loop}}$ を正確に評価することで模型のパラメータに制限をつける

Backup

Weinberg operator

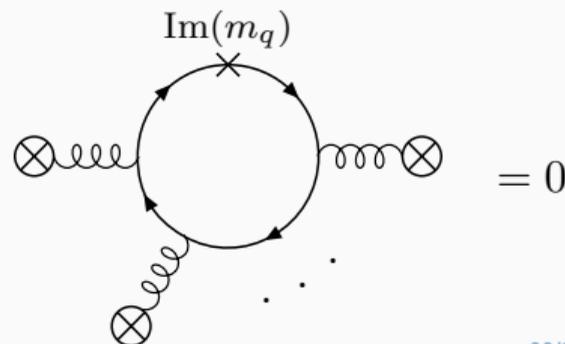
$\text{Im}(m_q)$ を含む 1-loop diagram からの Weinberg operator への寄与は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm_q} \Delta S &\supset \text{tr} \left[\left\{ \frac{1}{p^2 - |m_q|} \left(\frac{1}{2} g_s (\sigma \cdot G) \right) \right\}^3 \frac{1}{p^2 - |m_q|} m_q^* P_R \right] \\ &\supset i \int d^4x \frac{c}{m_q |m_q|^2} GG\tilde{G} \quad (c: \text{適当な実係数}) \end{aligned}$$

m_q で積分すれば $\Delta S \supset -i \int d^4x \frac{c}{|m_q|} GG\tilde{G}$, $\frac{d}{dm_q} \rightarrow \frac{d}{dm_q^*}$ も考えると

$$\Delta S \supset i \int d^4x \left[\frac{c}{|m_q|} - \frac{c}{|m_q|} \right] GG\tilde{G} = 0$$

実は $GG\tilde{G}$ より高次の gluon CPV 演算子は 1-loop で現れない



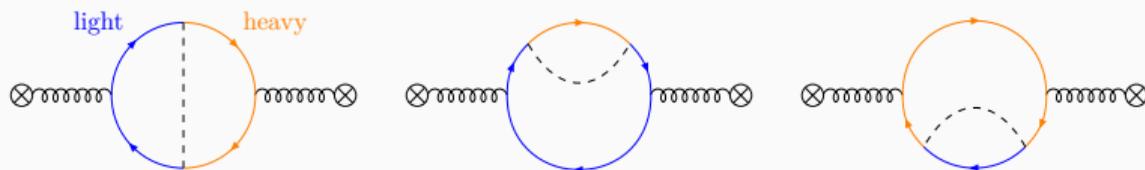
2 フレーバーの場合

CP 対称性を破る湯川相互作用を持つ模型 (2 フレーバー : $i = l, h, m_l \ll m_h \sim m_\phi$)

$$-\mathcal{L} = \bar{q}_i (\text{Re}[m_i] + i \text{Im}[m_i] \gamma_5) q_i + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + y_{ij} \bar{q}_i P_R q_j \phi + \text{h.c.}$$

- 軽いクォーク (q_l) と重いクォーク (q_h) を含む
- $\text{Im}(y_{ll} = \text{Im}(y_{hh})) = 0, \text{Im}(y_{lh}) \neq 0$

θ 項への 2 ループの寄与



最も主要な寄与 : $-\text{Im}(\Delta m_l) / \text{Re}(m_l) \sim \mathcal{O}(m_h/m_l)$

その他の寄与 : $\mathcal{O}(m_l/m_h), \mathcal{O}(m_l/m_\phi)$

minimal BBP model (+ real scalar S)

[L. Bento et al. Phys. Lett. B 267 (1991)]

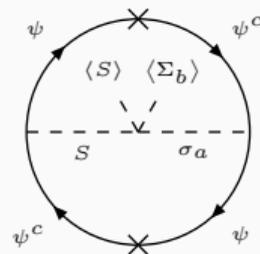
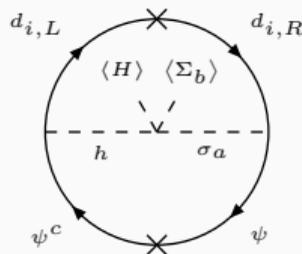
	chirality	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	\mathbb{Z}_N
Q	L	3	2	1/6	0
u	R	3	1	2/3	0
d	R	3	1	-1/3	0
H	-	1	2	1/2	0
ψ	L	3	1	-1/3	k
ψ^c	R	3	1	-1/3	k
Σ_a	-	1	1	0	k
S	-	1	1	0	0

$$-\mathcal{L}_Y^d = y_u^{ij} \tilde{H} \bar{Q}_i u_j + y_d^{ij} H \bar{Q}_i d_j \\ + g^{ai} \Sigma_a \bar{\psi}_L d_i + f S \bar{\psi} \psi^c + \text{h.c.}$$

$$V(\Sigma_a, H) = \gamma_{ab} \Sigma_a^* \Sigma_b |H|^2 + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{ab} \Sigma_a^* \Sigma_b S^2$$

- Σ_a の相対位相 \rightarrow CP の破れ
- $f \langle S \rangle$ で ψ の質量を与える

$$\delta\theta = \Delta\theta_\Sigma + \Delta\theta_S$$



$$\Delta\theta_\Sigma \simeq \frac{1}{16\pi^2} \gamma_{ab} g^{ak} g^{ck} \frac{\text{Im}[\langle \Sigma_b \rangle \langle \Sigma_c \rangle^*]}{m_h^2 - m_\Sigma^2}$$

$$\Delta\theta_S \simeq \frac{1}{8\pi^2} \tilde{\gamma}_{ab} g^{ak} g^{ck} \frac{\langle S \rangle}{m_\psi} \frac{\text{Im}[\langle \Sigma_b \rangle \langle \Sigma_c \rangle^*]}{m_S^2 - m_\Sigma^2}$$

軽いクォーク質量の寄与が支配的

重い粒子のみ含む（階層性：小）

$m_\psi \sim m_S, \langle \Sigma_a \rangle$ なら $\Delta\theta_S$ を Feynman 図によって評価すべき