

# PARTICLE CREATION USING THE CLASSICAL STOCHASTIC METHOD

平山 貴之@中部大学

2024 8/5(月) 18:00- (25分)

# 予定

- 古典統計的手法とよばれるノイズを用いた量子論の計算方法を用いて、調和振動子( $\omega \rightarrow \omega'$ )の量子力学における粒子生成を計算します。
- 古典統計的手法で量子ダイナミクスを計算できることを紹介するのが目的です。

# 古典統計的手法のアイデア

- 量子論のゼロ点エネルギー( $\hbar\omega/2$ )をホワイトノイズとして実現する。
- 例: 調和振動子の量子力学 ( $\langle 0|x(t)|0\rangle_{QFT} = 0$ ,  $|0\rangle$ 基底状態)
- $x(t) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} A \cos(\omega t + \theta)$
- $\langle 0|x(t)|0\rangle_{QFT} = 0$ でなくてはならないので、 $\langle A\rangle_{cl} = 0$ 、だけど、 $\langle A^2\rangle_{cl} = \hbar/2$ としたい。従って、 $A$ はガウス分布に従う確率変数としたらよい。
- $\theta$ は $0 \sim 2\pi$ をまわるランダムな確率変数としたらよい。
- $\langle x(t_1)x(t_2)\rangle_{cl} = \frac{\hbar}{m\omega} \cos(\omega(t_1 - t_2))$

- $\langle 0 | T x(t_1) x(t_2) | 0 \rangle_{QFT} = D_F(x_1 - x_2)$
- $= \frac{\hbar}{m\omega} \cos(\omega(t_1 - t_2)) + \frac{\hbar}{2} (D_R(t_1 - t_2) + D_R(t_2 - t_1))$
- 遅延伝播関数  $D_R$  の部分がないので
- $(\partial_t^2 + \omega^2)\{x(t) + iJ^*(t)\} = J(t)$  ,  $J(t)$ : 複素ガウス分布
- とすれば、
- $x(t_1) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} A \cos(\omega t_1 + \theta) + \left[ \int dt' D_R(t_1 - t') J(t') \right] - iJ^*(t_1)$
- $x(t_2) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} A \cos(\omega t_2 + \theta) + \left[ \int dt' D_R(t_2 - t') J(t') \right] - iJ^*(t_2)$
- $\langle A^2 \rangle_{cl} = \hbar/2$  と  $\langle J(t) J^*(t') \rangle_{cl} = \hbar/2 \delta(t - t')$  ガウス分布の分散
- $\langle x(t_1) x(t_2) \rangle_{cl} = \frac{\hbar}{m\omega} \cos(\omega(t_1 - t_2)) + \frac{\hbar}{2} (D_R(t_1 - t_2) + D_R(t_2 - t_1))$

# 調和振動子( $\omega \rightarrow \omega'$ )における粒子生成

- 時間に依存するHamiltonianがあると、真空から粒子が生成される。調和振動子で時刻 $t = 0$ で $\omega \rightarrow \omega'$ にジャンプする場合。
- $\omega(t) = \omega, t \leq 0 : x(t) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} (A \cos(\omega t + \theta))$
- $\omega(t) = \omega', t > 0 : x(t) = \sqrt{\frac{2}{m\omega'}} (A' \cos(\omega' t + \theta'))$
- 微分方程式を $t = 0$ で接続して解けばよい。
- $t > 0$ でエネルギーを計算し、粒子数をカウントする。
- 相互作用のない理論では、 $J(t)$ が効かないことが分かるので $J(t) = 0$ とおいてよい。White noiseがどう影響を受けるかで決まる。

$$x(t_1) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} A \cos(\omega t_1 + \theta) + \left[ \int dt' D_R(t_1 - t') J(t') \right] - iJ^*(t_1)$$

- $x(t) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} (A \cos(\omega t + \theta)) = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}} (a e^{-i\omega t} + a^* e^{i\omega t})$
- $x(t) = \sqrt{\frac{2}{m\omega'}} (A' \cos(\omega' t + \theta')) = \sqrt{\frac{1}{2m\omega'}} (a' e^{-i\omega' t} + a'^* e^{i\omega' t})$
- $t = 0$ での連続の条件:  $x(0-) = x(0+)$ ,  $\dot{x}(0-) = \dot{x}(0+)$
- $\sqrt{\frac{2}{m\omega}} (a + a^*) = \sqrt{\frac{2}{m\omega'}} (a' + a'^*)$
- $\sqrt{\frac{2\omega}{m}} (a - a^*) = \sqrt{\frac{2\omega'}{m}} (a' - a'^*)$
- $\Rightarrow \begin{bmatrix} a' \\ a'^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}$ ,  $(\alpha, \beta)$ はBogoliubov係数となる。

- $\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} + \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \right\}, \beta = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} - \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \right\}, (|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1)$

- $t > 0$ で $\langle H \rangle$ を計算すると

- $\langle H \rangle = \omega' \langle a' a'^* \rangle = \omega' (\alpha^2 + \beta^2) \langle a a^* \rangle = \frac{\hbar \omega'}{2} + N \hbar \omega'$

- となり、 $N = |\beta|^2$ は量子力学で計算した値と等しい。

- 従って、古典統計的手法は量子ダイナミクスを計算できる。

- 相互作用、場の理論、フェルミオン、ゲージ場:OK