Supersymmetric Models from Twisted Superspace on a Lattice [1]

北海道大学大学院理学研究科　金森 逸作
E-mail: kanamori@particle.sci.hokudai.ac.jp

超対称性 (SUSY) のより深い理解のためには、格子を用いた非摂動的な定式化が不可欠である。非摂動的な記述という観点からは、格子の上であっても fine tuning によらずにできるだけ厳密に超対称性を記述する必要がある。一方で、格子の上では微分 (差分) のライプニッツ則の破れに由来して超対称性を保つのは困難である。我々は i)Twisted SUSY、ii) 離散化された代数と 'mild' な非可換性を用いた超空間、を通じて 2 次元 $\mathcal{N}=2$ の SUSY[2] を格子で記述する。

ツイストは形式的にはある種の変数変換で、スピノールがスカラー、ベクトル、擬スカラーに変換される。スピノールそのものよりも変換後の量の方が格子の構造 (site, link,...) と直接対応付けられるという利点がある。SUSY 不変性は各 charge の nilpotency として理解できる。

非可換性は差分のライプニッツ則の破れを補うために導入する。Twisted SUSY の代数を離散化すると、例えば前方差分 $\partial_{+\mu}f(x) = f(x+2\hat{n}_\mu) - f(x)$ を用いて $[\theta Q, \theta^\mu Q_\mu] = i\theta\theta^\mu\partial_{+\mu}$ になる。Grassmann parameter θ, θ^μ を用いて反交換しではなく交換子にした。右辺は

$$\theta\theta^\mu\partial_{+\mu}(f(x)g(x)) = (\theta\theta^\mu\partial_{+\mu}f(x))g(x) + \theta\theta^\mu f(x+2\hat{n}_\mu)\partial_{+\mu}g(x)$$

と振る舞う。第 2 項の $2\hat{n}_\mu$ がライプニッツ則の破れである。ここで $\theta\theta^\mu f(x+2\hat{n}_\mu) = f(x)\theta\theta^\mu$ という非可換性を導入すれば $\theta\theta^\mu\partial_{+\mu}$ の組合わせ全体ではライプニッツ則を満たすようになる。尚この非可換性は連続極限で消える 'mild' なものである。

非可換性を持った Grassmann parameter を導入したので、それを用いて格子上で非可換性を持った supercharge や superfield を導入できる[2]。supercharge が従う代数は前方差分と後方差分の両方を含んでいる。また全ての supercharge は nilpotent である。

以上で連続な空間と同様の道具が用意できた。もっとも簡単な作用は (anti)chiral superfield の積で得られる。成分で書き下すと Q-exact な形になるため、nilpotency より厳密に SUSY 不変である。具体例として bosonic superfield の積から Wess-Zumino model を構成する[3]。

Twist をほどいて場の再定義をすると、作用関数は次のようになる:

$$\begin{aligned} S &= \sum_x \Big[-\phi_i(x)\partial^{+\mu}\partial_{-\mu}\phi_i(x) + F_i(x)F_i(x) \\ &\quad + \frac{i}{2}\bar{\xi}_{i\alpha}(x)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\partial_{+\mu}+\partial_{-\mu})\xi_{\beta i}(x) - \frac{i}{2}\bar{\xi}_{i\alpha}(x)(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\partial_{+\mu}-\partial_{-\mu})\xi_{\beta j}(x)(\gamma_5\gamma_\mu)_{ji} \Big] \end{aligned}$$

ここで i,j は $\mathcal{N}=2$ の extended SUSY、α,β はスピノールの足。Fermion ξ は twist された場を用いて $\xi_{\alpha i} = \frac{1}{2}(\mathbb{1}\chi + \gamma_\mu\psi^\mu + \gamma_5\tilde{\chi})_{\alpha i}$ と定義している。これは K-S フェルミオンそのものであり、2-flavor を $\mathcal{N}=2$ として活用したことになる。なお上の作用には相互作用は入っていない。相互作用の導入は spuerfield の多項式を加えることにより、少なくとも形式的には容易である。

我々の定式化は非可換性を持つように SUSY を修正したことになる。これは Ginsparg-Wilson 関係式を満たすようにカイラル対称性を修正したことと似ている。

参考文献

[1] A. D'Adda, I. Kanamori, N. Kawamoto and K. Nagata, hep-lat/0406029.

[2] J. Kato, N. Kawamoto and Y. Uchida, Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004) 2149, hep-th/0310242.

[1] この発表は INFN Torino の Alessandro D'Adda 氏、北大の河本昇氏、永田和広氏との共同研究 [1] に基づく。
[2] 永田氏の報告参照。
[3] Fermionic superfield を用いると supersymmetric BF model が得られる。