

Brane expansions for anti-symmetric line operator index

井上真人，共同研究者：今村洋介

東京工業大学

概要

本研究では，ゲージ群 $U(N)$ の反対称表現に属する Wilson line 演算子を挿入した4次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論の超共形指数についての Giant Graviton 展開を提案し，AdS/CFT 対応の重力側の計算により，有限の N に対する指数が正しく得られることを数値的に確認する．今村洋介氏との共同研究(arXiv: 2404.08302)に基づく．

Introduction

Wilson line 演算子の定義

$$W_{\mathcal{R}}(L) = \text{Tr}_{\mathcal{R}} \text{P exp} \left(\oint_L d\tau (A_{\mu} \dot{x}^{\mu} + |\dot{x}| n_I \phi^I) \right)$$

A_{μ} : ゲージ場 ($\mu = 0, 1, 2, 3$)

ϕ^I : スカラー場 ($I = 4, 5, 6, 7, 8, 9$)

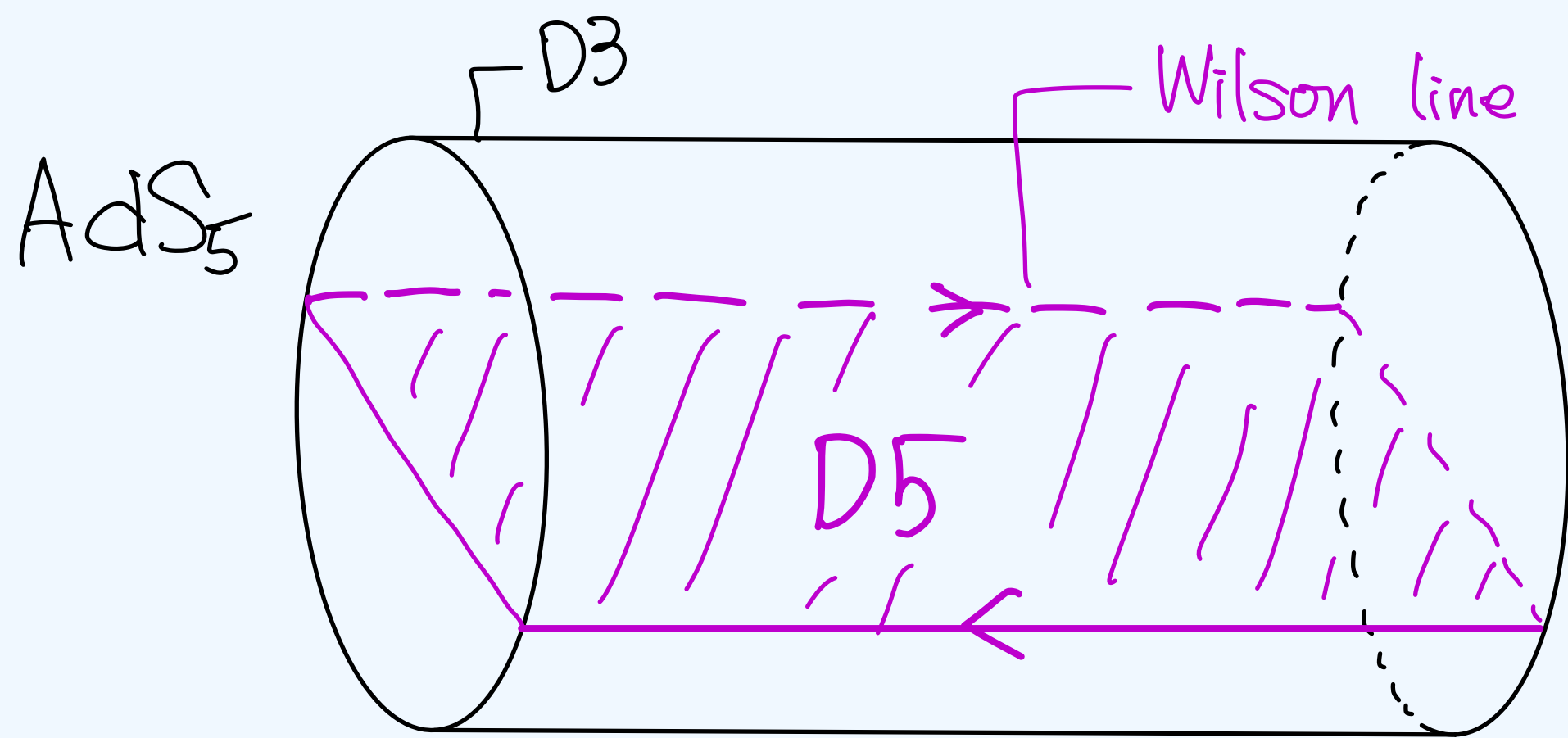
$\mathcal{R}$: $U(N)$ の表現

L : $\mathbb{R}^{1,3}$ 上の Wilson line

AdS/CFT 対応

$$\begin{aligned} \text{AdS}_5 \times S^5 \text{ 上の超重力理論} &\Leftrightarrow \mathbb{R}^{1,3} \text{ 上の } \mathcal{N} = 4 \text{ SCFT} \\ \text{AdS}_2 \times S^4 \text{ 上への D5 ブレーンの挿入} &\Leftrightarrow \mathcal{R}: k \text{ 階反対称表現} \end{aligned}$$

[Yamaguchi (2006)]



超共形指数

超共形指数の定義

$$\mathcal{I}(q, x, y) = \text{Tr}_{\text{BPS}} [(-1)^F q^{J_1} x^{R_X} y^{R_Y}], \quad q = xy$$

[Kinney et al. (2007), Boudier et al. (2015)]

J_1 : spin の Cartan 生成子, R_X, R_Y : R 対称性の Cartan 生成子

CFT side ($\mathcal{I}_{N,k}$)

$$\mathcal{I}_{1,0} = 1 + 0t + 3t^2 - 2t^3 + 3t^4 + \dots \quad (x, y \rightarrow t)$$

AdS side $\rightarrow N$ 無限大極限かつ k 無限大極限に対応している

$$\mathcal{I}_{\text{SUGRA}} \mathcal{I}_{\text{D5}} = 1 + 2t + 8t^2 - 2t^3 + 40t^4 + \dots \quad (x, y \rightarrow t)$$

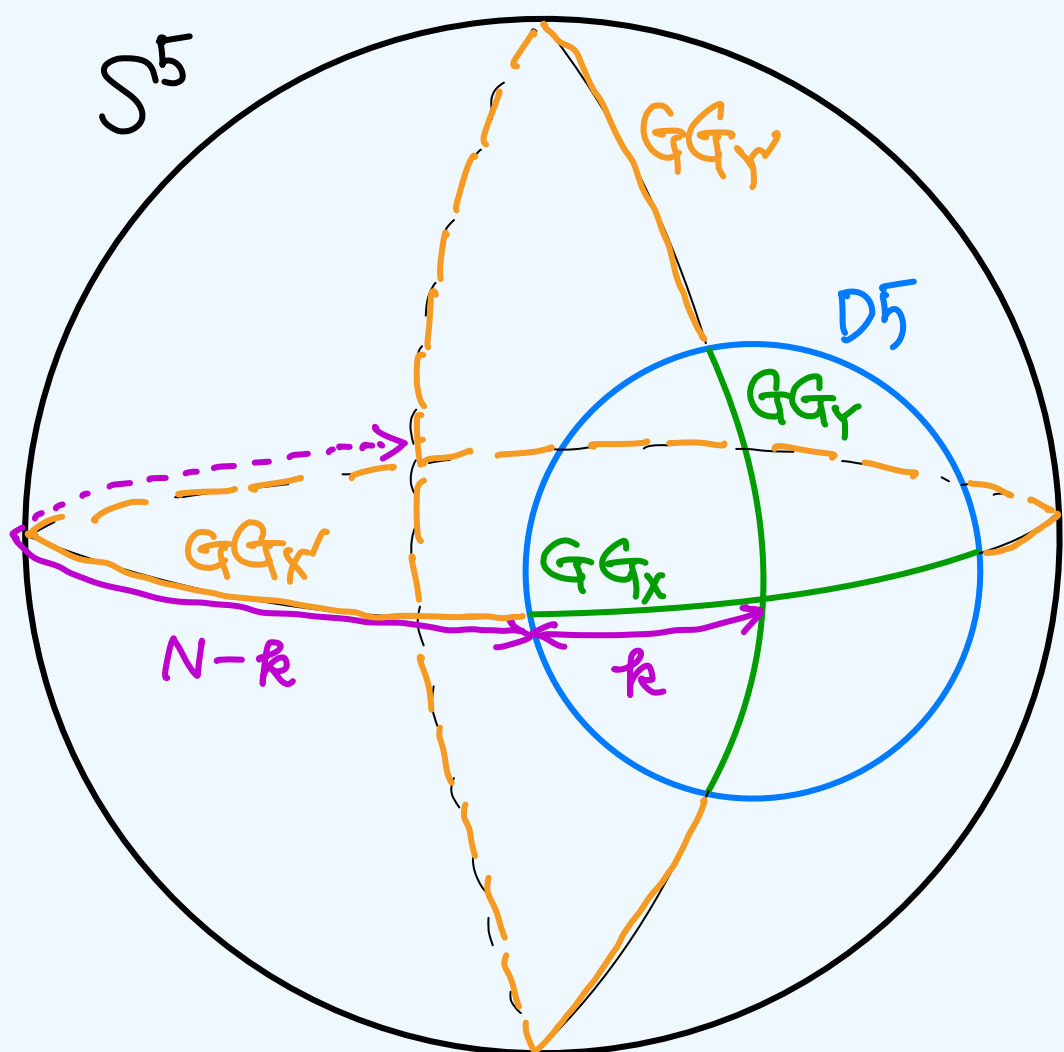
$\rightarrow$ 有限 k および有限 N の補正項が必要！

Giant Graviton

S^5 上の3次元diskに広がるD3ブレーン

	0	1	2	3	4	X	Y	Z
	AdS ₅					S ⁵		
GG _{X=0}	○						○	○

S^5 : $|X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2 = 1$ ($X, Y, Z \in \mathbb{C}$)



Giant Graviton 展開

$$\frac{\mathcal{I}_{N,k}}{\mathcal{I}_{\text{SUGRA}} \mathcal{I}_{\text{D5}}} = \sum_{m_X, m_Y, m'_X, m'_Y} x^{km_X + (N-k)m'_X} y^{km_Y + (N-k)m'_Y} \mathcal{F}_{m_X, m_Y, m'_X, m'_Y}$$

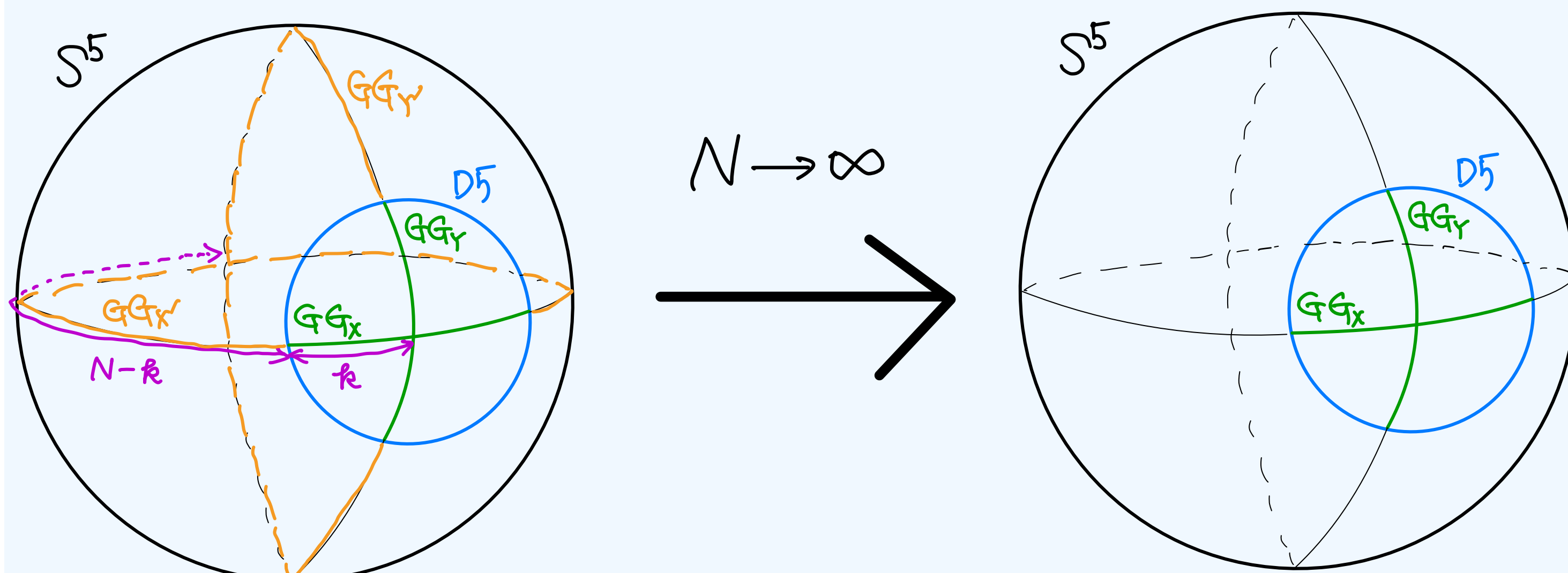
m_X, m_Y, m'_X, m'_Y : $\text{GG}_X, \text{GG}_Y, \text{GG}_{X'}, \text{GG}_{Y'}$ の枚数

有限 k 補正

有限 k 補正

$$\frac{\mathcal{I}_{N=\infty, k}}{\mathcal{I}_{\text{SUGRA}} \mathcal{I}_{\text{D5}}} = \sum_{m_X, m_Y} x^{km_X} y^{km_Y} \mathcal{F}_{m_X, m_Y, 0, 0}$$

$\dots$ $\text{GG}_{X'}$ および $\text{GG}_{Y'}$ の寄与は decouple される



補正項を加えた結果

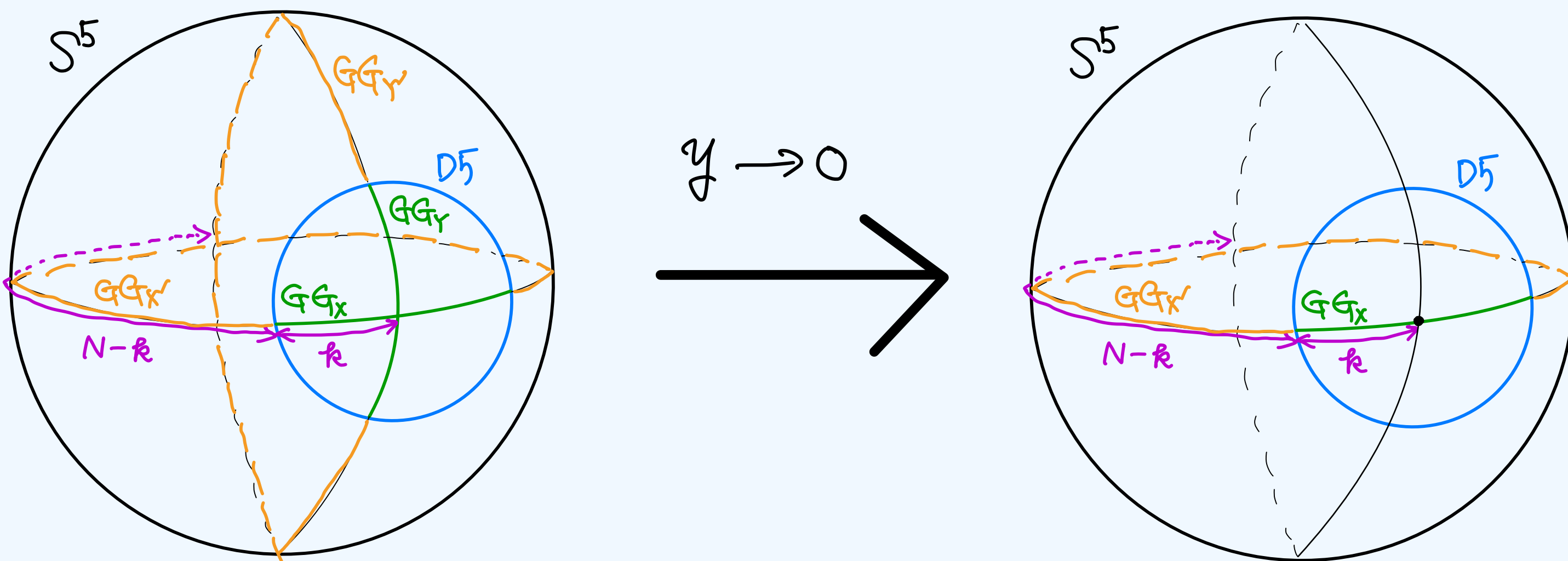
$$\Delta \mathcal{I}_k^{(m)} = \frac{\mathcal{I}_{\infty, k}}{\mathcal{I}_{\text{SUGRA}}} - \mathcal{I}_{\text{D5}} \sum_{m_X + m_Y \leq m} x^{km_X} y^{km_Y} \mathcal{F}_{m_X, m_Y}$$

k	0	1	2	3
$\Delta \mathcal{I}_k^{(0)}$	$\mathcal{O}(t^1)$	$\mathcal{O}(t^2)$	$\mathcal{O}(t^3)$	$\mathcal{O}(t^4)$
$\Delta \mathcal{I}_k^{(1)}$	$\mathcal{O}(t^4)$	$\mathcal{O}(t^6)$	$\mathcal{O}(t^8)$	$\mathcal{O}(t^{10})$
$\Delta \mathcal{I}_k^{(2)}$	$\mathcal{O}(t^9)$	$\mathcal{O}(t^{12})$	$\mathcal{O}(t^{15})$	$\mathcal{O}(t^{18})$

有限 N における結果

Reduced expansion: half-BPS ($y \rightarrow 0$) の場合に成り立つ

$$\frac{\mathcal{I}_{N,k}}{\mathcal{I}_{\text{SUGRA}} \mathcal{I}_{\text{D5}}} = \sum_{m, m'=0}^{\infty} x^{km + (N-k)m'} \mathcal{F}_{m, 0, m', 0}$$



具体例: $\mathcal{I}_{2,1}$ の補正

$$\Delta \mathcal{I}_n = \frac{\mathcal{I}_{2,1}}{\mathcal{I}_{\text{SUGRA}} \mathcal{I}_{\text{D5}}} - \sum_{m+m' \leq n} x^{km + (N-k)m'} \mathcal{F}_{m, 0, m', 0}$$

n	0	1	2	3	4
$\Delta \mathcal{I}_n$	$\mathcal{O}(x^2)$	$\mathcal{O}(x^4)$	$\mathcal{O}(x^7)$	$\mathcal{O}(x^{10})$	$\mathcal{O}(x^{14})$

$\rightarrow$ 高次の項まで再現できる！

summary

- ▶ 有限 N の指数について，Giant Graviton 展開を用いることで，高次項まで再現されることを確認した．
- ▶ Giant Graviton の寄与は，D5 ブレーン上に境界をもつ D3 ブレーン上の理論の寄与を変数変換することによって計算できると仮定した．しかし，実際にこれが成り立つかは検証しなければならず，現在計算中である．